Triángulo plano: Tensión plana

Viana L. Guadalupe Suárez
Carmelo Militello Militello
Departamento de Ingeniería Industrial
Área de Mecánica

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Civil e Industrial
Universidad de La Laguna
Tenerife, España

1. Elemento Triangular de 3 nodos *(Constant Strain Triangular (CST))*

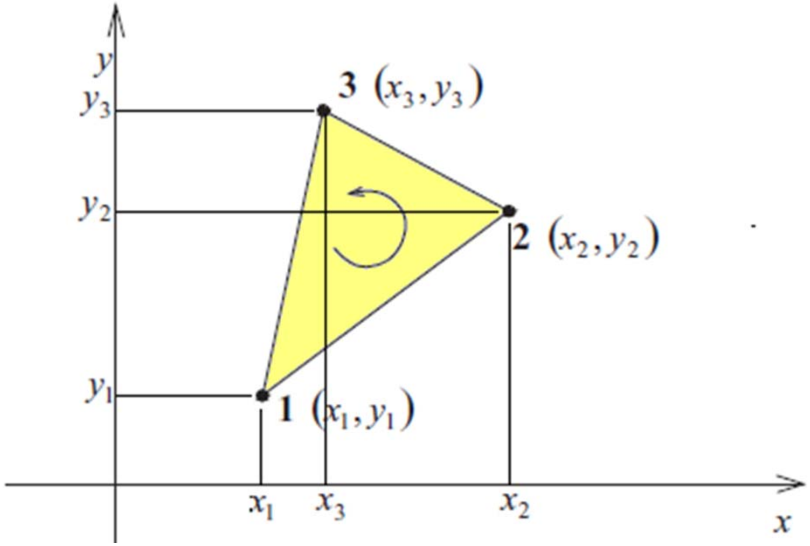
Características:

- Permite resolver problemas de elasticidad plana
- Elemento sencillo, formulación similar al cálculo matricial de las barras
- Campo de desplazamiento dentro del elemento es lineal por lo tanto las deformaciones son constantes por lo que es necesario utilizar mallas muy tupidas para discretizar el dominio.

Descripción del elemento:

1. Elegimos un sistema de coordenadas x-y
2. Identificamos el número de nodos = 3
3. Definimos los grados de libertad por nodo: *u* (desplazamiento en x), *v* (deplazamiento en y) = **(u, v)**
4. Se definen las posiciones de cada nodo en el sistema de coordenadas cartesianas:

Nodo 1: (x1, y1)
Nodo 2: (x2, y2)
Nodo 3: (x3, y3)

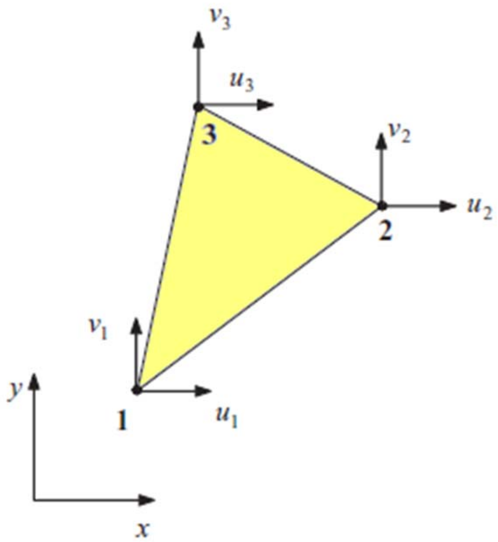


Área del triángulo:

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)\right)$$

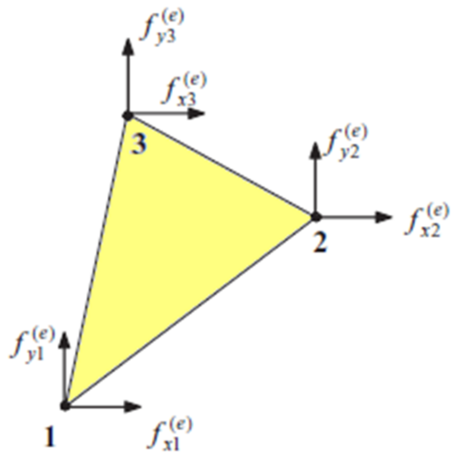
Vector de desplazamientos nodales

$$\{u^{(e)}\} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$



Vector de fuerzas externas:

$$\{f_{ext}^{(e)}\} = \begin{bmatrix} f_{x1}^{(e)} \\ f_{y1}^{(e)} \\ f_{x2}^{(e)} \\ f_{y2}^{(e)} \\ f_{x3}^{(e)} \\ f_{y3}^{(e)} \end{bmatrix}$$



Selección de la función que describe el campo de desplazamiento:

