Espacios de Hilbert

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Introducción

Nos ocupamos en este tema de dar una breve introducción a la teoría de espacios de Hilbert. Un *espacio de Hilbert* es un espacio vectorial dotado de un producto interior (lo que permite medir distancias) que como espacio métrico es completo.

Los espacios de Hilbert constituyen la generalización más inmediata a espacios de dimensión infinita de los espacios euclídeos finito-dimensionales. De hecho, la intuición geométrica desempeña un papel importante en muchos aspectos de su teoría: en ellos se puede hablar de ortogonalidad, y sus elementos están unívocamente determinados por sus coordenadas respecto a una base ortonormal, análogamente a lo que ocurre con las coordenadas cartesianas en el plano o en el espacio.

Los espacios de Hilbert surgen de modo natural y frecuente en matemáticas, física e ingeniería; son herramientas indispensables en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales, mecánica cuántica y procesamiento de señales.

2. Producto interior

2.1. Espacios con producto interior

Definición 2.1 *Un* espacio prehilbertiano*,* espacio pre-Hilbert*,* espacio con producto interior *o* espacio con producto escalar *es un espacio vectorial X sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K}$ denota $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) en el que está definida una aplicación $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$, llamada* producto interior *o* producto escalar*, satisfaciendo los siguientes axiomas:*

(P1) $\langle x,x\rangle \geq 0$; $\langle x,x\rangle = 0$ *si, y sólo si,* $x = 0$ $(x \in X)$;

(P2) $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$ $(x,y \in X)$;

(P3) $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$ $(\lambda \in \mathbb{K},\ x,y \in X)$;

(P4) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$ $(x,y,z \in X)$.

Como consecuencias inmediatas de esta definición, tenemos que:

(i) $\langle 0,x\rangle = \langle x,0\rangle = 0$ $(x \in X)$;

(ii) $\langle x,\lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x,y\rangle$ $(x,y \in X)$;

(iii) $\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$ $(x,y,z \in X)$.

Ejemplo 2.2 *(i) En el espacio vectorial real o complejo n-dimensional*

$$\mathbb{K}^n = \{x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) : \xi_i \in \mathbb{K}\ (1 \leq i \leq n)\},$$

donde las operaciones algebraicas (suma y producto por escalares) están definidas componente a componente, se obtiene un producto interior poniendo

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_i} \quad (x = (\xi_1, \ldots, \xi_n),\ y = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{K}^n).$$

(ii) En el espacio vectorial ℓ^2 de sucesiones de cuadrado absolutamente sumable,

$$\ell^2 = \left\{ x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} : x(n) \in \mathbb{K}\ (n \in \mathbb{N}),\ \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty \right\},$$

donde las operaciones algebraicas están definidas término a término, se obtiene un producto interior poniendo

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\overline{y(n)} \quad (x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty},\ y = \{y(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2).$$

(iii) En el espacio vectorial $L^2[a,b]$ de funciones medibles Lebesgue en el intervalo real $[a,b]$ con cuadrado integrable,

$$L^2[a,b] = \left\{ x : [a,b] \to \mathbb{K} \;\middle|\; x \text{ medible Lebesgue},\ \int_a^b |x(t)|^2\, dt < \infty \right\},$$

donde las operaciones algebraicas están definidas punto a punto, se obtiene un producto interior poniendo

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\, dt \quad (x, y \in L^2[a,b]).$$

Todo espacio con producto interior $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio normado si se define

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} \quad (x \in X). \tag{1}$$

En efecto, recordemos que (1) es una norma en X si satisface los siguientes axiomas:

(N1) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$ $(x \in X)$;

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ $(\lambda \in \mathbb{K},\ x \in X)$;

(N3) **(desigualdad triangular)** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $(x, y \in X)$.

Se comprueba inmediatamente que (1) verifica (N1) y (N2). El siguiente resultado permitirá establecer la desigualdad triangular (N3).

Proposición 2.3 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) *Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interior. Se verifica:*

$$|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\|y\| \quad (x,y \in X).$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $x,y \in X$. Si $y=0$, la desigualdad es trivial; supongamos, por tanto, $y \neq 0$. Para $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene:

$$0 \le \langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle = \|x\|^2 - \overline{\lambda}\langle x,y\rangle - \lambda\langle y,x\rangle + |\lambda|^2\|y\|^2 = \|x\|^2 - 2\Re(\overline{\lambda}\langle x,y\rangle) + |\lambda|^2\|y\|^2$$

(aquí, y en adelante, $\Re\zeta$ representará la parte real del número complejo ζ). Particularizando $\lambda = \|y\|^{-2}\langle x,y\rangle$ encontramos que

$$0 \le \|x\|^2 - 2\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2} = \|x\|^2 - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2},$$

de donde ya se sigue la conclusión deseada. □

Quedamos ahora en disposición de probar (N3). A tal fin, dados $x,y \in X$ aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz para obtener

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\Re\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2,$$

estimación de la que se infiere inmediatamente la conclusión requerida.

Todo espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ da lugar a un espacio métrico (X,d) (y, por tanto, a un espacio topológico), donde

$$d(x,y) = \|x-y\| \quad (x,y \in X). \tag{2}$$

En este contexto, que una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ converja a un vector $x \in X$ (simbólicamente, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$) significa que $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. Similarmente pueden contemplarse las nociones de sucesión de Cauchy, bola abierta, bola cerrada, continuidad, etc.

El siguiente resultado establece que el producto escalar y la norma son funciones continuas respecto de la métrica que ellos mismos definen.

Proposición 2.4 *Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interior. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones en X*

convergentes a $x, y \in X$, respectivamente, entonces:

(i) $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle$*;*

(ii) $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$.

DEMOSTRACIÓN. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y puesto que toda sucesión convergente está acotada, para cierta $M > 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \leq |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle| + |\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \\ &= |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \leq \|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\| \\ &\leq M\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\| \quad (n \in \mathbb{N}), \end{aligned}$$

con $\lim_{n\to\infty} \|y_n - y\| = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. Esto prueba (i).

Por otra parte, de la desigualdad triangular de la norma sigue que

$$0 \leq |\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\| \quad (n \in \mathbb{N}),$$

con $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. Esto prueba (ii). □

Nótese que la afirmación contenida en la Proposición 2.4 (ii) vale para espacios normados cualesquiera, no necesariamente prehilbertianos.

Definición 2.5 *Dado un espacio vectorial E sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, se dice que una topología τ sobre E es una* topología vectorial *y que (E, τ) es un* espacio vectorial topológico *si:*

(i) τ satisface el axioma de separación T_1 (esto es, los puntos son cerrados);

(ii) las operaciones algebraicas (suma y producto por escalares) de E son continuas cuando sobre E se considera la topología τ y sobre $\mathbb{K}$ la topología usual.

Puesto que toda aplicación continua de dos variables es continua en cada variable, de la definición anterior se sigue que, fijados $x \in E$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, las aplicaciones $T_x : E \to E$ (traslación) y $M_\lambda : E \to E$ (homotecia de razón λ), dadas por $T_x y = x + y$ y $M_\lambda y = \lambda y$ $(y \in E)$, son continuas. Si $\lambda \neq 0$, sus inversas respectivas son $T_x^{-1} = T_{-x}$ y $M_\lambda^{-1} = M_{\lambda^{-1}}$, y consecuentemente también son continuas. Se concluye que T_x y M_λ son homeomorfismos de E. En particular, toda topología vectorial es invariante por traslaciones y homotecias de razón no nula.

Teniendo en cuenta que los espacios métricos son T_2 (luego, T_1), la siguiente Proposición 2.6 establece que todo espacio normado y, por tanto, todo espacio con producto interior, es un espacio vectorial topológico.

