

Apuntes de Variable Compleja

Tema 3: Integración compleja

Isabel Marrero

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de La Laguna

Índice

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introducción | 3 |
| 2 | Integrales de contorno | 3 |
| 2.1 | Camino y curvas en el plano complejo | 3 |
| 2.2 | Funciones complejas de variable real | 5 |
| 2.3 | Funciones complejas de variable compleja | 6 |
| 3 | Teorema de Cauchy-Goursat | 10 |
| 3.1 | Dominios simple y múltiplemente conexos | 10 |
| 3.2 | Teorema de Cauchy-Goursat en dominios simplemente conexos | 11 |
| 3.3 | Teorema de Cauchy-Goursat en dominios múltiplemente conexos | 14 |
| 3.3.1 | Principio de deformación de contornos | 14 |
| 3.3.2 | Teorema de Cauchy-Goursat en dominios múltiplemente conexos | 16 |
| 4 | Independencia del camino | 18 |
| 4.1 | Segundo teorema fundamental del cálculo para integrales de contorno | 18 |
| 4.2 | Primer teorema fundamental del cálculo para integrales de contorno | 20 |
| 4.3 | Integración por partes | 23 |
| 5 | Fórmulas integrales de Cauchy | 23 |
| 5.1 | Primera fórmula integral de Cauchy | 24 |
| 5.2 | Segunda fórmula integral de Cauchy | 26 |
| 6 | Algunas consecuencias de las fórmulas integrales de Cauchy | 28 |
| 6.1 | Toda función holomorfa es infinitamente derivable | 28 |
| 6.2 | Desigualdad de Cauchy | 28 |
| 6.3 | Teorema de Liouville | 29 |
| 6.4 | Teorema fundamental del álgebra | 29 |
| 6.5 | Teorema de Morera | 30 |
| 6.6 | Analiticidad de las funciones holomorfas | 31 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 6.7 | Principio de identidad de funciones holomorfas | 34 |
| 6.8 | Principio del módulo máximo | 36 |
| 7 | Ejercicios resueltos | 38 |

1 Introducción

Muchas propiedades fundamentales de las funciones holomorfas se deducen muy fácilmente con ayuda de integrales tomadas a lo largo de curvas del plano complejo, llamadas integrales de línea complejas o integrales de contorno. En el presente tema introduciremos y estudiaremos estas integrales. Comenzamos viendo, en la sección 2, que tanto su definición como sus propiedades y métodos de evaluación guardan estrecha relación con las de las integrales de línea reales en el plano euclídeo. En la sección 3 explotaremos esta conexión para deducir el teorema de Cauchy sobre integrales de contorno a partir del teorema de Green en el plano. El teorema de Cauchy, y su extensión debida a Goursat, constituyen uno de los resultados centrales del análisis complejo. De nuevo, la conexión entre integrales de línea reales y complejas nos motiva, en la sección 4, para estudiar la independencia del camino y probar análogos del primer y segundo teoremas fundamentales del cálculo en el contexto complejo. La sección 5 está dedicada a las fórmulas integrales de Cauchy, de múltiples aplicaciones; para empezar, permiten establecer que el valor de una función holomorfa en un punto de un dominio simplemente conexo puede ser representado por una integral de contorno, y que una función holomorfa en un dominio simplemente conexo posee derivadas de todos los órdenes, las cuales son, a su vez, holomorfas en ese dominio. Otras consecuencias de las fórmulas integrales de Cauchy serán probadas en la sección 6, entre ellas el teorema de Liouville, el teorema fundamental del álgebra, el teorema de Morera (considerado el recíproco del teorema de Cauchy), la analiticidad de las funciones holomorfas, el principio de identidad de éstas y el principio del módulo máximo.

2 Integrales de contorno

2.1 Caminos y curvas en el plano complejo

Recordemos que un *camino* en el plano complejo es una función compleja γ , continua en un intervalo compacto $[a, b]$. La imagen de $[a, b]$ bajo γ , es decir, el grafo de γ , se llama *curva* descrita por γ , y se dice que une los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$, denominados *origen* o *punto inicial* y *extremo* o *punto final* de γ , respectivamente. También se dice que el camino γ es una *parametrización* de la curva $\gamma([a, b])$ que él mismo describe.

Ejemplo 2.1. Dados $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, el segmento que los une admite la parametrización

$$z(t) = (1-t)z_0 + tz_1 \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Cuando t varía de 0 a 1, el punto $z(t)$ se desplaza desde z_0 (punto inicial) hasta z_1 (punto final).

Ejemplo 2.2. Dados $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, la curva definida por la ecuación

$$z(t) = a + re^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

es la circunferencia de centro a y radio r . Cuando t varía de 0 a 2π , el punto $z(t)$ se mueve en sentido antihorario alrededor de la circunferencia.

Ejemplo 2.3. El camino que describe a una misma curva no es único. Por ejemplo, el segmento que une los puntos 0 y 1 del plano complejo admite, al menos, las dos parametrizaciones siguientes:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= (1-t) \cdot 0 + t \cdot 1 = t \quad (0 \leq t \leq 1), \\ z_2(t) &= t/2 \quad (0 \leq t \leq 2). \end{aligned}$$

El Ejemplo 2.3 induce a definir dos caminos como *equivalentes* si tienen el mismo grafo, es decir, si representan paramétricamente a la misma curva. Se demuestra que dos caminos $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\sigma: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$, inyectivos en su dominio, son equivalentes si, y sólo si, existe una biyección $u: [c, d] \rightarrow [a, b]$, de clase C^1 , tal que $u'(t) \neq 0$ ($a < t < b$) y $\sigma(t) = \gamma[u(t)]$ ($c \leq t \leq d$). La función u se denomina *cambio de parámetro*; su existencia justifica el hecho de que algunas de las propiedades que estudiaremos sean atribuibles a las curvas más que a los caminos y que con frecuencia, abusando del lenguaje, usemos indistintamente los términos «camino» y «curva».

Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino. Si $\gamma(a) \neq \gamma(b)$, la curva representada por γ se llama *arco* de extremos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$. Si γ es inyectiva en $[a, b]$, la curva se denomina *arco simple* o *arco de Jordan*.

Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, la curva se dice *cerrada*. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ y γ es inyectiva en $[a, b]$, la curva se llama *curva simple cerrada* o *curva de Jordan*.

Pese a resultar intuitivamente evidente para algunas curvas de Jordan que nos son familiares, como la circunferencia, la elipse y los polígonos elementales, el siguiente resultado no es sencillo de probar en general.

Teorema 2.4 (Teorema de la curva de Jordan). *Toda curva simple cerrada del plano divide a éste en dos abiertos conexos disjuntos que tienen a la curva como frontera común; una de ellas es acotada, y la otra no acotada.*

En las condiciones del Teorema 2.4, la componente acotada recibe el nombre de *interior* de la curva de Jordan, mientras que la componente no acotada es su *exterior*. Esta terminología no debe causar confusión con el interior y el exterior topológicos de la curva. Por ejemplo, el interior de una circunferencia como curva de Jordan es el correspondiente círculo abierto, mientras que su interior topológico es vacío.

El camino $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ se dice *rectificable* si tiene longitud finita, donde la longitud de γ se define como el supremo de las sumas $\sum_{k=1}^m |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|$, tomado sobre todas las posibles particiones $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b\}$ de $[a, b]$. Un camino γ es *regular a trozos* si tiene una derivada acotada γ' que es continua en todo punto de $[a, b]$, excepto, posiblemente, en un número finito de puntos; exigimos que en los puntos excepcionales existan las derivadas laterales. Todo camino regular a trozos es rectificable, y su longitud viene dada por

$$L = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Un camino cerrado regular a trozos se suele llamar *circuito*.

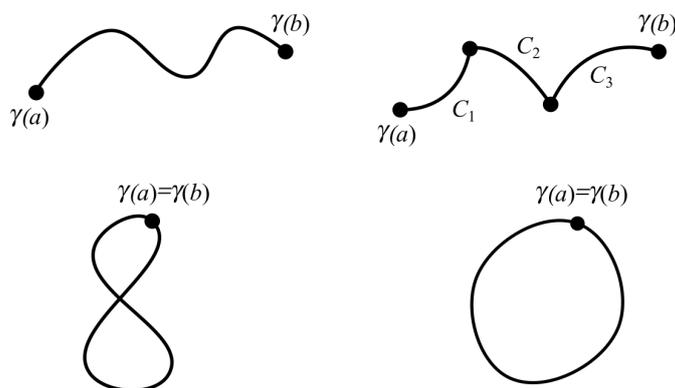


Figura 1. Tipos de curvas en el plano. De izquierda a derecha y de arriba a abajo: arco simple regular, arco simple regular a trozos, curva cerrada no simple, curva de Jordan.

En análisis complejo, un camino regular a trozos se llama *contorno*. Por tanto, un circuito se corresponde con un contorno cerrado.

Definimos la *dirección positiva* de una curva $C : z = z(t)$ ($t \in [a, b]$) como la dirección que corresponde a valores crecientes del parámetro t . Se dice también que la curva C tiene *orientación positiva*. En el caso de una curva simple cerrada, la dirección positiva viene a corresponder a la dirección antihoraria o la dirección en la que debe caminar una persona sobre C para dejar el interior de C a su izquierda (fig. 2); así, la circunferencia del Ejemplo 2.2 tiene orientación positiva. La *dirección u orientación negativa* es la opuesta a la positiva.

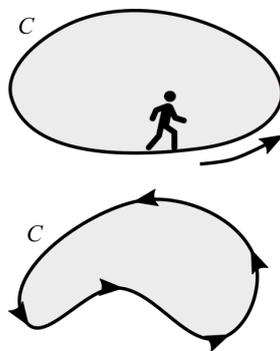


Figura 2. Orientación positiva de una curva simple cerrada.

Si C es una curva orientada, la curva con orientación opuesta se denota por $-C$. En una curva simple cerrada, la dirección negativa se corresponde con la horaria. Cuando no se especifique lo contrario, se sobreentenderá que una curva está orientada positivamente.

La integral de una función compleja f de la variable compleja z definida en un contorno C se denota por $\int_C f(z) dz$ y se llama *integral de línea compleja* o *integral de contorno*; definiremos esta integral a continuación. Previamente haremos lo propio con la integral de una función compleja de variable real.

2.2 Funciones complejas de variable real

Si $t \in [a, b]$ representa una variable real y u, v son funciones reales de t , la función $f(t) = u(t) + iv(t)$ es una función compleja de t . Como la linealidad es una propiedad deseable en una integral, parece natural definir

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt, \tag{1}$$

siempre que las integrales del segundo miembro existan; tal es el caso si u, v son continuas en $[a, b]$.

Las siguientes propiedades de la integral de funciones reales de variable real se trasladan inmediatamente a las funciones complejas de variable real.

Proposición 2.5. Si f, g son funciones complejas continuas en $[a, b]$, se verifica:

- (i) $\int_a^b kf(t) dt = k \int_a^b f(t) dt$ ($k \in \mathbb{C}$).
- (ii) $\int_a^b [f(t) + g(t)] dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$.
- (iii) $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$ ($c \in [a, b]$).
- (iv) $\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$.

