Cálculo integral de funciones de una variable: integral definida

BENITO J. GONZÁLEZ RODRÍGUEZ (bjglez@ull.es)
DOMINGO HERNÁNDEZ ABREU (dhabreu@ull.es)
MATEO M. JIMÉNEZ PAIZ (mjimenez@ull.es)
M. ISABEL MARRERO RODRÍGUEZ (imarrero@ull.es)
ALEJANDRO SANABRIA GARCÍA (asgarcia@ull.es)

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

Índice

2. Integral definida

2.1. Introducción y motivación

Sea $y = f(x)$ una función definida en el intervalo $[a,b]$, positiva y continua. Se pretende calcular el área encerrada por la gráfica de la función y el eje OX.

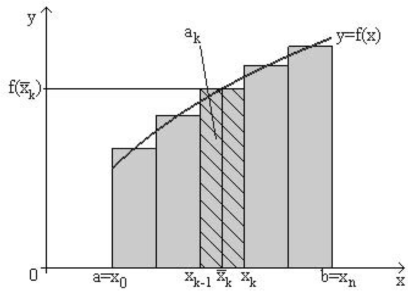

Figura 2.1. Integral de Riemann: aproximación del área bajo la curva por rectángulos.

Para ello dividimos el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos por medio de una partición

$$\mathscr{P}_n = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b\}.$$

En cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ $(1 \leq k \leq n)$ elegimos un punto $\overline{x}_k$. El área del rectángulo de base $[x_{k-1}, x_k]$ y altura $f(\overline{x}_k)$ es:

$$a_k = f(\overline{x}_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Una aproximación del área buscada será:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Refinando la partición $\mathscr{P}_n$, esto es, aumentando el número de subintervalos, en el límite para $n \to \infty$ resulta

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Definición 2.1.1. *Las funciones $f(x)$ para las cuales existe y es finito el límite anterior se denominan* funciones integrables Riemann *en $[a,b]$. La* integral definida *de una tal función entre a y b es:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Los números a y b se denominan límites de integración *(*inferior *y* superior*, respectivamente).*

Cabe notar que entre las funciones integrables en $[a,b]$ se encuentran las funciones continuas en dicho intervalo, aquellas que presentan a lo sumo un número finito de discontinuidades de salto finito, etc.

Proposición 2.1.2. *Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones integrables en el intervalo $[a,b]$. Se cumple:*

i) $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

ii) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$*, cualquiera que sea* $k \in \mathbb{R}$.

iii) $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$

iv) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

v) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \ (c \in [a,b]).$

El siguiente resultado conecta el cálculo diferencial con el integral y constituye una herramienta fundamental para el cálculo de integrales definidas de funciones.

Teorema 2.1.3 (Regla de Barrow)**.** *Si $F(x)$ es una primitiva continua de $f(x)$ en $[a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a).$$

Ejemplo 2.1.4. *Calcular las siguientes integrales definidas:*

$$a)\int_0^1 x^2\,dx; \qquad b)\int_0^1 xe^{x^2-1}\,dx; \qquad c)\int_0^1 xe^x\,dx.$$

RESOLUCIÓN. *a)* Una primitiva de la función x^2 viene dada por $x^3/3+C$. Por tanto, aplicando la regla de Barrow:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

b) Calculamos en primer lugar una primitiva de la función xe^{x^2-1}. A tal fin efectuamos el cambio de variable $t = x^2-1$, de donde $dt = 2x\,dx$. Luego,

$$\int xe^{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2-1} + C.$$

Ahora, al igual que en el apartado anterior:

$$\int_0^1 xe^{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\left[e^{x^2-1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

c) Calculamos en primer lugar una primitiva de la función xe^x. Para ello integramos por partes ($u = x$, $dv = e^x\,dx$; $du = dx$, $v = e^x$):

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

Por tanto:

$$\int_0^1 xe^x\,dx = [e^x(x-1)]_0^1 = 1.$$

□

2.2. Cálculo de áreas

Como aplicación de la integral definida, nos proponemos en esta sección la tarea de calcular áreas de recintos delimitados por gráficas de funciones. En primer lugar consideramos el caso en que las fronteras del recinto son rectas de la forma $x = a$, $x = b$, el eje OX y una curva arbitraria, mientras que en segundo lugar consideraremos el caso de recintos delimitados por dos funciones y rectas de la forma $x = a$, $x = b$.