Proposición 2.6 *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado,* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$, $x \in X$, $y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$, *tales que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda.$$

Se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n x_n = \lambda x.$$

DEMOSTRACIÓN. En efecto, basta advertir que, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cierta $M > 0$,

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\|,$$

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|(\lambda_n x_n - \lambda_n x) + (\lambda_n x - \lambda x)\| \leq |\lambda_n|\|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda|\|x\| \leq M\|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda|\|x\|,$$

con $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n - y\| = \lim_{n\to\infty} |\lambda_n - \lambda| = 0$. □

Hemos visto cómo definir una norma en un espacio con producto escalar. El siguiente resultado permite recuperar el producto escalar a partir de la norma.

Proposición 2.7 (Identidad de polarización) *En un espacio con producto interior* $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *se cumple:*

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left\{ \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i \left[\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2 \right] \right\} \quad (x, y \in X). \tag{3}$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $x, y \in X$. Se tiene:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\Re\langle x, y \rangle + \|y\|^2, \tag{4}$$

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\Re\langle x, y \rangle + \|y\|^2. \tag{5}$$

Restando miembro a miembro:

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\Re\langle x, y \rangle.$$

Reemplazando en esta expresión y por iy:

$$\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2 = 4\Re\langle x, iy \rangle = -4\Re(i\langle x, y \rangle) = 4\Im\langle x, y \rangle$$

(aquí, y en lo sucesivo, $\Im\zeta$ denotará la parte imaginaria del número complejo ζ). □

Caracterizamos ahora las normas que provienen de productos escalares.

Teorema 2.8 (Von Neumann-Jordan) *Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio con producto interior si, y sólo si, $\|\cdot\|$ satisface la* **ley del paralelogramo***:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (x, y \in X). \tag{6}$$

DEMOSTRACIÓN. Que toda norma proveniente de un producto interior verifica la ley del paralelogramo se sigue inmediatamente de (4) y (5). Recíprocamente, supongamos que en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se satisface la ley del paralelogramo, y para $x, y \in X$ definamos $\langle x, y\rangle$ como en (3). Probaremos que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interior en X que genera $\|\cdot\|$.

En efecto, se advierte por simple inspección que

$$\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle} \quad (x, y \in X),$$

y también que $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$. En particular, $\langle x, x\rangle \geq 0$ y $\langle x, x\rangle = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.

A continuación estableceremos que

$$\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \quad (x, y, z \in X).$$

A tal fin, sean $x, y, z \in X$. Se tiene:

$$\langle x+y, z\rangle = \frac{1}{4}\left\{\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 + i\left[\|x+y+iz\|^2 - \|x+y-iz\|^2\right]\right\},$$

$$\langle x, z\rangle = \frac{1}{4}\left\{\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + i\left[\|x+iz\|^2 - \|x-iz\|^2\right]\right\},$$

$$\langle y, z\rangle = \frac{1}{4}\left\{\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2 + i\left[\|y+iz\|^2 - \|y-iz\|^2\right]\right\}.$$

Por tanto, se ha de probar:

$$\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 = \|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2, \tag{7}$$

$$\|x+y+iz\|^2 - \|x+y-iz\|^2 = \|x+iz\|^2 - \|x-iz\|^2 + \|y+iz\|^2 - \|y-iz\|^2.$$

La segunda de estas identidades sigue de la primera sin más que reemplazar z por iz. En consecuencia, demostraremos sólo (7).

Puesto que $\|\cdot\|$ satisface la ley del paralelogramo, para $u,v \in X$ se verifica:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2). \tag{8}$$

Haciendo

$$u = \frac{x+y}{2}, \quad v = \frac{x+y}{2} + z$$

en (8), obtenemos:

$$\|x+y+z\|^2 + \|z\|^2 = 2\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{x+y}{2} + z\right\|^2.$$

Haciendo ahora

$$u = \frac{x+y}{2}, \quad v = z - \frac{x+y}{2}$$

en (8), resulta:

$$\|z\|^2 + \|x+y-z\|^2 = 2\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{x+y}{2} - z\right\|^2.$$

Restando miembro a miembro las dos expresiones anteriores:

$$\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 = \frac{1}{2}\|x+y+2z\|^2 - \frac{1}{2}\|x+y-2z\|^2. \tag{9}$$

Por último, aplicamos (8) sucesivamente a $u = x+z$, $v = y+z$ y a $u = x-z$, $v = y-z$, y restamos miembro a miembro las igualdades resultantes:

$$\|x+y+2z\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x+z\|^2 + 2\|y+z\|^2,$$

$$\|x+y-2z\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x-z\|^2 + 2\|y-z\|^2,$$

$$\|x+y+2z\|^2 - \|x+y-2z\|^2 = 2\|x+z\|^2 + 2\|y+z\|^2 - 2\|x-z\|^2 - 2\|y-z\|^2. \tag{10}$$

De (9) y (10) se concluye (7).

Nos ocupamos ahora de establecer la propiedad de homogeneidad:

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle \quad (\lambda \in \mathbb{K},\ x,y \in X). \tag{11}$$

Fijemos $x,y \in X$. Si $\lambda = n \in \mathbb{N}$, la propiedad de aditividad que acabamos de establecer entraña que

$$\langle nx, y\rangle = \langle x + \overset{(n)}{\cdots} + x, y\rangle = \langle x, y\rangle + \overset{(n)}{\cdots} + \langle x, y\rangle = n\langle x, y\rangle.$$

Si $\lambda = -1$, también por la aditividad:

$$\langle x, y\rangle + \langle -x, y\rangle = \langle 0, y\rangle = 0,$$

de modo que

$$\langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle.$$

Esto prueba (11) para $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Supongamos ahora que $\lambda \in \mathbb{Q}$, esto es, $\lambda = m/n$, con $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Entonces podemos escribir

$$n\left\langle \frac{m}{n}x, y\right\rangle = \langle mx, y\rangle = m\langle x, y\rangle,$$

lo que establece (11) también en este caso.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, existe una sucesión $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números racionales convergente a λ en $\mathbb{K}$. En virtud de las Proposiciones 2.6 y 2.4, encontramos que

$$\langle \lambda x, y\rangle = \langle \lim_{n\to\infty}(q_n x), y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle q_n x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} q_n\langle x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle.$$

Para completar la demostración es ya suficiente probar (11) cuando $\lambda = i$. Pero esto sigue de (3) por simple inspección. □

Observación 2.9 *La denominación de ley del paralelogramo que recibe (6) proviene del resultado de geometría plana elemental que expresa que* la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual al doble de la suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados, *el cual puede deducirse del teorema del coseno (Figura 1).*

Ejemplo 2.10 *Si $1 \le p < \infty$, se define*

$$\ell^p = \left\{x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} : x(n) \in \mathbb{K}\ (n \in \mathbb{N}),\ \|x\|_p < \infty\right\},$$

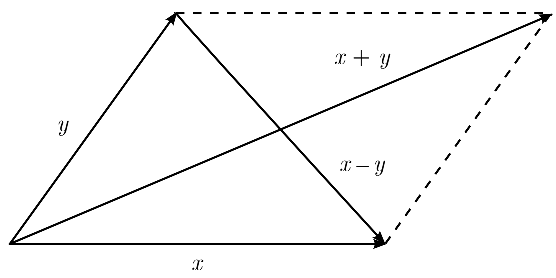

Figura 1. Ley del paralelogramo.

donde

$$\|x\|_p = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right\}^{1/p} \qquad (x \in \ell^p).$$