Establezcamos ahora un resultado que nos será de utilidad más adelante.

Proposición 2.6. *Sea $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Se verifica:*

$$\left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt.$$

Demostración. Pongamos

$$\alpha = \int_a^b \varphi(t) dt.$$

Si $\alpha = 0$, no hay nada que probar. Si $\alpha \neq 0$, sea $\beta = \bar{\alpha}/|\alpha|$. Teniendo en cuenta la Proposición 2.5(i), la definición (1), y el hecho de que $|\beta| = 1$, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| &= |\alpha| = \beta \alpha \\ &= \beta \int_a^b \varphi(t) dt = \int_a^b \beta \varphi(t) dt \\ &= \Re \int_a^b \beta \varphi(t) dt = \int_a^b \Re[\beta \varphi(t)] dt \\ &\leq \int_a^b |\beta \varphi(t)| dt = \int_a^b |\varphi(t)| dt. \end{aligned}$$

Esta es la desigualdad requerida. □

2.3 Funciones complejas de variable compleja

Supongamos ahora que f es una función compleja de variable compleja, continua, con $u = \Re f$ y $v = \Im f$. Identificamos $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ con un campo vectorial definido de (un subconjunto de) \mathbb{R}^2 en sí mismo y, dada una curva C en el dominio de f , parametrizada por el contorno $z(t) = (x(t), y(t))$ ($t \in [a, b]$), consideramos la expresión

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] \cdot z'(t) dt. \quad (2)$$

Podemos dotar de sentido a esta expresión de dos maneras diferentes, aunque relacionadas.

Si « \cdot » es el producto escalar de \mathbb{R}^2 , el integrando del segundo miembro de (2) es una función real de variable real y (2) es una integral de línea real, conocida de cursos anteriores:

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx + v dy.$$

Por otro lado, si « \cdot » es el producto de \mathbb{C} , el integrando del segundo miembro de (2) es una función compleja de variable real:

$$\begin{aligned} f[z(t)] \cdot z'(t) &= [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] [x'(t) + iy'(t)] \\ &= [u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t)] + i [u(x(t), y(t)) y'(t) + v(x(t), y(t)) x'(t)]. \end{aligned}$$

Recurriendo a la definición (1),

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b [u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t)] dt + i \int_a^b [u(x(t), y(t)) y'(t) + v(x(t), y(t)) x'(t)] dt. \quad (3)$$

Se concluye así que

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy. \quad (4)$$

En este curso adoptaremos el segundo enfoque, definiendo la *integral de línea compleja* o *integral de contorno de f a lo largo de C* por las ecuaciones (3) o (4). De este modo, la integral de contorno es un número complejo cuyas partes real e imaginaria son sendas integrales de línea reales.

Como sabemos de cursos anteriores, las integrales de línea de campos vectoriales reales son independientes de la parametrización. Por tanto, lo mismo cabe afirmar de las integrales de contorno.

La notación

$$\oint_C f(z) dz$$

representará una integral compleja alrededor de un contorno cerrado C , positivamente orientada. Cuando sea necesario distinguir la dirección de integración alrededor de C , usaremos las notaciones

$$\oint_C^+ f(z) dz \quad \text{y} \quad \oint_C^- f(z) dz$$

para indicar la integración en las direcciones positiva y negativa, respectivamente.

Ejemplo 2.7. Evaluar $\int_C \bar{z} dz$, donde $C : z(t) = (3t, t^2)$ ($-1 \leq t \leq 4$).

Resolución. En este caso, $f(z) = \bar{z}$ y $z(t) = 3t + t^2i$ ($-1 \leq t \leq 4$). Por tanto:

$$f[z(t)] = \overline{z(t)} = \overline{3t + t^2i} = 3t - t^2i \quad (-1 \leq t \leq 4).$$

De otra parte:

$$z'(t) = 3 + 2ti \quad (-1 \leq t \leq 4).$$

Luego:

$$\begin{aligned} \int_C \bar{z} dz &= \int_{-1}^4 (3t - t^2i)(3 + 2ti) dt = \int_{-1}^4 (2t^3 + 9t + 3t^2i) dt \\ &= \int_{-1}^4 (2t^3 + 9t) dt + i \int_{-1}^4 3t^2 dt = \left[\frac{1}{2}t^4 + \frac{9}{2}t^2 \right]_{-1}^4 + it^3 \Big|_{-1}^4 \\ &= 195 + 65i. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.8. Evaluar $\oint_C \frac{1}{z} dz$, donde $C : x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

Resolución. En este caso, $f(z) = 1/z$ y $z(t) = \cos t + isen t = e^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$). Por tanto:

$$f[z(t)] = \frac{1}{z(t)} = e^{-it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

De otra parte:

$$z'(t) = ie^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Luego:

$$\oint_C \frac{1}{z} dz = i \int_0^{2\pi} e^{-it} e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

□

Ejemplo 2.9. Evaluar $\int_C (8x^2 - iy) dz$, siendo $C : y = 5x$ ($0 \leq x \leq 2$).

Resolución. En este caso, $f(z) = 8x^2 - iy$ y $z(t) = t + 5ti = (1 + 5i)t$ ($0 \leq t \leq 2$). Por tanto:

$$f[z(t)] = 8t^2 - 5ti \quad (0 \leq t \leq 2).$$

De otra parte:

$$z'(t) = 1 + 5i \quad (0 \leq t \leq 2).$$

Luego:

$$\begin{aligned} \int_C (8x^2 - iy) dz &= (1 + 5i) \int_0^2 (8t^2 - 5ti) dt = 8(1 + 5i) \int_0^2 t^2 dt - 5i(1 + 5i) \int_0^2 t dt \\ &= 8(1 + 5i) \frac{t^3}{3} \Big|_0^2 - 5i(1 + 5i) \frac{t^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{214 + 290i}{3}. \end{aligned}$$

□

De la Proposición 2.5 se infieren inmediatamente las siguientes propiedades de la integral de contorno.

