Formulación del elemento de barra unidimensional.

Viana L. Guadalupe Suárez
Carmelo Militello Militello
Departamento de Ingeniería Industrial
Área de Mecánica

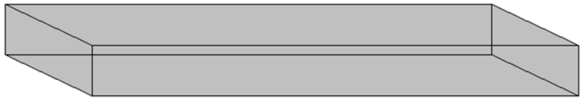
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Civil e Industrial
Universidad de La Laguna
Tenerife, España

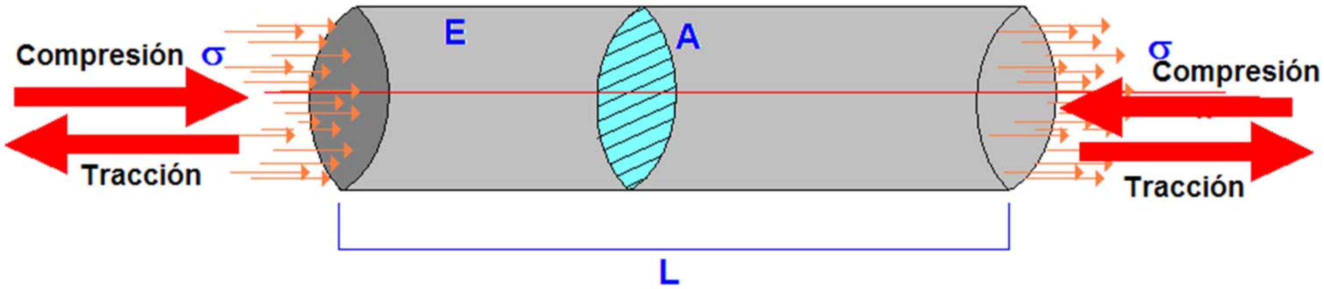
Hasta ahora hemos visto:

Análisis matricial aplicados a sistemas unidimensionales con el elemento tipo muelle o resorte.

- Planteamos la **energía total** del sistema a través de la contribución energética de cada resorte teniendo en cuenta el *trabajo que realizan las cargas exteriores* y la *energía elástica* de cada resorte.
- Aplicamos el **principio de minimización** de la energía total para obtener **los desplazamientos** en cada uno de los extremos del resorte.
- Se introducen las **condiciones de contorno.**
- Se determina la **matriz de rigidez** del sistema que relaciona las fuerzas externas aplicadas y los desplazamientos del sistema.
- En el caso de un sistema de muelles se obtiene la **matriz de rigidez global** mediante el **procedimiento de ensamble** a partir de las contribuciones de la matriz de rigidez de cada resorte.

- **Elemento tipo: Barra unidimensional.**



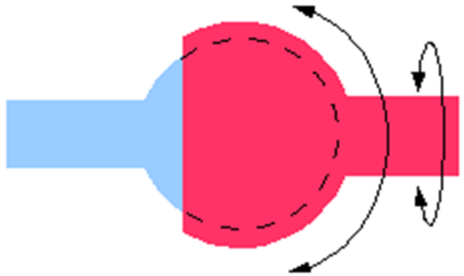


Consideraciones:

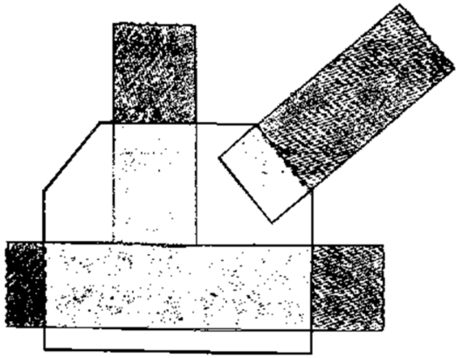
- La dimensión longitudinal predomina sobre las dimensiones de su sección transversal L>>A.
- Extremos de unión son articulados: No hay restricción al giro.
-Trabajan a tracción o compresión.
- Apoyados únicamente en los extremos.
- Cargados únicamente en los extremos y en el centroide geométrico del la sección.
- Comportamiento lineal que obedece a la Ley de Hooke (rango elástico).
- Rango de las pequeñas deformaciones.
- Cargas estáticas