Entonces ℓ^p *es un espacio vectorial con las operaciones algebraicas definidas término a término, y* $\|\cdot\|_p$ *es una norma sobre* ℓ^p*. Pues bien, esta norma proviene de un producto interior si, y sólo si,* $p = 2$*. En efecto, el Ejemplo 2.2 (ii) muestra que* ℓ^2 *es un espacio con producto interior cuya norma asociada es* $\|\cdot\|_2$*, y el teorema de Von Neumann-Jordan obliga a que esta norma satisfaga la ley del paralelogramo. Recíprocamente, supongamos que* $\|\cdot\|_p$ *satisface la ley del paralelogramo. En particular,*

$$\|e_1 + e_2\|_p^2 + \|e_1 - e_2\|_p^2 = 2\left(\|e_1\|_p^2 + \|e_2\|_p^2\right),$$

donde, para cada $i \in \mathbb{N}$, $e_i = \{e_i(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *denota la i-ésima sucesión unitaria canónica de* ℓ^p*, dada por* $e_i(n) = 1$ *(*$n \in \mathbb{N}$*,* $n = i$*),* $e_i(n) = 0$ *(*$n \in \mathbb{N}$*,* $n \neq i$*). Ya que* $\|e_1 + e_2\|_p^2 = \|e_1 - e_2\|_p^2 = 2^{2/p}$ *y* $\|e_1\|_p^2 = \|e_2\|_p^2 = 1$*, debemos tener*

$$2^{2/p} = 2,$$

obligando a que $p = 2$*, como habíamos afirmado.*

2.2. Espacios de Hilbert

Definición 2.11 *Se dirá que un espacio con producto interior* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *es un* espacio de Hilbert *si el espacio métrico* (X, d) *es completo, donde d se define como en* (2) *y la norma de* (2) *está dada por* (1).

Recordemos que un espacio normado es un *espacio de Banach* si la métrica asociada a la norma es completa.

Ejemplo 2.12 *Todos los espacios con producto interior considerados en el Ejemplo 2.2 son espacios de Hil-*

bert.

Definición 2.13 *Una aplicación T entre dos espacios normados $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ sobre el mismo cuerpo escalar $\mathbb{K}$ se denomina* operador. *El operador T es* lineal *si $T(\lambda x + \mu y) = \lambda Tx + \mu Ty$ para cualesquiera escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y vectores $x, y \in E$, y es una* isometría *si $\|Tx\|_F = \|x\|_E$ para todo $x \in E$. Un operador lineal T se dice* acotado *si $\|T\|$ es finita, donde*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \ \|x\|_E \leq 1\}.$$

Finalmente, T es un isomorfismo *si T es lineal, biyectivo y bicontinuo (continuo con inverso continuo).*

Se comprueba fácilmente que un operador lineal $T : E \to F$ es continuo (en cualquier punto de E) si, y sólo si, lo es en el origen de E y que, a su vez, esto equivale a que T sea acotado.

Definición 2.14 *Un* isomorfismo de espacios pre-Hilbert *o* isomorfismo unitario *es una aplicación T de un espacio pre-Hilbert $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ en otro espacio pre-Hilbert $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ sobre el mismo cuerpo escalar $\mathbb{K}$ que es biyectiva, lineal y preserva el producto interior, esto es, satisface $\langle Tu, Tv\rangle_Y = \langle u, v\rangle_X$ $(u, v \in X)$.*

Todo espacio con producto interior admite una compleción como espacio de Hilbert que es única salvo isomorfismos unitarios. Más precisamente, se verifica el siguiente resultado, que enunciamos sin demostración:

Teorema 2.15 *Dado un espacio con producto interior $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, existen un espacio de Hilbert H y un isomorfismo unitario $T : X \to T(X) \subset H$ tal que $T(X)$ es denso en H. El espacio H es único salvo isomorfismos unitarios.*

Definición 2.16 *Un* subespacio *de un espacio prehilbertiano X es un subespacio vectorial de X provisto del producto escalar (y, por tanto, de la norma y la distancia) que hereda de X.*

No es difícil demostrar la siguiente:

Proposición 2.17 *Sea Y un subespacio de un espacio pre-Hilbert X. Se verifica:*

(i) Si X es un espacio de Hilbert entonces Y es completo si, y sólo si, Y es cerrado.

(ii) Si Y tiene dimensión finita, es completo.

3. Ortonormalidad

3.1. Sumas directas y complementos ortogonales

En un espacio métrico (X,d), la distancia δ de un elemento $x \in X$ a un conjunto no vacío $M \subset X$ se define como

$$\delta = \inf_{y \in M} d(x,y).$$

Por tanto, en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$,

$$\delta = \inf_{y \in M} \|x-y\|.$$

En la práctica, frecuentemente X es un determinado espacio de funciones (por ejemplo, el formado por las funciones continuas en un intervalo compacto) y M es un subconjunto de X constituido por funciones con un «buen comportamiento» (por ejemplo, polinomios). Es importante saber si existe un vector $\widetilde{y} \in M$ que minimiza la distancia a x, esto es, tal que $\delta = \|x - \widetilde{y}\|$; y, en caso de existir, si es único. Este constituye el llamado *problema de existencia y unicidad de la mejor aproximación a x desde M*.

Como ilustran las imágenes de la Figura 2, incluso en el caso elemental del plano euclídeo, puede que dicho problema carezca de solución, o que ésta no sea única. Cabe esperar que en espacios de dimensión infinita la situación resulte bastante más compleja. Afortunadamente, como veremos a continuación, en el caso de espacios de Hilbert todavía permanece «bajo control».

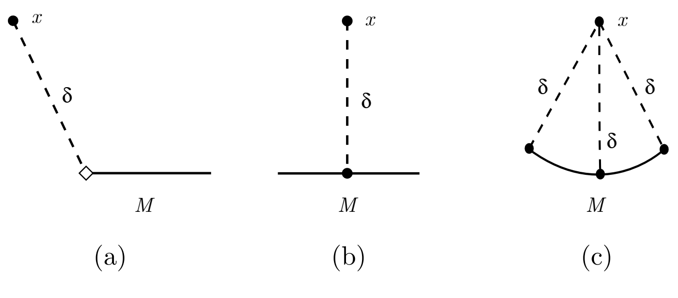

Figura 2. La mejor aproximación a x desde M: (a) no existe; (b) existe y es única; (c) existe y hay infinitas.

Definición 3.1 *El* segmento *que une dos elementos x, y de un espacio vectorial X se define como el conjunto de los vectores de la forma $x = \lambda x + (1-\lambda)y$ $(0 \leq \lambda \leq 1)$. Un conjunto $M \subset X$ se dice* convexo *si para cualesquiera $x, y \in M$, el segmento que une x con y está contenido en M.*

Ejemplo 3.2 *Las siguientes afirmaciones son de comprobación inmediata:*

(i) Todo subespacio es convexo.

(ii) La intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

Teorema 3.3 (Vector minimizante) *Todo conjunto convexo completo no vacío M de un espacio con producto interior X contiene un único elemento de norma mínima.*

DEMOSTRACIÓN. El conjunto $\{\|y\| : y \in M\}$ es no vacío y acotado inferiormente; por tanto, admite un ínfimo ρ. Por definición de ínfimo, existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|y_n\| = \rho$. Esta sucesión es de Cauchy en X, pues, por la ley del paralelogramo y la convexidad de M,

$$0 \leq \|y_n - y_m\|^2 = -4\left\|\frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 + 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 \leq -4\rho^2 + 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2,$$

donde el segundo miembro tiende a cero cuando $n,m \to \infty$. Al ser M completo, existe $\widetilde{y} \in M$ al que converge $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$; y por la continuidad de la norma (Proposición 2.4), $\|\widetilde{y}\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = \rho$. Esto prueba la afirmación de existencia.