Teorema 2.10. Supongamos que f, g son continuas en un dominio D , y que C es un contorno enteramente contenido en D . Entonces:

- (i) $\int_C kf(z) dz = k \int_C f(z) dz \quad (k \in \mathbb{C})$.
- (ii) $\int_C [f(z) + g(z)] dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz$.
- (iii) $\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$, donde C consiste en los contornos C_1 y C_2 con el extremo de C_1 unido al origen de C_2 .
- (iv) $\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz$, siendo $-C$ el contorno con orientación opuesta a la de C .

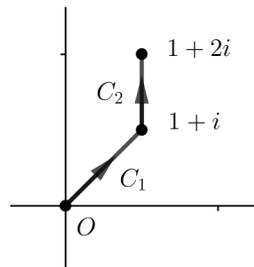


Figura 3. Ejemplo 2.11.

Ejemplo 2.11. Evaluar $\int_C (x^2 + iy^2) dz$ a lo largo del contorno C de la fig. 3.

Resolución. Se tiene que $C = C_1 + C_2$, donde C_1 y C_2 son los segmentos rectilíneos que unen el origen con el punto $1 + i$, y éste con el punto $1 + 2i$, respectivamente. El Teorema 2.10(iii) permite escribir:

$$\int_C (x^2 + iy^2) dz = \int_{C_1} (x^2 + iy^2) dz + \int_{C_2} (x^2 + iy^2) dz.$$

Pongamos $f(x + iy) = x^2 + iy^2$ y calculemos por separado cada una de las integrales del segundo miembro.

Una parametrización de C_1 (que está sobre la recta $y = x$) es

$$C_1 : z_1(t) = t + it = (1 + i)t \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Entonces $f[z_1(t)] = (1 + i)t^2$, $z_1'(t) = 1 + i$ ($0 \leq t \leq 1$), y

$$\int_{C_1} (x^2 + iy^2) dz = (1 + i)^2 \int_0^1 t^2 dt = 2i \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2i}{3}.$$

Por otra parte, una parametrización de C_2 es

$$C_2 : z_2(t) = 1 + it \quad (1 \leq t \leq 2).$$

Entonces $f[z_2(t)] = 1 + it^2$, $z_2'(t) = i$ ($1 \leq t \leq 2$), y

$$\int_{C_2} (x^2 + iy^2) dz = \int_1^2 (-t^2 + i) dt = \left[-\frac{t^3}{3} + it \right]_1^2 = -\frac{7}{3} + i.$$

Combinando los resultados anteriores, concluimos:

$$\int_C (x^2 + iy^2) dz = \frac{2i}{3} + \left(-\frac{7}{3} + i \right) = \frac{-7 + 5i}{3}.$$

□

En ocasiones es necesario encontrar una cota superior del módulo de una integral de contorno. Recordemos que la longitud de una curva plana, regular a trozos, con parametrización $z(t) = x(t) + iy(t) = (x(t), y(t))$ ($t \in [a, b]$) es

$$L = \int_a^b |z'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Recordemos también que toda función continua sobre un compacto (y una curva es compacta) está acotada.

Teorema 2.12 (Teorema ML). Si f es continua sobre una curva regular a trozos C , y si $|f(z)| \leq M$ ($z \in C$), entonces

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML,$$

donde L denota la longitud de C .

Demostración. En virtud de la Proposición 2.6, aplicada a $\varphi(t) = f[z(t)]z'(t)$ ($t \in [a, b]$),

$$\left| \int_C f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f[z(t)]z'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f[z(t)]||z'(t)| dt \leq M \int_a^b |z'(t)| dt = ML.$$

□

Ejemplo 2.13. Encontrar una cota superior para

$$\oint_C \frac{e^z}{z+1} dz,$$

donde $C : |z| = 4$.

Resolución. Como C es una circunferencia de (centro en el origen y) radio 4, su longitud vale $2\pi \cdot 4 = 8\pi = L$. Además, por la desigualdad triangular inversa,

$$|z+1| \geq ||z|-1| \geq |z|-1 = 4-1 = 3 \quad (z \in C),$$

así que

$$\left| \frac{e^z}{z+1} \right| = \frac{|e^z|}{|z+1|} = \frac{e^{\Re z}}{|z+1|} \leq \frac{e^{|z|}}{3} = \frac{e^4}{3} = M \quad (z \in C).$$

El teorema ML (Teorema 2.12) ya permite estimar

$$\left| \oint_C \frac{e^z}{z+1} dz \right| \leq ML = \frac{8\pi e^4}{3}.$$

□

3 Teorema de Cauchy-Goursat

En esta sección nos concentraremos en integrales de contorno $\oint_C f(z) dz$ donde C es una curva simple cerrada, regular a trozos, con orientación positiva (antihoraria). Veremos que cuando f es holomorfa en un dominio simplemente conexo D , el valor de $\oint_C f(z) dz$ es el mismo para cualquier curva simple cerrada C que esté enteramente contenida en D . Este teorema, denominado de Cauchy-Goursat, constituye uno de los resultados centrales del análisis complejo.

Antes de abordar el teorema de Cauchy-Goursat es preciso recordar la diferencia entre dos tipos de dominios de \mathbb{C} : simplemente conexos y múltiplemente conexos.