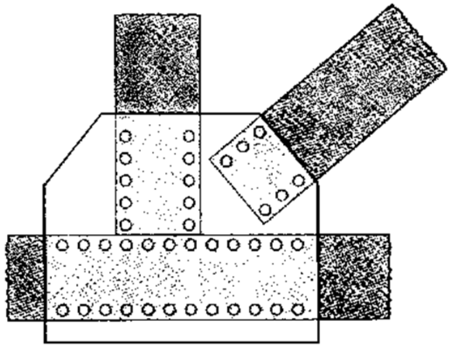
- **Elementos de unión entre elementos: *Rótula***

Una rótula mecánica es una articulación o junta en la cual una pieza terminada en una bola (en azul en el dibujo) está unida a una pieza terminada en una cavidad o casquillo (púrpura en el dibujo) de forma que permite un relativo movimiento dentro de cierto ángulo en todos los planos que pasan por una línea. Denominada también articulación a rótula. Una rótula tiene tres grados de libertad, aunque la amplitud del movimiento en dos de ellos esté limitada.

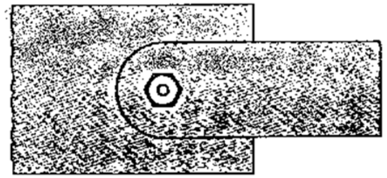


- **Elementos de unión entre elementos: *Cartelas***


Cartela soldada


Cartela roblonada

TRANSMITEN MOMENTO

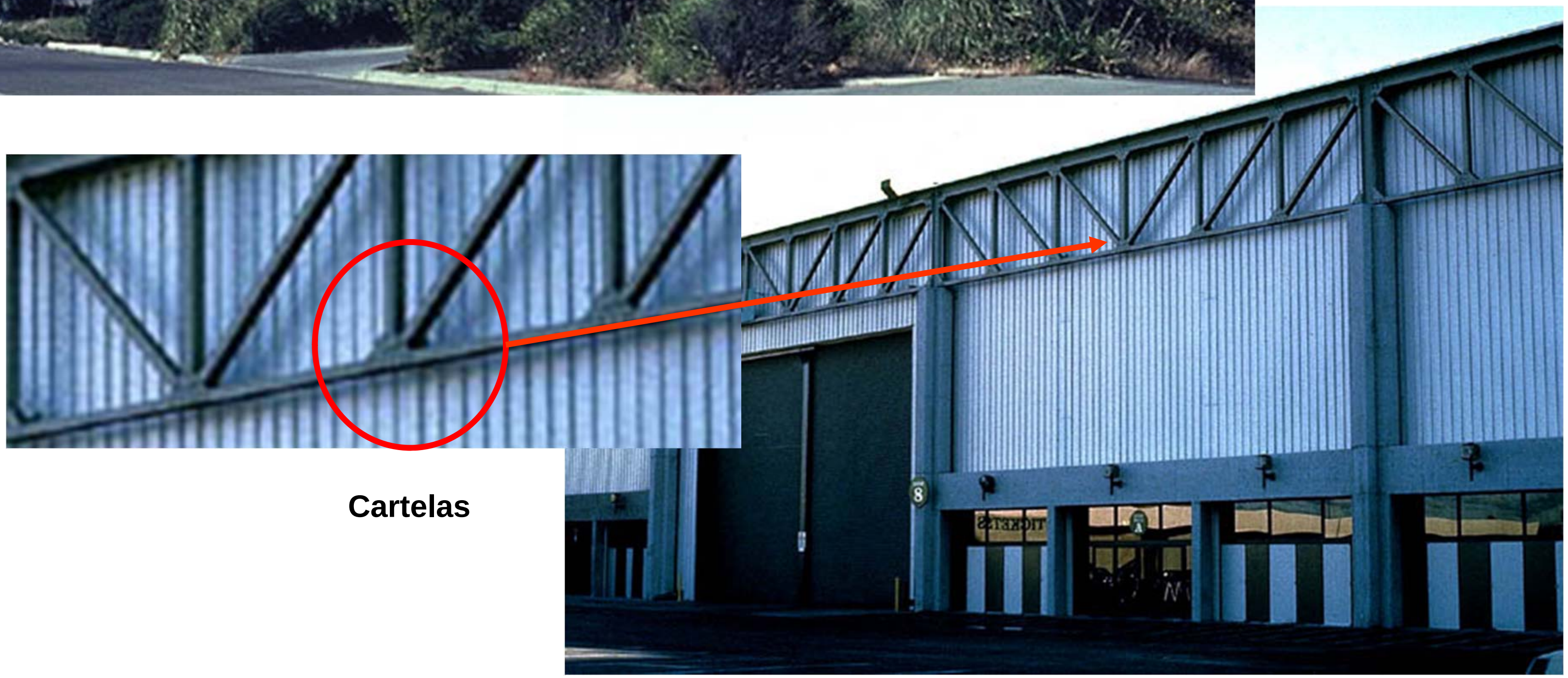

Cartela atornillada

NO TRANSMITE MOMENTO:
1 tornillo se comporta como una unión articulada

Puente

***Nota: dependiendo del tipo de unión que une los distintos elementos estructurales éstos se comportan como barras o vigas.**