Para establecer la unicidad, supongamos existen $\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2 \in M$ tales que $\|\widetilde{y}_1\| = \|\widetilde{y}_2\| = \rho$. Nuevamente por la ley del paralelogramo,

$$0 \leq \|\widetilde{y}_1 - \widetilde{y}_2\|^2 = -4\left\|\frac{\widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2}{2}\right\|^2 + 2\|\widetilde{y}_1\|^2 + 2\|\widetilde{y}_2\|^2 \leq -4\rho^2 + 4\rho^2 = 0,$$

probando que $\widetilde{y}_1 = \widetilde{y}_2$. □

Teorema 3.4 (Mejor aproximación) *Si X es un espacio con producto interior y M un subconjunto convexo, completo, no vacío de X, entonces para cada $x \in X$ existe una única mejor aproximación a x desde M, esto es, un único $\widetilde{y} \in M$ tal que*

$$\delta = \inf_{y \in M} \|x - y\| = \|x - \widetilde{y}\|.$$

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar el teorema del vector minimizante (Teorema 3.3) a $x - M$. □

Observación 3.5 *Las afirmaciones de existencia y unicidad del Teorema 3.3 dejan de verificarse si prescindimos de la convexidad. En efecto, en el espacio de Hilbert ℓ^2:*

(i) $M = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ no es convexo, es cerrado, y contiene infinitos elementos de norma mínima;

(ii) $M = \left\{ \left(1+k^{-1}\right) e_k \right\}_{k=1}^{\infty}$ *no es convexo, es cerrado, y no contiene elementos de norma mínima.*

Definición 3.6 *Sea* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio con producto interior. Se dice que dos vectores* $x, y \in X$ *son* ortogonales*, y se escribe* $x \perp y$*, si* $\langle x, y\rangle = 0$*. Dados* $x \in X$ *y* $M \subset X$*, la notación* $x \perp M$ *expresa que* x *es ortogonal a todos los vectores de* M*. Más en general, si* $M, N \subset X$ *son tales que* $x \perp y$ *cualesquiera sean* $x \in M$*,* $y \in N$*, diremos que* M *y* N *son* ortogonales*, y escribiremos* $M \perp N$*. Un conjunto* $M \subset X$ *se dice un* conjunto ortogonal *si sus elementos son ortogonales dos a dos.*

Teorema 3.7 (Pitágoras) *Sea* X *un espacio con producto interior. Si el conjunto* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *de vectores de* X *es ortogonal, entonces*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 .$$

DEMOSTRACIÓN. En efecto, se tiene:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{j=1}^{n} x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle x_i, x_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2,$$

como se afirmaba. □

Proposición 3.8 (Independencia lineal) *Todo conjunto ortogonal que no contiene al cero es linealmente independiente.*

DEMOSTRACIÓN. Basta probar el resultado para conjuntos ortogonales finitos. Supongamos que el conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es ortogonal y no contiene al cero, y sean $\lambda_i \in \mathbb{K}$ $(1 \le i \le n)$ tales que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$. Fijado $j \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le n$, podemos escribir:

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x_i, x_j\rangle = \lambda_j \|x_j\|^2.$$

Puesto que x_j no es el vector nulo, necesariamente $\lambda_j = 0$. □

Sabemos que en geometría plana elemental, el único vector de un subespacio M más próximo a un vector x dado se obtiene trazando la perpendicular a M por x. Este resultado admite generalización.

Proposición 3.9 *Si en el Teorema 3.4* M *es un subespacio, entonces* $z = x - \widetilde{y} \perp M$*.*

DEMOSTRACIÓN. Razonando por contradicción, supongamos existe $u \in M$ tal que $\langle z,u\rangle \neq 0$. En particular, $u \neq 0$, y para todo $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\|z-\lambda u\|^2 = \langle z-\lambda u, z-\lambda u\rangle = \|z\|^2 - 2\Re(\overline{\lambda}\langle z,u\rangle) + |\lambda|^2\|u\|^2.$$

Ya que $\|z\|$ es la distancia de x a M e $\widetilde{y}+\lambda u \in M$, particularizando $\lambda = \|u\|^{-2}\langle z,u\rangle$ resulta

$$\|z\|^2 \leq \|x-(\widetilde{y}+\lambda u)\|^2 = \|z-\lambda u\|^2 = \|z\|^2 - \frac{|\langle z,u\rangle|^2}{\|u\|^2} < \|z\|^2,$$

que es la contradicción esperada. □

A continuación aplicaremos los resultados anteriores al cálculo de la mejor aproximación a un punto desde un subespacio de dimensión finita, por tanto completo (Proposición 2.17), en un espacio prehilbertiano X.

Supongamos que M es el subespacio de X generado por n vectores linealmente independientes $\{v_1,\ldots,v_n\}$, y sea $x \in X$. Se trata de determinar la mejor aproximación a x desde M, que existe en virtud del teorema de mejor aproximación (Teorema 3.4). Si $\widetilde{y} \in M$ denota esta mejor aproximación, necesariamente $\widetilde{y} = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ para ciertos escalares λ_i ($i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$), y además $z = x-\widetilde{y} \perp M$, por la Proposición 3.9. Imponiendo ambas condiciones resulta el siguiente sistema lineal de n ecuaciones en las n incógnitas λ_i ($i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$):

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \langle v_i, v_j\rangle = \langle x, v_j\rangle \quad (j \in \mathbb{N},\ 1 \leq j \leq n),$$

que debe ser compatible determinado, puesto que el problema de mejor aproximación admite solución única. Ahora, la distancia δ de x a M se puede obtener a partir del siguiente cálculo:

$$\delta^2 = \|z\|^2 = \langle x-\widetilde{y}, x-\widetilde{y}\rangle = \langle x, x-\widetilde{y}\rangle = \|x\|^2 - \langle x,\widetilde{y}\rangle = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \overline{\lambda}_i \langle x, v_i\rangle.$$

Ejemplo 3.10 *Sea el vector* $v = (1,2,1+i,-4)$ *del espacio de Hilbert* $\mathbb{C}^4$ *(Ejemplo 2.2 (i)), y considérese el subespacio* M *de* $\mathbb{C}^4$ *generado por los vectores* $(0,1,0,0)$ *y* $(0,0,0,1)$*. Hallar la distancia de* v *a* M*.*

RESOLUCIÓN. Formamos el sistema

$$a\langle v_1, v_1\rangle + b\langle v_2, v_1\rangle = \langle v, v_1\rangle,$$

$$a\langle v_1, v_2\rangle + b\langle v_2, v_2\rangle = \langle v, v_2\rangle.$$

Ya que $\langle v_1, v_1\rangle = 1$, $\langle v_2, v_1\rangle = \langle v_1, v_2\rangle = 0$, $\langle v_2, v_2\rangle = 1$, $\langle v, v_1\rangle = 2$, $\langle v, v_2\rangle = -4$, la solución del sistema anterior es $a = 2$, $b = -4$. Así pues, la mejor aproximación a v desde M es el vector $w = a(0,1,0,0) + b(0,0,0,1) = (0,2,0,-4)$. Por otra parte, si δ denota la distancia de v a M, entonces

$$\delta^2 = \|v\|^2 - \overline{a}\langle v, v_1\rangle - \overline{b}\langle v, v_2\rangle = 23 - 4 - 16 = 3.$$

Se concluye que $\delta = \sqrt{3}$. □

Definición 3.11 *Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interior. Dado $M \subset X$, el conjunto*

$$M^{\perp} = \{z \in X : z \perp M\} = \{z \in X : \langle z, x\rangle = 0 \ (x \in M)\}$$

se llama anulador *de M. Si $M = \{x\}$ $(x \in X)$ es un conjunto unitario, su anulador será denotado $x^{\perp}$.*

En el caso de que X sea un espacio de Hilbert y M un subespacio cerrado de X, $M^{\perp}$ se denomina *complemento ortogonal* de M. Esta denominación queda justificada por la Definición 3.12 y el Teorema 3.13.