3.1 Dominios simple y múltiplemente conexos

Como es sabido, un *dominio* es un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{C} . Un dominio D se dice *simplemente conexo* si se verifica una cualquiera de las tres condiciones equivalentes que siguen:

- (i) Todo contorno simple cerrado C enteramente contenido en D es homótopo a un punto en D , es decir, puede ser contraído en un punto sin abandonar D .
- (ii) Todo contorno simple cerrado C enteramente contenido en D encierra únicamente puntos de D .
- (iii) El dominio D carece de agujeros.

Un dominio es *múltiplemente conexo* si no es simplemente conexo. Un dominio múltiplemente conexo con n agujeros se dice $(n+1)$ -conexo: si $n=1$ el dominio es *doblemente conexo*, si $n=2$, *triplemente conexo*, y así sucesivamente. Véase la fig. 4.

Ejemplo 3.1. Son dominios simplemente conexos \mathbb{C} y los discos abiertos de \mathbb{C} , de cualesquiera centro y radio. No lo son los anillos, como $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$, ni, en particular, los discos abiertos perforados, como $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$. Los anillos y los discos perforados son doblemente conexos.

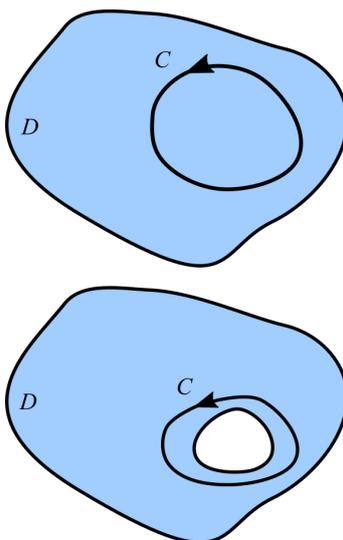


Figura 4. Dominios simple y múltiplemente conexos.

3.2 Teorema de Cauchy-Goursat en dominios simplemente conexos

El siguiente resultado, relativo a integrales de línea reales, es conocido de cursos anteriores.

Teorema 3.2 (Green). *Si C es una curva simple cerrada regular a trozos, positivamente orientada, que forma la frontera de una región R , y si las funciones reales $P(x,y)$ y $Q(x,y)$, junto con sus derivadas de primer orden, son continuas en un dominio que contiene a R y a C , entonces*

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$



Figura 5. George Green (1793-1841).

Teorema 3.3 (Cauchy, 1825). *Supongamos que una función f es holomorfa en un dominio simplemente conexo D , y que f' es continua en D . Entonces, para cualquier contorno simple cerrado C en D ,*

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

Demostración. Es consecuencia inmediata de la definición (4), del teorema de Green en el plano (Teorema 3.2) y de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. En efecto, si f' es continua en D , también lo son las partes real e imaginaria de $f = u + iv$ y sus derivadas de primer orden. Por tanto,

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C u dx - v dy + i \oint_C v dx + u dy = \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy.$$

Ya que $f \in \mathcal{H}(D)$, u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, en cada punto de D . Se concluye que $\oint_C f(z) dz = 0$, como se pretendía. \square



Figura 6. Augustin-Louis Cauchy (1799-1857).

Cincuenta y ocho años después de que el Teorema 3.3 fuera establecido por Cauchy, el matemático francés Édouard Goursat (1858-1936) probó que es posible suprimir la hipótesis de continuidad de f' . La versión del teorema de Cauchy así modificada recibe el nombre de teorema de Cauchy-Goursat; omitimos su demostración.



Figura 7. Édouard Goursat (1858-1936).

Teorema 3.4 (Cauchy-Goursat, 1883). *Sea D un dominio simplemente conexo, y sea $f \in \mathcal{H}(D)$. Para cada contorno simple cerrado C en D , se tiene que*

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

Como el interior de un contorno simple cerrado es un dominio simplemente conexo, el Teorema 3.4 admite la siguiente formulación más sencilla:

Corolario 3.5. Si f es holomorfa sobre y dentro de un contorno simple cerrado C , entonces

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

Ejemplo 3.6. Evaluar $\oint_C e^z dz$, donde C es el contorno de la fig. 8.

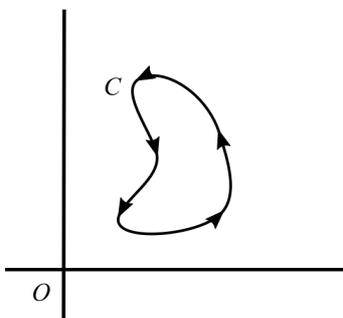


Figura 8. Ejemplo 3.6.

Resolución. El integrando, $f(z) = e^z$, es una función entera, y por lo tanto satisface las hipótesis del Corolario 3.5. Consecuentemente,

$$\oint_C e^z dz = 0.$$

□

Ejemplo 3.7. Evaluar $\oint_C \frac{dz}{z^2}$, donde C es la elipse $(x-2)^2 + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$.

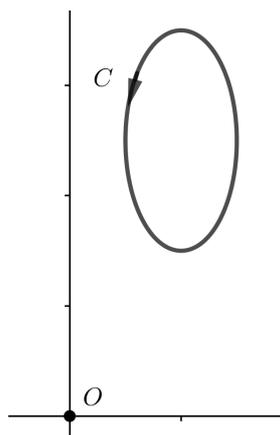


Figura 9. Ejemplo 3.7.

Resolución. La función racional $f(z) = 1/z^2$ es holomorfa excepto en $z = 0$, pero este punto es exterior al contorno C (fig. 9). El Corolario 3.5 permite concluir que

$$\oint_C \frac{dz}{z^2} = 0.$$

□

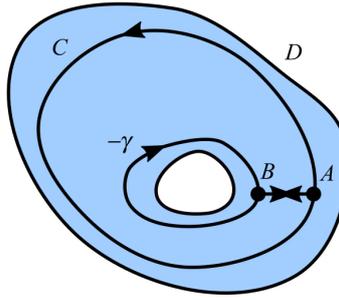


Figura 10. El dominio doblemente conexo D , reconvertido en simplemente conexo.