2.2.1. Área del recinto donde interviene una función

Denotamos por A el área del recinto encerrado por las rectas $x = a$, $x = b$, el eje OX y la curva $y = f(x)$. Podemos distinguir tres casos fundamentales, dependiendo de los valores que tome $f(x)$.

1. La función $f(x)$ es positiva en el intervalo $[a,b]$ (Figura 2.2).

2. La función $f(x)$ es negativa en el intervalo $[a,b]$ (Figura 2.3).

3. La función $f(x)$ toma valores tanto positivos como negativos en el intervalo $[a,b]$ (Figura 2.4).

Ejemplo 2.2.1. *Calcular el área limitada por $y = \operatorname{sen} x$ y el eje OX para $0 \leq x \leq 2\pi$.*

RESOLUCIÓN. Se puede ver una representación gráfica del recinto en la Figura 2.5.

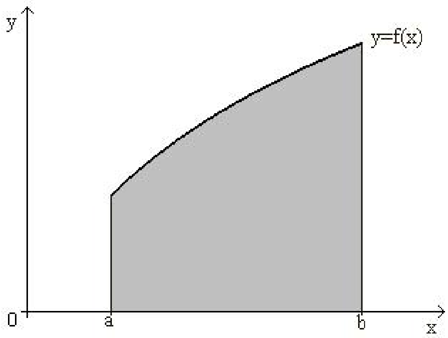

Figura 2.2. $\boxed{A = \int_a^b f(x)\,dx}$

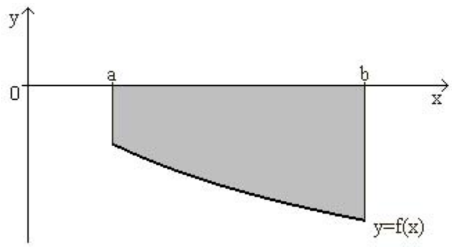

Figura 2.3. $\boxed{A = -\int_a^b f(x)\,dx = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|}$

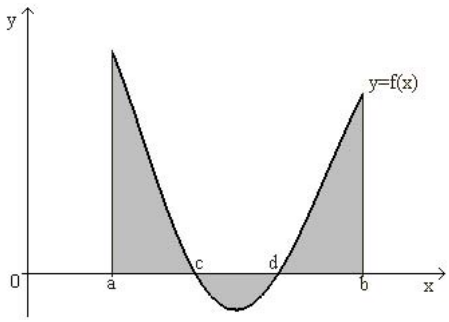

Figura 2.4. $\boxed{A = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx}$

Conforme al anterior caso 3, el área buscada será:

$$A = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \;\, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x \;\, dx = 2\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \;\, dx = -2\,[\cos x]_0^{\pi} = -2(\cos\pi - \cos 0) = 4.$$

□

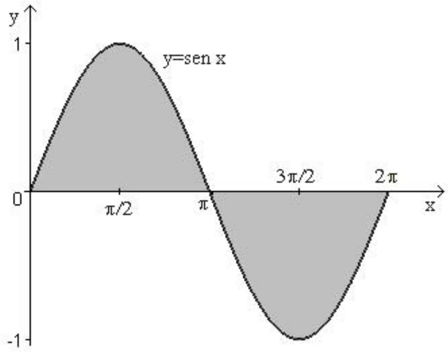

Figura 2.5. Recinto del Ejemplo 2.2.1.

2.2.2. Área del recinto donde intervienen dos funciones

Denotamos por A el área del recinto delimitado por las rectas $x = a$, $x = b$ y las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$. Podemos distinguir cuatro casos, dependiendo de los valores que tomen las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

1. Ambas funciones son positivas en el intervalo $[a,b]$ y sus gráficas no se intersecan en el intervalo considerado, salvo quizás en $x = a$ ó $x = b$ (Figura 2.6).

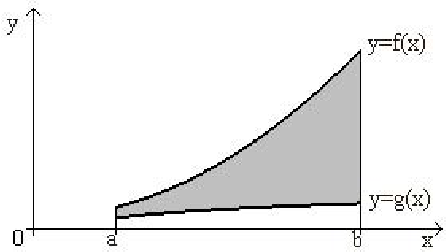

Figura 2.6. $\boxed{A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx}$

2. Las funciones son negativas en $[a,b]$ y sus gráficas no se intersecan en el intervalo considerado, salvo quizás en los extremos del mismo (Figura 2.7).

3. Las funciones toman signos opuestos en $[a,b]$, sin cortarse excepto quizá en los extremos del intervalo (Figura 2.8).