Definición 3.12 *Se dice que un espacio vectorial X es* suma directa *de sus subespacios Y y Z, y se escribe $X = Y \oplus Z$, si cada $x \in X$ puede ser expresado de forma única como suma de un elemento $y \in Y$ y otro $z \in Z$. En tal caso se dice también que Z (respectivamente, Y) es un* complemento algebraico *de Y (respectivamente, Z) en X, que Y (respectivamente, Z) es un* subespacio complementado *en X, y que Y, Z es un* par complementario *de subespacios de X.*

Teorema 3.13 (Proyección ortogonal) *Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H. Entonces $H = M \oplus M^{\perp}$. Más precisamente:*

(i) Todo $x \in H$ admite una descomposición única $x = Px + Qx$ como suma de $Px \in M$ y $Qx \in M^{\perp}$.

(ii) Px y Qx son las mejores aproximaciones a $x \in H$ desde M y $M^{\perp}$, respectivamente.

(iii) $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2 \quad (x \in H)$.

DEMOSTRACIÓN. Como H es completo, M también lo es (Proposición 2.17), y, por tanto (Teorema 3.4 y Proposición 3.9), dado $x \in H$ existe $Px \in M$ tal que $x = Px + Qx$, con $Qx = x - Px \in M^{\perp}$. La unicidad de esta representación sigue de ser $M \cap M^{\perp} = \{0\}$. Esto prueba (i), y el teorema de Pitágoras establece entonces (iii).

Para demostrar (ii) sólo resta justificar que Qx es la mejor aproximación a x desde $M^{\perp}$. A tal fin, basta observar que

$$\|x-z\|^2 = \|Px+(Qx-z)\|^2 = \|Px\|^2+\|Qx-z\|^2 \quad (z \in M^{\perp})$$

es mínimo cuando $z = Qx$. □

Definición 3.14 *Un operador P de un espacio normado E en un subespacio F de E es una* proyección *si P es lineal, sobre e idempotente (es decir, verifica $P^2 = P$).*

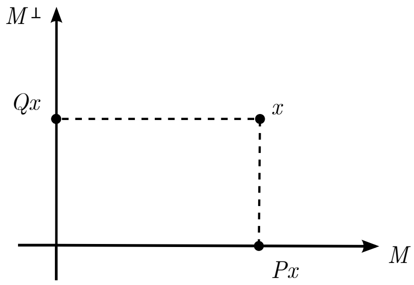

Figura 3. Teorema de la proyección ortogonal.

En la notación utilizada en la demostración del Teorema 3.13, la ecuación $x = Px+Qx$ define sendas aplicaciones $P : H \to M$, $Q : H \to M^{\perp}$, que se denominan *proyecciones ortogonales* de H sobre M y $M^{\perp}$, respectivamente. Se dice que Px (respectivamente, Qx) es la *proyección ortogonal* de x sobre M (respectivamente, $M^{\perp}$); esta terminología viene motivada por la situación que se presenta en geometría elemental con la proyección de un punto sobre los ejes cartesianos (Figura 3). Es fácil comprobar que P y Q son proyecciones en el sentido de la Definición 3.14. También es claro que la restricción de P a M (respectivamente, de Q a $M^{\perp}$) es el operador identidad, y que su restricción a $M^{\perp}$ (respectivamente, M) es el operador nulo. En particular:

Proposición 3.15 *El complemento ortogonal $M^{\perp}$ de un subespacio cerrado M de un espacio de Hilbert H es el núcleo de la proyección ortogonal P de H sobre M.*

Proposición 3.16 *Sea X un espacio pre-Hilbert y sea M un subconjunto no vacío de X. Se tiene que $M^{\perp}$ es un subespacio cerrado de X. Además, $M \subset M^{\perp\perp}$. Si X es Hilbert entonces $M^{\perp\perp}$ coincide con el subespacio cerrado generado por M (es decir, $M^{\perp\perp}$ es la clausura del subespacio generado por M).*

DEMOSTRACIÓN. Los axiomas del producto escalar garantizan que $M^{\perp}$ es un subespacio. Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M^{\perp}$, $x \in X$ tales que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Por la Proposición 2.4, para cada $z \in M$ se verifica que $\langle x,z\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x_n,z\rangle = 0$; luego, $x \in M^{\perp}$, y $M^{\perp}$ es cerrado.

La inclusión $M \subset M^{\perp\perp}$ es obvia.

En caso de que X sea completo y M un subespacio cerrado se tiene $X = M \oplus M^{\perp} = M^{\perp} \oplus M^{\perp\perp}$, por el Teorema 3.13. Si $x \in M^{\perp\perp}$ entonces $x = u + v$, con $u \in M$ y $v \in M^{\perp}$. Pero $x - u \in M^{\perp\perp}$ y $v \in M^{\perp}$ implica $x = u \in M$, así que $M^{\perp\perp} \subset M$.

En general, si X es completo y S es el subespacio cerrado generado por M, las propiedades del producto escalar junto con la Proposición 2.4 entrañan que $M^{\perp} = S^{\perp}$, y de la discusión precedente se infiere que $M^{\perp\perp} = S^{\perp\perp} = S$. □

Definición 3.17 *Un subconjunto M de un espacio normado E es* total *en E si el subespacio generado por M es denso en E.*

Proposición 3.18 (Conjunto total) *Supongamos que H es un espacio de Hilbert y M un subconjunto no vacío de H. Se verifica que M es total en H si, y sólo si, $M^{\perp} = \{0\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea S el subespacio cerrado generado por M. Entonces $M^{\perp} = S^{\perp}$ y $H = S \oplus S^{\perp}$. Por tanto, $H = S$ si, y sólo si, $M^{\perp} = S^{\perp} = \{0\}$. □

3.2. Conjuntos ortonormales

Definición 3.19 *Un* conjunto ortonormal *$S = \{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ en un espacio con producto interior X es un conjunto ortogonal de vectores unitarios. Si $x \in X$, el α-*ésimo coeficiente de Fourier *de x respecto de S es el escalar $\langle x, e_\alpha \rangle$ $(\alpha \in A)$.*

Teorema 3.20 (Desigualdad de Bessel) *Sea $S = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión ortonormal en un espacio con producto interior X. Se tiene:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (x \in X).$$

DEMOSTRACIÓN. Fijados $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, sea $s_n = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$. En virtud del teorema de Pitágoras,

$$\|s_n\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

Consecuentemente:

$$0 \quad \leq \quad \|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - 2\Re\langle x, s_n \rangle + \|s_n\|^2 = \|x\|^2 - 2\Re\left\langle x, \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \right\rangle + \|s_n\|^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \Re(\overline{\langle x,e_i\rangle}\langle x,e_i\rangle) + \|s_n\|^2 = \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} |\langle x,e_i\rangle|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\langle x,e_i\rangle|^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x,e_i\rangle|^2.
\end{aligned}
$$

Se desprende que

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle x,e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

y basta tomar límite cuando $n \to \infty$ para obtener la desigualdad enunciada. □

Teorema 3.21 (Convergencia) *Sea $S = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert H, y sea $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) **(Riesz-Fischer)** *La serie $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i$ converge en H si, y sólo si, $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 < \infty$. En tal caso,*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2. \tag{12}$$

(ii) Si la serie $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i$ converge en H, entonces $\lambda_i = \langle x,e_i\rangle$ $(i \in \mathbb{N})$.

(iii) Para cada $x \in H$, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \langle x,e_i\rangle e_i$ converge en H.

DEMOSTRACIÓN. Para probar (i), pongamos $s_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ $(n \in \mathbb{N})$. Si $m,n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, el teorema de Pitágoras entraña:

$$\|s_n - s_m\|^2 = \left\| \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=n+1}^{m} |\lambda_i|^2.$$

Por tanto, la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge (equivalentemente, es de Cauchy) en H si, y sólo si, converge la serie $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2$. Además, otra vez por el teorema de Pitágoras,

$$\|s_n\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Haciendo aquí $n \to \infty$ se concluye (12).