3.3 Teorema de Cauchy-Goursat en dominios múltiplemente conexos

3.3.1 Principio de deformación de contornos

Si f es holomorfa en un dominio múltiplemente conexo D , no podemos asegurar que $\oint_C f(z) dz = 0$ para todo contorno simple cerrado C en D . Supongamos, por ejemplo, que D es doblemente conexo y que C, γ son contornos simples cerrados tales que γ rodea el agujero del dominio y es interior a C (fig. 10). Supongamos, además, que f es holomorfa sobre cada contorno y en cada punto interior a C , pero exterior a γ . Introduciendo el corte \overline{AB} que se muestra en la fig. 10, encontramos que la región limitada por todas las curvas es simplemente conexa. Ahora, los apartados (iii) y (iv) del Teorema 2.10, junto con el Teorema 3.4, permiten escribir

$$\oint_C f(z) dz + \int_{\overline{AB}} f(z) dz + \oint_{-\gamma} f(z) dz + \int_{-\overline{AB}} f(z) dz = 0,$$

o bien

$$\oint_C f(z) dz + \int_{\overline{AB}} f(z) dz - \oint_{\gamma} f(z) dz - \int_{\overline{AB}} f(z) dz = 0,$$

de donde

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{\gamma} f(z) dz. \quad (5)$$

Esta última igualdad se conoce como *principio de deformación de contornos*, ya que podemos pensar en el contorno γ como una deformación continua del contorno C . Bajo esta deformación, los valores de la integral no varían. En otras palabras, (5) nos permite evaluar la integral alrededor de un contorno simple cerrado C de parametrización complicada reemplazándolo por un contorno más conveniente γ , con igual orientación. El siguiente ejemplo ilustra este procedimiento.

Ejemplo 3.8. Evaluar $\oint_C \frac{dz}{z-i}$, donde C es el contorno de la fig. 11.

Resolución. Deformamos C en el contorno γ de la fig. 11: $|z-i| = 1$. Una parametrización de γ es $z(t) = i + e^{it}$, con $z'(t) = ie^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$). Entonces,

$$\oint_C \frac{dz}{z-i} = \oint_{\gamma} \frac{dz}{z-i} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = 2\pi i.$$

□

El resultado del Ejemplo 3.8 se puede generalizar. Usando el principio de deformación de contornos y procediendo como en dicho ejemplo se demuestra la siguiente:

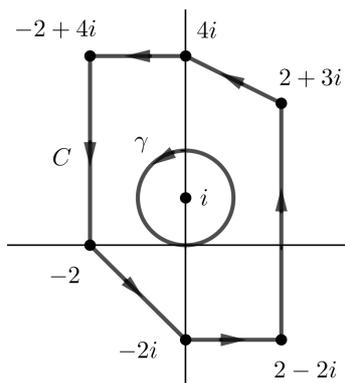


Figura 11. Ejemplo 3.8.

Proposición 3.9. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ es interior a un contorno simple cerrado C entonces, para cada $n \in \mathbb{Z}$, se tiene:

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1. \end{cases} \tag{6}$$

Demostración. Cuando n es cero o un entero negativo, $\frac{1}{(z - z_0)^n}$ es un polinomio y, por lo tanto, una función entera; en tal caso, el Teorema 3.4 obliga a que

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^n} = 0.$$

Supongamos entonces que $n \in \mathbb{N}$, y elijamos $r > 0$ tal que la circunferencia $\gamma: |z - z_0| = r$ sigue siendo interior a C . Una parametrización de γ es $z(t) = z_0 + re^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), así que $z'(t) = ire^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$). Por el principio de deformación de contornos,

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \oint_\gamma \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{r^n e^{int}} dt = r^{1-n}i \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t} dt = r^{1-n}i \int_0^{2\pi} [\cos(1-n)t + i\text{sen}(1-n)t] dt.$$

Ahora, si $n = 1$ obtenemos

$$\oint_C \frac{dz}{z - z_0} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i,$$

mientras que si $n \neq 1$ entonces, por la periodicidad de las funciones seno y coseno reales,

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \frac{r^{1-n}i}{1-n} [\text{sen}(1-n)t - i\cos(1-n)t]_0^{2\pi} = 0.$$

Esto demuestra (6). □

Observación 3.10. La holomorfía de f sobre y dentro de un contorno simple cerrado C es condición suficiente para garantizar que $\oint_C f(z) dz = 0$. Sin embargo, la Proposición 3.9 muestra que tal condición no es necesaria: puede ocurrir que $\oint_C f(z) dz = 0$ sin que f sea holomorfa dentro de C . Por ejemplo, dicha proposición, con $C: |z| = 1$, $z_0 = 0$ y $n = 2$, entraña que

$$\oint_C \frac{dz}{z^2} = 0,$$

aun cuando $f(z) = 1/z^2$ no es holomorfa en el origen.

Ejemplo 3.11. *Evaluar*

$$\oint_C \frac{5z+7}{z^2+2z-3} dz,$$

siendo $C : |z-2| = 2$.

Resolución.

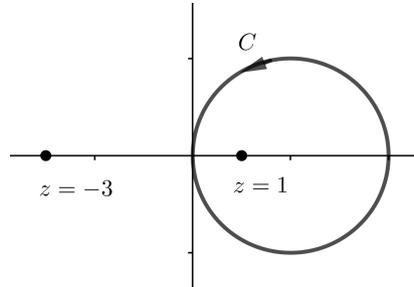


Figura 12. Ejemplo 3.11.