4. Las funciones se cortan en un punto $c \in [a,b]$ (Figura 2.9).

Combinando estas cuatro situaciones básicas con las propiedades de la integral definida podremos calcular el área de recintos delimitados por dos o más funciones.

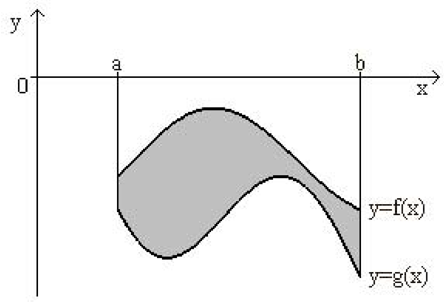

Figura 2.7. $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$

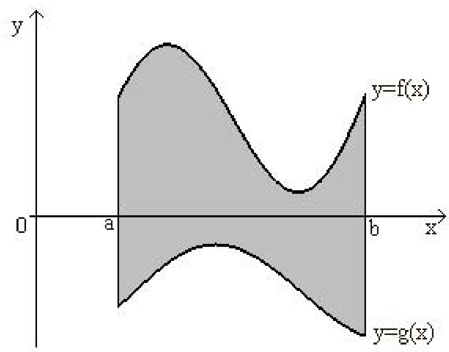

Figura 2.8. $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$

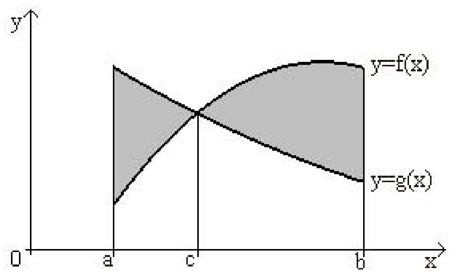

Figura 2.9. $A = \int_a^c [g(x) - f(x)]\, dx + \int_c^b [f(x) - g(x)]\, dx$

Ejemplo 2.2.2. *Calcular el área limitada por las curvas* $y = 2 - x^2$, $y = x$.

RESOLUCIÓN. En la Figura 2.10 se representa gráficamente el recinto limitado por ambas curvas.

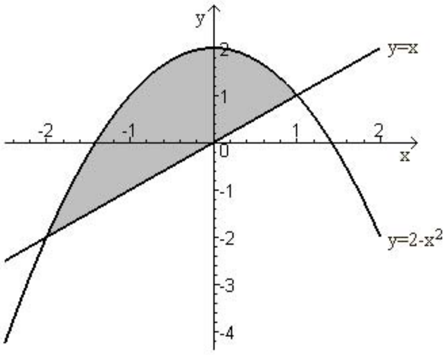

Figura 2.10. Recinto del Ejemplo 2.2.2.

Notemos, en primer lugar, que los puntos de intersección de la parábola $y = 2 - x^2$ con la recta $y = x$ vienen dados como solución del sistema

$$\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 2 - x^2 = x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ x_1 = 1. \end{cases}$$

En consecuencia, el área buscada es:

$$A = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\, dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{1} = \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3} \right)$$

$$= \frac{12 - 3 - 2}{6} - \frac{-18 + 8}{3} = \frac{7 + 20}{6} = \frac{9}{2}.$$

□

Observación 2.2.3. *Si las curvas vienen expresadas en la forma $x = f(y)$, $x = g(y)$ procedemos de modo análogo a como lo hemos hecho, pero integrando respecto de y.*

Ejemplo 2.2.4. *Calcular el área limitada por la curva $x = y^2 - 9$ y el eje OY para $-3 \leq y \leq 3$.*

RESOLUCIÓN. Una representación gráfica de la parábola $x = y^2 - 9$ viene dada en la Figura 2.11.

Considerando la simetría que presenta la función respecto del eje OX:

$$A = \int_{-3}^{3} (9 - y^2)\, dy = 2 \int_{0}^{3} (9 - y^2)\, dy = 2 \left[9y - \frac{y^3}{3} \right]_{0}^{3} = 2\,(27 - 9) = 36.$$

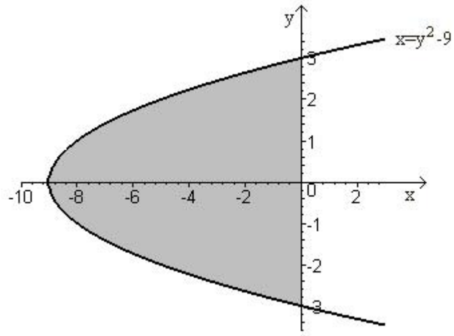

Figura 2.11. Recinto del Ejemplo 2.2.4.