La validez de (ii) es consecuencia inmediata de la linealidad y continuidad del producto escalar en la primera componente.

En virtud de (i), para establecer (iii) es suficiente probar que $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x,e_i\rangle|^2 < \infty$. Pero esto se deduce de la desigualdad de Bessel. □

La serie que comparece en la parte (iii) del Teorema 3.21 se denomina *serie de Fourier* de x respecto de S (cf. Definición 3.24).

Observación 3.22 *En relación con el Teorema 3.21 hacemos notar que, a menos que S sea un sistema ortonormal maximal de H (Teorema 3.26), la serie de Fourier de x respecto de S no tiene por qué converger a x. A modo de ejemplo, considérese la serie $\sum_{i=1}^{\infty}\langle e_1, e_{2i}\rangle e_{2i}$ en ℓ^2, donde e_i denota la i-ésima sucesión unitaria canónica de ℓ^2 ($i \in \mathbb{N}$).*

Proposición 3.23 *Sea X un espacio con producto interior. Entonces todo $x \in X$ tiene a lo sumo una cantidad numerable de coeficientes de Fourier no nulos respecto a cualquier familia ortonormal en X. Si X es un espacio de Hilbert, la correspondiente serie de Fourier de x es incondicionalmente convergente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $S = \{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia ortonormal en X, y fijemos $x \in X$. Pongamos

$$A_0 = \{\alpha \in A : \langle x, e_\alpha\rangle \neq 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{\alpha \in A : |\langle x, e_\alpha\rangle| \geq \frac{1}{m}\right\}.$$

Si $m \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$ denota la parte entera de $m^2\|x\|^2$, necesariamente A_m contiene a lo sumo n elementos. En efecto, supongamos que A_m contuviese al menos $n+1$ elementos $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}\}$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n+1} |\langle x, e_{\alpha_i}\rangle|^2 \geq \frac{n+1}{m^2} > \|x\|^2,$$

en contradicción con la desigualdad de Bessel. Por tanto, A_0 es numerable.

Supongamos ahora que X es un espacio de Hilbert, y sea $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ una enumeración de los elementos de S que proporcionan los coeficientes de Fourier no nulos de x respecto de S. En virtud del Teorema 3.21, la correspondiente serie de Fourier de x converge en X. Sea $u = \sum_{i=1}^{\infty}\langle x, e_i\rangle e_i$.

Para probar que la convergencia es incondicional, consideremos una reordenación $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ de $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, de modo que existe una aplicación biyectiva de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que a cada $i \in \mathbb{N}$ le hace corresponder $j(i) \in \mathbb{N}$, con $w_{j(i)} = e_i$ ($i \in \mathbb{N}$). Pongamos $v = \sum_{j=1}^{\infty}\langle x, w_j\rangle w_j$. Por el Teorema 3.21, $\langle u, e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle$ ($i \in \mathbb{N}$) y $\langle v, w_j\rangle = \langle x, w_j\rangle$ ($j \in \mathbb{N}$). Luego,

$$\langle u - v, e_i\rangle = \langle u, e_i\rangle - \langle v, e_i\rangle = \langle u, e_i\rangle - \langle v, w_{j(i)}\rangle = \langle x, e_i\rangle - \langle x, w_{j(i)}\rangle = \langle x, e_i\rangle - \langle x, e_i\rangle = 0 \quad (i \in \mathbb{N}),$$

y, similarmente,

$$\langle u - v, w_j\rangle = 0 \quad (j \in \mathbb{N}).$$

Entonces

$$\|u-v\|^2 = \left\langle u-v, \sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle e_i - \sum_{j=1}^{\infty}\langle x,w_j\rangle w_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\overline{\langle x,e_i\rangle}\langle u-v,e_i\rangle - \sum_{j=1}^{\infty}\overline{\langle x,w_j\rangle}\langle u-v,w_j\rangle = 0,$$

probando que $u=v$. □

Definición 3.24 *La Proposición 3.23 permite dar sentido a la expresión formal* $\sum_{\alpha\in A}\langle x,e_\alpha\rangle e_\alpha$ *para cualquier* $x\in H$ *y cualquier sistema ortonormal* $S=\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *(no necesariamente numerable) en un espacio de Hilbert* H*, expresión a la que denominaremos* serie de Fourier *de* x *respecto de* S.

3.3. Bases ortonormales

Definición 3.25 *Una* base ortonormal *en un espacio de Hilbert* H *es un conjunto ortonormal maximal.*

Teorema 3.26 (Bases ortonormales) *Sea* $S=\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *un conjunto ortonormal en un espacio de Hilbert* H*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *S es base ortonormal.*

(ii) **(Serie de Fourier)** *Todo* $x\in H$ *se puede expresar como suma de su serie de Fourier respecto de* S*:*

$$x = \sum_{\alpha\in A}\langle x,e_\alpha\rangle e_\alpha.$$

(iii) **(Identidad de Parseval)** *Para todo* $x\in H$, $\|x\|^2=\sum_{\alpha\in A}|\langle x,e_\alpha\rangle|^2$.

(iv) **(Identidad de Parseval)** *Para cualesquiera* $x,y\in H$, $\langle x,y\rangle=\sum_{\alpha\in A}\langle x,e_\alpha\rangle\overline{\langle y,e_\alpha\rangle}$.

(v) $S^\perp=\{0\}$.

(vi) *S es total en H.*

DEMOSTRACIÓN. Para ver que (i) implica (ii), pongamos $y=x-\sum_{\alpha\in A}\langle x,e_\alpha\rangle e_\alpha$; se trata de probar que $y=0$. Ahora bien, fijado $\beta\in A$,

$$\langle y,e_\beta\rangle = \left\langle x-\sum_{\alpha\in A}\langle x,e_\alpha\rangle e_\alpha, e_\beta\right\rangle = \langle x,e_\beta\rangle - \sum_{\alpha\in A}\langle x,e_\alpha\rangle\langle e_\alpha,e_\beta\rangle = \langle x,e_\beta\rangle - \langle x,e_\beta\rangle = 0.$$

Si $y\neq 0$, el vector $u=\|y\|^{-1}y$ es unitario y ortogonal a S; por tanto, $S\cup\{u\}$ es un conjunto ortonormal que contiene propiamente a S, contradiciendo la maximalidad de S. Concluimos que $y=0$.

Por la continuidad (Proposición 2.4) y la linealidad (conjugada) del producto escalar en la primera (segunda) componente, es claro que (ii) implica (iv), y resulta obvio (tomando $x = y$) que (iv) implica (iii). Nótese que (ii) implica (iii) también como consecuencia del Teorema 3.21.

Por otra parte, (iii) implica (v), ya que si $x \in S^{\perp}$ entonces $\langle x, e_\alpha \rangle = 0$ $(\alpha \in A)$, y si se verifica (iii), necesariamente $x = 0$.

La equivalencia de (v) y (vi) es consecuencia de la Proposición 3.18.

Finalizamos la demostración estableciendo que (v) implica (i): si S no es maximal entonces existe un vector unitario ortogonal a S, así que $S^{\perp} \neq \{0\}$. □

Recordemos que un conjunto arbitrario se dice *parcialmente ordenado* si está dotado de una relación binaria reflexiva, antisimétrica y transitiva, y *totalmente ordenado* si esta relación es, además, conexa. El principio de maximalidad de Hausdorff establece que *todo conjunto no vacío parcialmente ordenado contiene uno maximal totalmente ordenado*.

Teorema 3.27 *Todo conjunto ortonormal de un espacio de Hilbert no trivial está contenido en una base ortonormal. En particular, todo espacio de Hilbert no trivial admite una base ortonormal.*

DEMOSTRACIÓN. Si $H \neq \{0\}$ es un espacio de Hilbert, entonces H contiene un vector unitario u. El conjunto $\{u\}$ es ortonormal.