En primer lugar, calculamos los ceros del denominador del integrando: $z = -3$, $z = 1$; nótese que, de estas dos raíces, tan sólo $z = 1$ está encerrada por C (fig. 12). A continuación, descomponemos el integrando en fracciones simples:

$$\frac{5z+7}{z^2+2z-3} = \frac{2}{z+3} + \frac{3}{z-1}.$$

Finalmente, aplicamos el Teorema 3.4 y la Proposición 3.9:

$$\oint_C \frac{5z+7}{z^2+2z-3} dz = 2 \oint_C \frac{dz}{z+3} + 3 \oint_C \frac{dz}{z-1} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2\pi i = 6\pi i.$$

□

3.3.2 Teorema de Cauchy-Goursat en dominios múltiplemente conexos

Teorema 3.12. *Supongamos que C, C_1, \dots, C_n son curvas simples cerradas, positivamente orientadas, tales que C_1, \dots, C_n son interiores a C y las regiones interiores a C_k ($k = 1, \dots, n$) carecen de puntos comunes. Si f es holomorfa en cada contorno y en cada punto interior a C pero exterior a todos los C_k ($k = 1, \dots, n$), entonces*

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz.$$

Demostración. Introducimos cortes entre C y C_k ($k = 1, \dots, n$) para obtener un dominio simplemente conexo (fig. 13), al que aplicamos el Teorema 3.4.

En virtud del Teorema 2.10(iii), la integral a lo largo del contorno que limita el dominio se descompone en la suma de las integrales alrededor de los contornos cerrados, donde sólo C se orienta positivamente, más las integrales a lo largo de los cortes, las cuales se cancelan en virtud del Teorema 2.10(iv). De esta manera, únicamente sobreviven las integrales alrededor de los contornos cerrados, con la orientación señalada, y la suma total de éstas es nula:

$$\oint_C f(z) dz + \sum_{k=1}^n \oint_{-C_k} f(z) dz = 0.$$

Una nueva aplicación del Teorema 2.10(iv) conduce al resultado deseado.

□

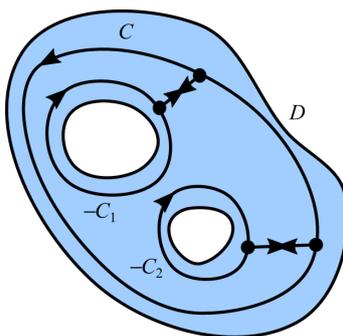


Figura 13. El dominio triplemente conexo \$D\$, reconvertido en simplemente conexo.

Ejemplo 3.13. Evaluar $\oint_C \frac{dz}{z^2+1}$, donde $C : |z| = 4$.

Resolución. En este caso, el denominador del integrando admite la factorización $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$, y por lo tanto el integrando $1/(z^2 + 1)$ no es holomorfo en $z = i$ ni en $z = -i$. Ambos puntos son interiores al contorno C . Recurriendo, de nuevo, a una descomposición en fracciones simples, encontramos que

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right),$$

y

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2i} \oint_C \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) dz.$$

Ahora, rodeamos los puntos $z = i$ y $z = -i$ mediante sendos contornos circulares C_1 y C_2 , enteramente contenidos dentro de C ; concretamente, podemos tomar $C_1 : |z - i| = 1/2$ y $C_2 : |z + i| = 1/2$ (fig. 14).

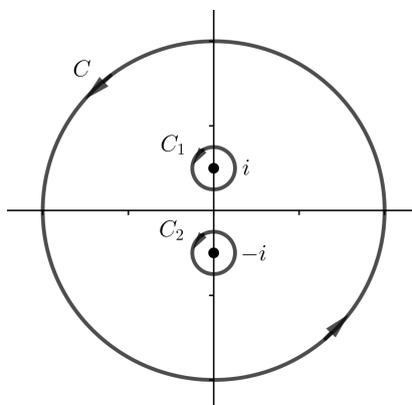


Figura 14. Ejemplo 3.13.

El Teorema 3.12 conduce a

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{dz}{z^2+1} &= \frac{1}{2i} \oint_{C_1} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) dz + \frac{1}{2i} \oint_{C_2} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) dz \\ &= \frac{1}{2i} \oint_{C_1} \frac{1}{z-i} dz - \frac{1}{2i} \oint_{C_1} \frac{1}{z+i} dz + \frac{1}{2i} \oint_{C_2} \frac{1}{z-i} dz - \frac{1}{2i} \oint_{C_2} \frac{1}{z+i} dz. \end{aligned} \tag{7}$$

Como $1/(z+i)$ es holomorfa dentro y sobre C_1 , mientras que $1/(z-i)$ lo es dentro y sobre C_2 , la segunda y tercera integrales del segundo miembro de (7) se anulan. Además, sigue de la Proposición 3.9, con $n = 1$, que

$$\oint_{C_1} \frac{dz}{z-i} = 2\pi i \quad \text{y} \quad \oint_{C_2} \frac{dz}{z+i} = 2\pi i.$$

Se concluye que

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 + 1} = \pi - \pi = 0.$$

□

4 Independencia del camino

Como es sabido de cursos anteriores, el valor de una integral de línea real $\int_C P dx + Q dy$ depende, en general, de la curva C . Sin embargo, existen integrales de este tipo cuyo valor depende únicamente de los extremos de la curva C , y no de C en sí misma; en tal caso, se dice que la integral de línea es independiente del camino. Por ejemplo, $\int_C y dx + x dy$ es independiente del camino. En relación con esta cuestión, también son conocidas de cursos anteriores sendas versiones del primer y del segundo teorema fundamentales del cálculo para integrales de línea.