Seleccionamos dentro del elemento una función matemática que se aproxime a la solución de los desplazamientos según la ecuación diferencial. Esta función se expresará mediante el método de los elementos finitos sólo en función de los nodos del elemento, de manera que cuando se calcule el valor de esos nodos podrá conocerse, interpolando, la solución en todos los puntos dentro del elemento.

$$\boxed{\begin{aligned} u(x,y) &= a_1 + a_2 x + a_3 y \\ v(x,y) &= b_1 + b_2 x + b_3 y \end{aligned}}$$

Campo de desplazamiento lineal
(Polinomio de Pascal)

Campo de desplazamiento expresado en función de las funciones de forma o polinomios de interpolación

$$\left.\begin{aligned} N_1(x,y) &= \frac{1}{2\Delta}\left(x(y_2-y_3)+y(x_3-x_2)+(x_2y_3-x_3y_2)\right) \\ N_2(x,y) &= \frac{1}{2\Delta}\left(x(y_3-y_1)+y(x_1-x_3)+(x_3y_1-x_1y_3)\right) \\ N_3(x,y) &= \frac{1}{2\Delta}\left(x(y_1-y_2)+y(x_2-x_1)+(x_1y_2-x_2y_1)\right) \end{aligned}\right\}$$

Funciones de formas lineales del triangulo plano

$$u(x,y) = N_1(x,y)u_1 + N_2(x,y)u_2 + N_3(x,y)u_3$$

$$v(x,y) = N_1(x,y)v_1 + N_2(x,y)v_2 + N_3(x,y)v_3$$

Relación deformación-desplazamiento nodales.

$$\bar{\varepsilon}(x,y) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix} \bar{d} = [B]\bar{d}$$

- **Matriz [B]**

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{2\Delta}\left[\begin{array}{cc|cc|cc} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{array}\right]$$

$$b_1 = (y_2 - y_3)\,; \quad b_2 = (y_3 - y_1)\,; \quad b_3 = (y_1 - y_2)$$
$$c_1 = (x_3 - x_2)\,; \quad c_2 = (x_1 - x_3)\,; \quad c_3 = (x_2 - x1)$$

Relación tensión-desplazamiento nodales:

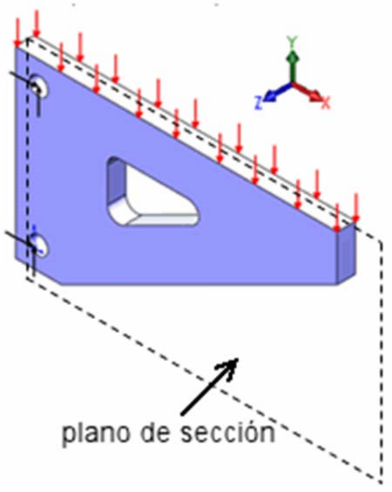
$$\overline{\sigma}(x,y)=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}=[D]\overline{\varepsilon}(x,y)$$

- **Matriz [D]**

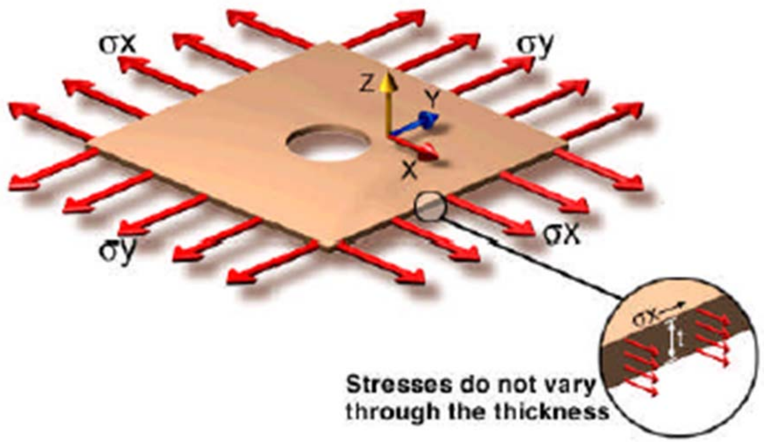
❖ TENSIÓN PLANA

$$\sigma_z=0 \qquad [D]=\frac{E}{1-\upsilon^2}\begin{bmatrix}1 & \upsilon & 0\\ \upsilon & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\upsilon}{2}\end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_z\neq 0$$



- Un caso de tensión plana se identifica cuando una de las cotas del modelo (espesor) es mucho más pequeña que las otras dos.
- Para estos problemas, se ignora una de las tensiones principales para que el estado de las tensiones sea bidimensional. $\sigma_z=0$



Matriz de Rigidez: (Tensión plana)

$$[K]=\int_V [B]^T[D][B]dV = tA[B]^T[D]^*[B] \qquad *[D]^{Tensión\ plana}=\frac{E}{1-\upsilon^2}\begin{bmatrix}1 & \upsilon & 0\\ \upsilon & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\upsilon}{2}\end{bmatrix}$$

$$dV = dxdydz = tdxdy = tA = (espesor)(área)$$