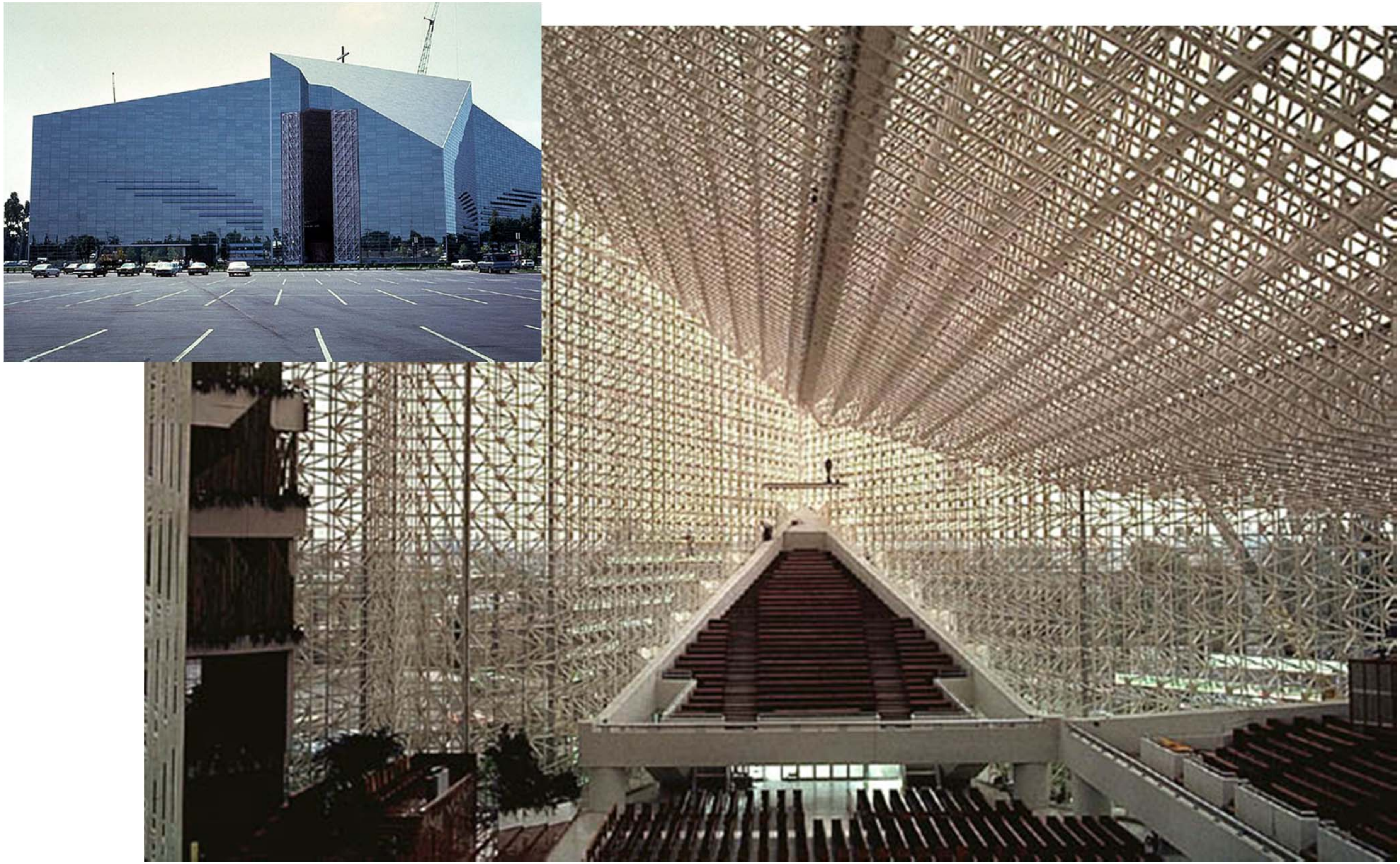
Cubierta industrial



Cartelas

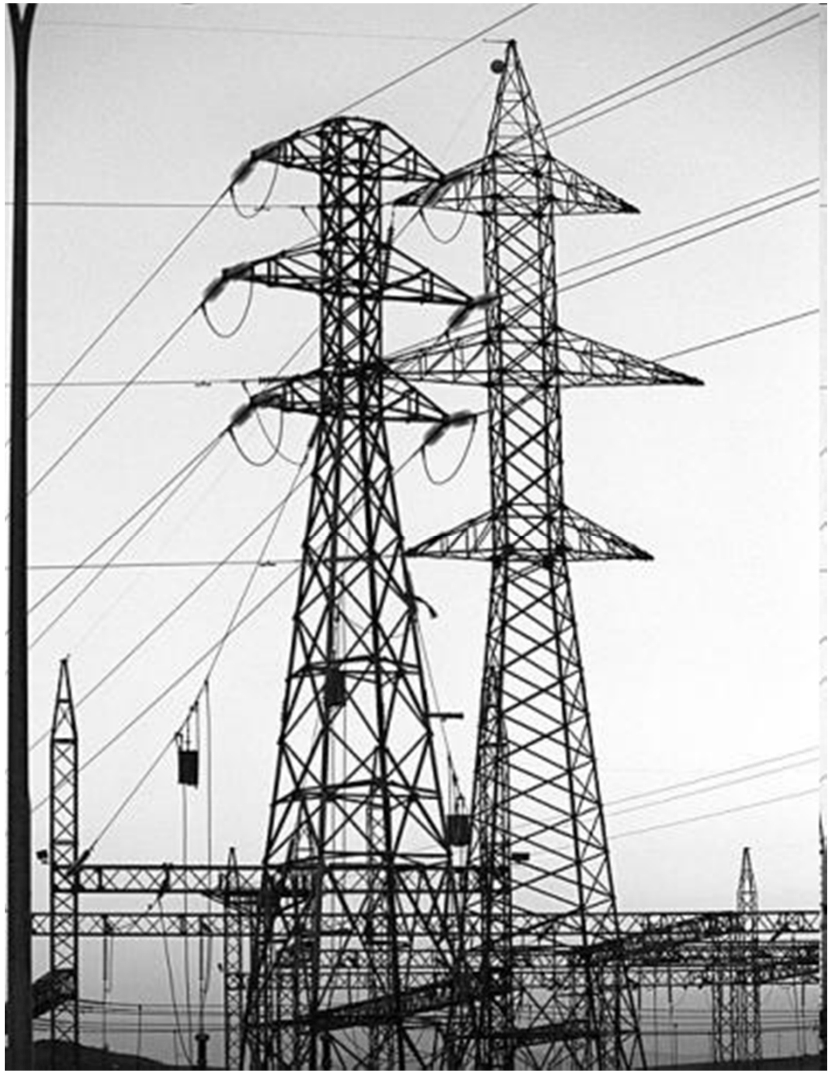
Edificios.

Torres y monumentos.




Redwood Bank
GREENSLEEVES
Chevron

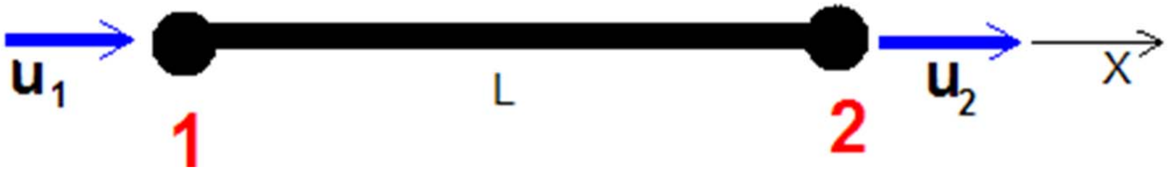
Estructuras sencillas.