Sean ahora B cualquier conjunto ortonormal en H y $\mathscr{P}$ la familia de todos los conjuntos ortonormales en H que contienen a B. Ya que $\mathscr{P}$ no es vacía (pues contiene al propio B) y está ordenada parcialmente por la inclusión, el principio de maximalidad de Hausdorff obliga a que $\mathscr{P}$ contenga una subfamilia totalmente ordenada maximal Ω. Llamando U a la unión de todos los elementos de Ω encontramos que U es un conjunto ortonormal (pues Ω está totalmente ordenada) que contiene a B. Además, U es maximal; pues si no lo fuese existiría un vector unitario $v \in U^{\perp}$, de modo que $\widetilde{U} = U \cup \{v\}$ sería un conjunto ortonormal que contiene a B y $\Omega \cup \{\widetilde{U}\}$ constituiría una subfamilia totalmente ordenada de $\mathscr{P}$ que contiene propiamente a Ω, contradiciendo la maximalidad de Ω. □

Proposición 3.28 *Dos bases ortonormales cualesquiera de un espacio de Hilbert no trivial tienen el mismo cardinal.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\{v_\beta\}_{\beta \in B}$ dos bases ortonormales de un espacio de Hilbert $H \neq \{0\}$.

Si A ó B son finitos el resultado es trivial, teniendo en cuenta que en este caso toda base ortonormal constituye una base de Hamel (es decir, un sistema linealmente independiente y generador).

Supongamos, por tanto, que A y B son ambos infinitos, y fijado $\alpha \in A$ consideremos el conjunto $B_{u_\alpha} = \{\beta \in B : \langle u_\alpha, v_\beta \rangle \neq 0\}$, que es numerable. Afirmamos que para cada $\beta \in B$, existe $\alpha \in A$ tal que $\beta \in B_{u_\alpha}$. En efecto, si existiera $\beta \in B$ tal que $\beta \notin B_{u_\alpha}$ para todo $\alpha \in A$, entonces $\langle u_\alpha, v_\beta \rangle = 0$ $(\alpha \in A)$; y como $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es base ortonormal, necesariamente $v_\beta = 0$, una contradicción. Ahora

$$B \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_{u_\alpha},$$

de manera que el cardinal de B no supera el producto del cardinal de A por $\aleph_0$, que es igual al cardinal de A. Por simetría, el cardinal de A no supera al cardinal de B, y se concluye del teorema de Schröder-Bernstein que A y B tienen el mismo cardinal. □

Definición 3.29 *Se llama* dimensión ortogonal *o* dimensión hilbertiana *de un espacio de Hilbert $H \neq \{0\}$, y se denota* $\dim_\perp H$*, al cardinal de una cualquiera de sus bases ortonormales. Si $H = \{0\}$, diremos que* $\dim_\perp H = 0$.

3.4. Isomorfismos de espacios de Hilbert

Dado un conjunto arbitrario A, definimos

$$\ell^2(A) = \left\{ \varphi : A \to \mathbb{K} \mid \int_A |\varphi(\alpha)|^2 d\mu(\alpha) < \infty \right\},$$

donde μ es la medida cardinal sobre A.

Fijada $\varphi \in \ell^2(A)$, el conjunto $B_\varphi = \{\alpha \in A : \varphi(\alpha) \neq 0\}$ es a lo sumo numerable. Comprobaremos esta afirmación demostrando que para cada $m \in \mathbb{N}$, el conjunto $A_m = \{\alpha \in A : |\varphi(\alpha)| \geq 1/m\}$ es finito. En efecto, fijado $m \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{m^2}\mu(A_m) = \frac{1}{m^2}\int_{A_m} d\mu \leq \int_{A_m} |\varphi(\alpha)|^2 d\mu(\alpha) \leq \int_A |\varphi(\alpha)|^2 d\mu(\alpha) < \infty.$$

Si $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ es una enumeración de B_φ entonces

$$\int_A |\varphi(\alpha)|^2 d\mu(\alpha) = \sum_{n=1}^\infty |\varphi(\alpha_n)|^2,$$

donde la serie del segundo miembro es incondicionalmente convergente.

Se obtiene una estructura de espacio de Hilbert sobre $\ell^2(A)$ si se define

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_A \varphi(\alpha)\overline{\psi(\alpha)}d\mu(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\alpha_n)\overline{\psi(\alpha_n)} \quad (\varphi, \psi \in \ell^2(A)).$$

Aquí, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una enumeración de $B_\varphi \cap B_\psi$. Una base ortonormal de $\ell^2(A)$ está constituida por las funciones e_α $(\alpha \in A)$, donde $e_\alpha(\beta) = 1$ si $\alpha = \beta$ y $e_\alpha(\beta) = 0$ en otro caso $(\beta \in A)$. Llamaremos a esta base la *base ortonormal canónica* de $\ell^2(A)$.

En este nuevo contexto, los Teoremas 3.21 y 3.26 proporcionan el siguiente:

Teorema 3.30 *Si H es un espacio de Hilbert y $S = \{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una base ortonormal en H, la función $\widehat{\cdot} : H \to \ell^2(A)$ que aplica x en $\widehat{x}$, donde $\widehat{x} : A \to \mathbb{K}$ está dada por $\widehat{x}(\alpha) = \langle x, e_\alpha \rangle$, es un isomorfismo de espacios de Hilbert.*

DEMOSTRACIÓN. La desigualdad de Bessel prueba que $\widehat{\cdot}$ está bien definida. Esta aplicación es claramente lineal. El Teorema 3.21 establece que es suprayectiva. Que preserva el producto escalar (y, por tanto, es isometría, luego también inyectiva) es consecuencia de la identidad de Parseval. □

Definición 3.31 *La aplicación $\widehat{\cdot}$ en el Teorema 3.30 se llama* transformación de Fourier. *Para cada $x \in H$, $\widehat{x}$ se denomina* transformada de Fourier *de x.*

Corolario 3.32 *Dos espacios de Hilbert son unitariamente isomorfos si, y sólo si, tienen la misma dimensión ortogonal.*

Se sigue del Corolario 3.32 que todo espacio de Hilbert está completamente determinado por un único cardinal, su dimensión hilbertiana, y de hecho es indistinguible de algún $\ell^2(A)$.

4. Series trigonométricas

Sea $\mathbb{T}$ la circunferencia unidad del plano complejo, esto es, el conjunto de todos los números complejos de módulo 1. Identificando $e^{it} \in \mathbb{T}$ con $t \in [-\pi, \pi]$, para $1 \le p < \infty$ definimos $L^p(\mathbb{T})$ como la clase de todas las funciones complejas, medibles Lebesgue sobre $[-\pi, \pi]$ para las que la norma

$$\|f\|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt \right\}^{1/p}$$

es finita; es decir, $L^p(\mathbb{T})$ es el espacio de Lebesgue de orden p respecto de la medida de Lebesgue normalizada en $[-\pi,\pi]$. Similarmente, por $L^\infty(\mathbb{T})$ denotaremos la clase de todas las funciones complejas, medibles Lebesgue y esencialmente acotadas sobre $[-\pi,\pi]$ con la norma del supremo esencial, mientras que $C(\mathbb{T})$ representará el espacio de todas las funciones complejas continuas sobre $[-\pi,\pi]$ con la norma del supremo.

El espacio $L^2(\mathbb{T})$ es un espacio de Hilbert respecto del producto escalar

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt \quad (f,g\in L^2(\mathbb{T})).$$

Si definimos $e_n(t)=e^{int}$ $(n\in\mathbb{Z},\ t\in[-\pi,\pi])$, se demuestra que $U=\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T})$, llamada *sistema trigonométrico*.