□

Ejemplo 2.2.5. *Calcular el área comprendida entre la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = 2x - 4$.*

RESOLUCIÓN. Los puntos de intersección de la parábola $y^2 = 4x$ con la recta $y = 2x - 4$ vienen dados por la solución del sistema

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y^2}{4} \\ x = \dfrac{y+4}{2}. \end{cases}$$

Luego,

$$\frac{y^2}{4} = \frac{y+4}{2} \Rightarrow y^2 - 2y - 8 = 0 \Rightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = -2 \\ y_1 = 4. \end{cases}$$

Las coordenadas de los puntos de intersección son entonces:

$$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow -2 = 2x - 4 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1,$$

y

$$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow 4 = 2x - 4 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4,$$

esto es, ambas curvas se cortan en los puntos $(4,4)$ y $(1,-2)$. El recinto está representado gráficamente en la Figura 2.12.

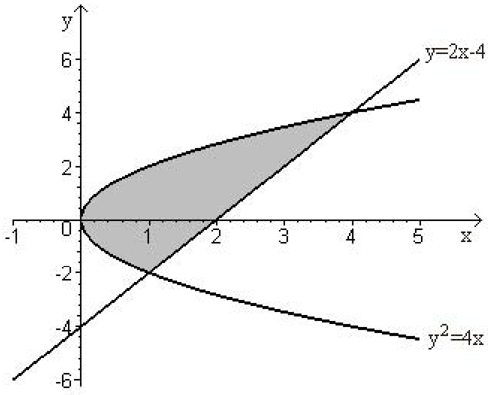

Figura 2.12. Recinto del Ejemplo 2.2.5.

Por tanto:

$$A = \int_{-2}^{4} \left[\frac{y+4}{2} - \frac{y^2}{4} \right] dx = \frac{1}{4} \left[y^2 + 8y - \frac{y^3}{3} \right]_{-2}^{4} = \frac{1}{4} \left[\left(16 + 32 - \frac{64}{3} \right) - \left(4 - 16 + \frac{8}{3} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{12} [144 - 64 + 36 - 8] = \frac{108}{12} = 9.$$

Nótese que efectuando la integración respecto de la variable x se tendría:

$$A = \int_{0}^{1} [\sqrt{4x} - (-\sqrt{4x})] \, dx + \int_{1}^{4} \left[\sqrt{4x} - (2x-4) \right] dx = 2 \int_{0}^{1} \sqrt{4x} \, dx + \int_{1}^{4} \left[\sqrt{4x} - (2x-4) \right] dx$$

$$= 2 \left[\frac{4}{3} x^{3/2} \right]_{0}^{1} + \left[\frac{4}{3} x^{3/2} - x^2 + 4x \right]_{1}^{4} = 2 \cdot \frac{4}{3} + \left[\left(\frac{32}{3} - 16 + 16 \right) - \left(\frac{4}{3} - 1 + 4 \right) \right]$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{1}{3} [32 - (4+9)] = \frac{8+19}{3} = 9.$$

Como vemos, la integración con respecto a x se vuelve algo más laboriosa que la integración con respecto a y. □

2.3. Integración numérica

Al calcular una integral definida puede ocurrir que la función a integrar no admita primitiva elemental, con lo cual no es aplicable la Regla de Barrow. Tal es el caso de la llamada *función error* de Gauss:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt,$$

de importancia fundamental en el cálculo de probabilidades. Por otra parte, en problemas de laboratorio es frecuente que el integrando no sea conocido explícitamente, sino que venga dado parcialmente por una tabla de valores. En ambas situaciones hemos de contentarnos con encontrar un valor aproximado de la integral definida.

Teniendo en cuenta la interpretación geométrica de la integral definida como un área daremos dos fórmulas de aproximación: la Regla Trapezoidal y la Regla de Simpson.

2.3.1. Regla Trapezoidal

Proposición 2.3.1. *La integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ puede ser aproximada mediante:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right],$$

siendo $\mathscr{P} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ una partición de $[a,b]$ en $n+1$ nodos equiespaciados*:*

$$x_k = x_0 + \frac{k}{n}(b-a) \quad (0 \le k \le n).$$

La fórmula anterior proviene de la aproximación del área bajo la curva $y = f(x)$ en $[a,b]$ mediante trapezoides en lugar de rectángulos.