4 4 2008

• **Representación del elemento: (Espacio unidimensional)**

1 nodo= 1gdl
1 elemento= 2 nodos = 2gdl



• **Campo de desplazamiento:** $$u(x) = a + bx$$ *Polinomio lineal, completo

*Aplicamos condiciones de contorno:

$$\left.\begin{aligned} u(x=0) &= u_1 \\ u(x=L) &= u_2 \end{aligned}\right\} \quad u(x) = (1-\frac{x}{L})u_1 + \frac{x}{L}u_2$$

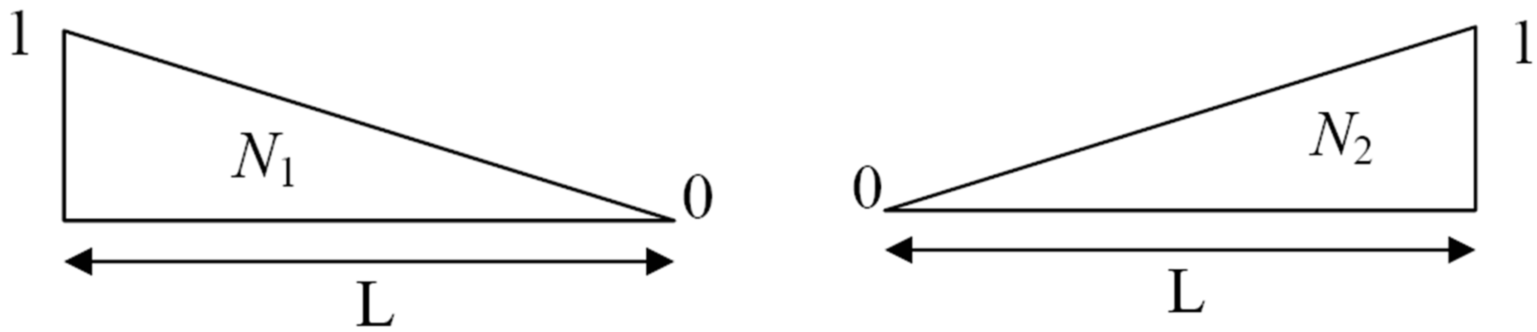
- **Funciones de forma *(Funciones de interpolación entre los nodos)***

  (Polinomios de Lagrange)

$$u(x) = (1 - \frac{x}{L})u_1 + \frac{x}{L}u_2 = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2$$

$$matricial \Rightarrow u(x) = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \qquad N_2 = \frac{x}{L}$$



• Relación entre la deformación y los desplazamientos:

$$\varepsilon = \varepsilon_x = \frac{\partial u(x)}{\partial x} = -\frac{1}{L}u_1 + \frac{1}{L}u_2 \qquad matricial \Rightarrow \varepsilon = [-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L}]\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Matriz de forma B: (Contiene la información sobre las características geométricas del elemento)

$$B = [-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L}] \qquad \bar{\varepsilon} = [B]\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = [B_1 \quad B_2]\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = [B]\bar{d}$$

• Relación entre la tensión y los desplazamientos (Ley de Hooke):

$$\sigma = \sigma_x = E\varepsilon = -\frac{E}{L}u_1 + \frac{E}{L}u_2 \qquad matricial \Rightarrow \bar{\sigma} = E\varepsilon = E\begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Matriz constitutiva D:(Contiene la información sobre las propiedades del material)

$$D = E \qquad \bar{\sigma} = [D]\varepsilon = [D][B_1 \quad B_2]\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = [D][B]\bar{d}$$

• **Energía potencial total acumulada en la barra:**

$$E_{tot} = U - W = \frac{1}{2}\int_V \overline{\sigma}^T \overline{\varepsilon} dV - W \Rightarrow \frac{\partial E_{tot}}{\partial u} = 0$$

*Principio de minimización de la energía

U= Energía elástica acumulada
W= Trabajo realizado por las cargas externas

• **Matriz de rigidez del elemento:**

$$[K] = \int_V [B]^T [D][B] dV \Rightarrow [K]_{barra} = EA \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

• **Relación entre las fuerzas y los desplazamientos:** $\overline{F} = [K]\overline{u}$

Problema 1. Sistema de barras de distinto área transversal.

Dado el siguiente sistema de barra mostrado en la figura, sometido a una fuerza P, obtener la tensión de las barras y las reacciones en los apoyos.