Para cada $f\in L^2(\mathbb{T})$, el n-ésimo coeficiente de Fourier de f respecto de U viene dado por

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt \quad (n\in\mathbb{Z}), \tag{13}$$

la serie de Fourier de f es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)e_n,$$

y la N-ésima suma parcial de esta serie es

$$s_N = \sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}(n)e_n \quad (N\in\mathbb{N}_0).$$

El teorema de caracterización de bases ortonormales permite afirmar que $\lim_{N\to\infty}\|s_N-f\|_2=0$. El teorema de Riesz-Fischer asegura que si $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\subset\mathbb{C}$ y

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2<\infty,$$

entonces existe $f\in L^2(\mathbb{T})$ tal que $c_n=\widehat{f}(n)$ $(n\in\mathbb{Z})$. La identidad de Parseval expresa que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)} \quad (f,g\in L^2(\mathbb{T})).$$

Como vimos en la sección anterior, todos estos resultados se resumen diciendo que la transformación de Fourier $f\mapsto\widehat{f}$ es un isomorfismo unitario entre $L^2(\mathbb{T})$ y $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Nótese que la integral (13) tiene sentido cuando $f\in L^1(\mathbb{T})$. De hecho, ya que $C(T)\subset L^p(\mathbb{T})\subset L^1(\mathbb{T})$ $(1\le p\le\infty)$, (13) tiene sentido para toda $f\in L^p(\mathbb{T})$ $(1\le p\le\infty)$ y toda $f\in C(\mathbb{T})$. Denotando por B uno cualquiera de estos espacios, surgen inmediatamente dos problemas relativos a las correspondientes series de Fourier: el de convergencia (la serie de Fourier de $f \in B$, ¿converge en la norma de B?, ¿converge c.t.p.?), y el de representación (si converge, ya sea en norma o c.t.p., ¿es f su límite?).

A continuación resumimos el estado de esta cuestión.

En relación con los problemas de convergencia y representación c.t.p.:

- P. Du Bois-Reymond (1873) da un ejemplo de función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto al menos. Casi un siglo después, J.-P. Kahane y Y. Katznelson (1965) probaron que fijado cualquier conjunto de medida nula, es posible definir una función continua cuya serie de Fourier diverge en todo punto de ese conjunto y converge fuera de él.
- N. Lusin (1913) conjetura que la serie de Fourier de una función $f \in L^2(\mathbb{T})$ converge c.t.p.
- A.N. Kolmogorov (1926) demuestra que existe una función $f \in L^1(\mathbb{T})$ cuya serie de Fourier diverge en todo punto.
- L. Carleson (1965, medio siglo después de ser enunciada) logra probar la conjetura de Lusin. Carleson fue galardonado con el premio Abel 2006 por su trayectoria científica, pero indudablemente su nombre va unido, sobre todo, a este logro.
- R. Hunt (1967) extendió el resultado de Carleson hasta cubrir el rango $1 < p \leq \infty$.

En relación con los problemas de convergencia y representación en norma:

- S. Banach y H. Steinhaus (1918) prueban que no hay convergencia en $L^1(\mathbb{T})$. De hecho, este resultado puede deducirse del principio de acotación uniforme que lleva el nombre de ambos matemáticos.
- M. Riesz (1923) establece la convergencia en $L^p(\mathbb{T})$, para $1 < p < \infty$.
- Los resultados de Du Bois-Reymond o de Kahane-Katznelson ya mencionados entrañan la imposibilidad de la convergencia uniforme.

5. Polinomios ortogonales

La teoría de espacios de Hilbert encuentra aplicación en diversas áreas del análisis. Resumimos en esta sección la forma de obtener sucesiones de polinomios ortogonales que aparecen frecuentemente en la resolución de numerosos problemas prácticos de la teoría de ecuaciones diferenciales (muy especialmente la teoría de Sturm-Liouville), la teoría de la aproximación de funciones y la mecánica cuántica.

5.1. Polinomios de Legendre

En el espacio de Hilbert $L^2[-1,1]$ respecto del producto escalar usual se considera la familia linealmente independiente $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$, con $v_i(t) = t^i$ $(i \in \mathbb{N}_0)$. Aplicando a esta familia el *proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt* resulta el sistema ortonormal $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$, donde

$$e_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(t) \quad (t \in [-1,1],\ n \in \mathbb{N}_0)$$

y P_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ es el n-ésimo *polinomio de Legendre*, dado por

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} \left[(t^2-1)^n\right] = \sum_{j=0}^{N} (-1)^j \frac{(2n-2j)!}{2^n j!(n-j)!(n-2j)!} t^{n-2j} \quad (t \in [-1,1],\ n \in \mathbb{N}_0);$$

aquí, $N = n/2$ si n es par y $N = (n-1)/2$ si n es impar.

Se demuestra que los polinomios de Legendre satisfacen la *ecuación diferencial de Legendre*

$$(1-t^2)P_n''(t) + 2tP_n'(t) + n(n+1)P_n(t) = 0 \quad (t \in [-1,1],\ n \in \mathbb{N}_0).$$

Poniendo

$$p_n(t) = P_n\left(1 + 2\frac{t-b}{b-a}\right), \quad Q_n(t) = \frac{p_n(t)}{\|p_n\|_2} \quad (t \in [a,b],\ n \in \mathbb{N}_0)$$

se obtiene una base ortonormal $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ de $L^2[a,b]$ para cualquier intervalo compacto $[a,b]$.

5.2. Polinomios de Laguerre

En el espacio de Hilbert $L^2[0,\infty[$ respecto del producto escalar usual se considera la familia linealmente independiente $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$, con $v_i(t) = t^i e^{-t/2}$ $(t \in [0,\infty[,\ i \in \mathbb{N}_0)$. Aplicando a esta familia el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt resulta el sistema ortonormal $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$, donde

$$e_n(t) = e^{-t/2} L_n(t) \quad (t \in [0,\infty[,\ n \in \mathbb{N}_0)$$

y L_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ es el n-ésimo *polinomio de Laguerre*, dado por

$$L_0(t) = 1, \quad L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \left(t^n e^{-t}\right) \quad (t \in [0,\infty[,\ n \in \mathbb{N}_0);$$

es decir,

$$L_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} \binom{n}{j} t^j \quad (t \in [0,\infty[,\ n \in \mathbb{N}_0).$$

Se demuestra que los polinomios de Laguerre satisfacen la *ecuación diferencial de Laguerre*

$$tL_n''(t) + (1-t)L_n'(t) + nL_n(t) = 0 \quad (t \in [0,\infty[,\ n \in \mathbb{N}_0).$$

Como antes, mediante un oportuno cambio de variable se obtiene una base ortonormal de L^2 en cualquier intervalo semiinfinito.

5.3. Polinomios de Hermite

En el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ provisto del producto escalar usual se considera la familia linealmente independiente $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$, con $v_i(t) = t^i e^{-t^2/2}$ $(t \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}_0)$. Aplicando a esta familia el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt resulta el sistema ortonormal $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$, donde

$$e_n(t) = \frac{1}{\left(2^n n! \sqrt{\pi}\right)^{1/2}} e^{-t^2/2} H_n(t) \quad (t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0)$$

y H_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ es el n-ésimo *polinomio de Hermite*, dado por

$$H_0(t) = 1, \quad H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}\left(e^{-t^2}\right) \quad (t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}).$$

Nótese que

$$H_n(t) = n! \sum_{j=0}^{N} (-1)^j \frac{2^{n-2j}}{j!(n-2j)!} t^{n-2j} = \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{j!} n(n-1)\ldots(n-2j+1)(2t)^{n-2j} \quad (t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0),$$

con $N = n/2$ si n es par y $N = (n-1)/2$ si n es impar.

Se demuestra que los polinomios de Hermite satisfacen la *ecuación diferencial de Hermite*

$$H_n''(t) - 2tH_n'(t) + 2nH_n(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0).$$