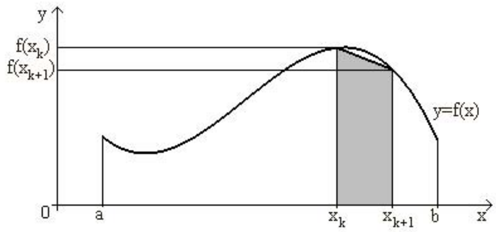

Figura 2.13. Regla trapezoidal.

2.3.2. Regla de Simpson

Proposición 2.3.2. *La integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ puede ser aproximada mediante:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right],$$

siendo n un número par *y $\mathscr{P}=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b\}$ una partición de $[a,b]$ en $n+1$ nodos* equiespaciados*:*

$$x_k = x_0+\frac{k}{n}(b-a) \quad (0\le k\le n).$$

Esta fórmula proviene de la aproximación del área bajo la curva $y=f(x)$ en $[a,b]$ mediante recintos limitados por arcos de parábola «próximos» a la curva.

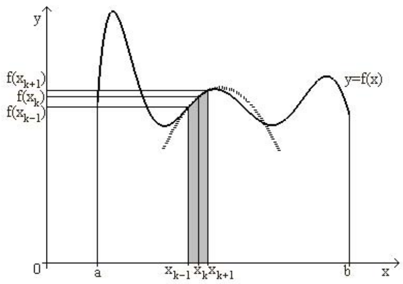

Figura 2.14. Regla de Simpson.

Ejemplo 2.3.3. *Usando la regla trapezoidal con* 6 *nodos, aproximar*

$$\int_0^{10}(x^2+3)\,dx.$$

RESOLUCIÓN. Al tomar una partición del intervalo $[0,10]$ en 6 nodos equiespaciados, éstos vendrán dados por:

$$x_k = x_0+\frac{k}{5}(10-0)=0+2k=2k \quad (0\le k\le 5).$$

Por tanto, aplicando la regla trapezoidal:

$$\int_0^{10}(x^2+3)\,dx \simeq \frac{10-0}{5}\left[\frac{3}{2}+(2^2+3)+(4^2+3)+(6^2+3)+(8^2+3)+\frac{10^2+3}{2}\right]$$

$$=2\left[\frac{106}{2}+12+4+16+36+64\right]=106+204=370.$$

El valor exacto es:

$$\int_0^{10}(x^2+3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+3x\right]_0^{10} = \frac{1000}{3}+30 = \frac{1090}{3} \simeq 363.3.$$

□

Ejemplo 2.3.4. *Usando la regla de Simpson con* 6 *subintervalos, aproximar*

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

RESOLUCIÓN. Al tomar una subdivisión del intervalo $[1,2]$ en 6 subintervalos de igual longitud, tendremos 7 nodos que vendrán dados por:

$$x_k = x_0 + \frac{k}{6}(2-1) = 1 + \frac{k}{6} = \frac{6+k}{6} \quad (0 \le k \le 6).$$

Por tanto, aplicando la regla de Simpson:

$$\begin{aligned}
\ln 2 &\simeq \frac{2-1}{36}\left(\frac{1}{\frac{6+0}{6}} + 4\,\frac{1}{\frac{6+1}{6}} + 2\,\frac{1}{\frac{6+2}{6}} + 4\,\frac{1}{\frac{6+3}{6}} + 2\,\frac{1}{\frac{6+4}{6}} + 4\,\frac{1}{\frac{6+5}{6}} + \frac{1}{\frac{6+6}{6}}\right)\\
&= \frac{1}{18}\left(\frac{6}{6+0} + 4\,\frac{6}{6+1} + 2\,\frac{6}{6+2} + 4\,\frac{6}{6+3} + 2\,\frac{6}{6+4} + 4\,\frac{6}{6+5} + \frac{6}{6+6}\right)\\
&= \frac{1}{18}\left(1 + \frac{24}{7} + \frac{12}{8} + \frac{24}{9} + \frac{12}{10} + \frac{24}{11} + \frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{18}\left(1 + \frac{24}{7} + \frac{3}{2} + \frac{8}{3} + \frac{6}{5} + \frac{24}{11} + \frac{1}{2}\right)\\
&\simeq 0.6931697933,
\end{aligned}$$

mientras que usando una calculadora convencional:

$$\ln 2 = 0.6931471806.$$

□

2.4. Aplicaciones de la integral definida

2.4.1. Valor medio de una función

Recordemos que la *media aritmética* $\overline{a}$ de n números $a_1,\ldots,a_n$ se define por:

$$\overline{a} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Si $y = f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y

$$\mathscr{P}_n = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b\}$$

es una partición de $[a,b]$ en $n+1$ nodos equiespaciados:

$$x_k = a + k\Delta x, \quad \text{con} \quad \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad 0 \leq k \leq n,$$

y si además tomamos

$$x_k^* \in [x_{k-1}, x_k] \quad \text{para} \quad 1 \leq k \leq n,$$

entonces la media aritmética de los valores $f(x_1^*), f(x_2^*), \ldots, f(x_n^*)$ será:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) = \frac{1}{n}\frac{b-a}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) = \frac{1}{b-a}\Delta x\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x.$$

Si se incrementa el número de nodos de la partición, en el límite cuando $n \to \infty$ se tiene, atendiendo a la definición de la integral definida:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Definición 2.4.1. *Se llama* valor medio *de f en $[a,b]$ al número:*

$$A(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ejemplo 2.4.2. *Hallar el valor medio de $f(x) = x^2$ en $[0,3]$.*

RESOLUCIÓN. El valor medio de x^2 en $[0,3]$ es:

$$A(f) = A(x^2) = \frac{1}{3}\int_0^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{9}\right]_0^3 = 3.$$

□

2.4.2. Respuesta cardiaca

En fisiología, se llama *respuesta cardiaca* R al volumen de sangre que el corazón impulsa por unidad de tiempo. Una respuesta cardiaca anormal es indicativa de una enfermedad.

La respuesta cardiaca puede ser medida mediante el llamado *método de dilución por tinción*. Una cantidad D de tinte (medida en miligramos) es inyectada en la arteria pulmonar, cerca del corazón. El tinte circula a través de los pulmones y regresa por las venas pulmonares a la aurícula izquierda siendo luego expulsado a través de la aorta, donde una sonda comprueba la cantidad de tinte saliente a intervalos regulares dentro de un determinado periodo de tiempo, digamos $[0,T]$ (segundos). Supongamos que la concentración de tinte medida en cada instante puede ser descrita mediante una función continua $c(t)$ (miligramos por litro). Si subdividimos $[0,T]$ en n intervalos de igual longitud $\Delta t = T/n$, la cantidad de tinte que circula frente a la sonda en cada subintervalo será, aproximadamente,

$$\begin{aligned} \Delta D_k = c(t_k^*)\,R\,\Delta t \ & \text{(concentración)} \times \text{(volumen/tiempo)} \times \text{(tiempo)} \\ & \text{(concentración)} \times \text{(volumen)} \\ & \text{(masa/volumen)} \times \text{(volumen)} = \text{masa}, \end{aligned}$$

donde t_k^* es un punto cualquiera del subintervalo considerado. Por tanto, la cantidad aproximada de tinte medida en el intervalo $[0,T]$ es

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta D_k = \sum_{k=1}^{n} c(t_k^*)\,R\,\Delta t = R\sum_{k=1}^{n} c(t_k^*)\,\Delta t.$$

Tomando cada vez un número mayor de subintervalos en $[0,T]$ tenemos, en el límite para $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta D_k = \lim_{n\to\infty} R \sum_{k=1}^{n} c(t_k^*)\, \Delta t \quad \Rightarrow \quad D = R \int_0^T c(t)\, dt.$$

Luego, la respuesta cardiaca R viene dada por:

$$R = \frac{D}{\int_0^T c(t) dt} \text{ L/s.}$$

Ejemplo 2.4.3. *Se inyectan* 5 *miligramos de tinte en la arteria pulmonar. Determinar la respuesta cardiaca en un periodo de* 30 *segundos, si la concentración del tinte es*

$$c(t) = -\frac{1}{100}\, t\,(t-30) \text{ miligramos por litro.}$$

RESOLUCIÓN. Conforme a la discusión anterior, la respuesta cardiaca es:

$$\begin{aligned}
R &= \frac{5}{\int_0^{30} -\frac{1}{100}\, t\,(t-30) dt} = -\frac{500}{\int_0^{30} (t^2 - 30t)\, dt} = -\frac{500}{\left[\frac{t^3}{3} - 15t^2\right]_0^{30}} \\
&= -\frac{500}{9000 - 13500} = \frac{5}{45} = \frac{1}{9} \text{ L/s} \\
&= \frac{60}{9} = \frac{20}{3} \text{ L/min.}
\end{aligned}$$

□