Resulta, entonces, natural plantearse la existencia de versiones complejas de los teoremas fundamentales del cálculo, así como la independencia del camino de las integrales de contorno. El objetivo de esta sección es discutir las implicaciones entre estos conceptos y resultados.

4.1 Segundo teorema fundamental del cálculo para integrales de contorno

Definición 4.1. Sean z_0 y z_1 dos puntos cualesquiera de un dominio D . Una integral de contorno $\int_C f(z) dz$ es independiente del camino si su valor es el mismo para todos los contornos C en D con punto inicial z_0 y punto final z_1 .

En dominios simplemente conexos, la holomorfía del integrando implica la independencia del camino de la integral.

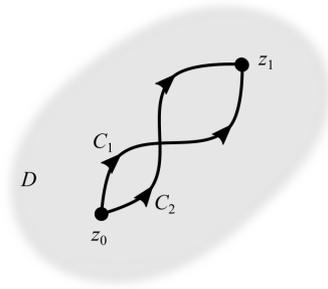


Figura 15. Independencia del camino.

Teorema 4.2. Supongamos que D es un dominio simplemente conexo, que $f \in \mathcal{H}(D)$, y que C es cualquier contorno contenido en D . Entonces $\int_C f(z) dz$ es independiente del camino C .

Demostración. Sean C_1, C_2 dos contornos contenidos en un dominio simplemente conexo D , ambos con origen z_0 y extremo z_1 . Una breve reflexión basta para convencernos de que no se pierde generalidad suponiendo que C_1 y C_2 carecen de otros puntos comunes (fig. 15). Entonces $C_1 - C_2$ forma un contorno simple cerrado, y si $f \in \mathcal{H}(D)$, el teorema de Cauchy-Goursat muestra que

$$\oint_{C_1 - C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz = 0,$$

o bien

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$

□

Ejemplo 4.3. Evaluar $\int_C 2z dz$, donde C es el contorno en negro de la fig. 16.

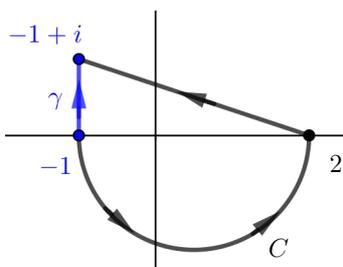


Figura 16. Ejemplo 4.3.

Resolución. Como $f(z) = 2z$ es entera, el Teorema 4.2 permite reemplazar el camino regular a trozos C por otro más conveniente γ con igual origen e igual extremo; por ejemplo, el segmento que une ambos puntos (de color azul en la figura). En este caso, una parametrización de γ es $z(t) = -1 + it$, con $z'(t) = i$ ($0 \leq t \leq 1$). Luego,

$$\int_C 2z dz = \int_\gamma 2z dz = 2i \int_0^1 (-1 + it) dt = -2 \int_0^1 t dt - 2i \int_0^1 dt = -1 - 2i.$$

□

Una integral de contorno $\int_C f(z) dz$ que es independiente del camino C se escribe usualmente en la forma

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz,$$

donde z_0, z_1 son los puntos inicial y final de C . Por tanto, en el ejemplo anterior podríamos haber escrito $\int_{-1}^{-1+i} 2z dz$ en vez de $\int_C 2z dz$.

Definición 4.4. Supongamos que una función f es continua en un dominio D . Si existe una función F tal que $F'(z) = f(z)$ ($z \in D$), entonces F se dice una antiderivada de f en D .

Es sabido que si D es un dominio de \mathbb{C} y $F \in \mathcal{H}(D)$ con $F'(z) = 0$ ($z \in D$), entonces F es constante en D . Por tanto, la antiderivada más general, o *integral indefinida*, de una función $f(z)$ es

$$\int f(z) dz = F(z) + K,$$

donde F es cualquier antiderivada de f y K es una constante compleja. Como una antiderivada F de una función f es derivable en cada punto de un dominio D , F es necesariamente holomorfa y, por tanto, continua, en cada punto de D .

Estamos ya en disposición de probar el segundo teorema fundamental del cálculo, o regla de Barrow, para integrales de contorno.

Teorema 4.5 (Regla de Barrow para integrales de contorno). *Supongamos que una función f es continua en un dominio D , y que F es una antiderivada de f en D . Entonces, para cualquier contorno C en D con origen z_0 y extremo z_1 , se verifica:*

$$\int_C f(z) dz = F(z_1) - F(z_0).$$

Demostración. Probaremos esta igualdad en el caso en que C es una curva regular parametrizada por $z = z(t)$ ($a \leq t \leq b$). Los extremos de C son entonces $z_0 = z(a)$ y $z_1 = z(b)$. Como $F'(z) = f(z)$ ($z \in D$), tenemos:

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_a^b f[z(t)] z'(t) dt = \int_a^b F'[z(t)] z'(t) dt = \int_a^b \frac{dF[z(t)]}{dt} dt \\ &= F[z(t)] \Big|_{t=a}^{t=b} = F[z(b)] - F[z(a)] = F(z_1) - F(z_0). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.6. *En el Ejemplo 4.3, el integrando $f(z) = 2z$ tiene una antiderivada, que es $F(z) = z^2$ ($z \in \mathbb{C}$). Luego,*

$$\int_C 2z dz = \int_{-1}^{-1+i} 2z dz = z^2 \Big|_{-1}^{-1+i} = (-1+i)^2 - (-1)^2 = -1 - 2i.$$

Ejemplo 4.7. *Evaluar $\int_C \cos z dz$, donde C es cualquier contorno con origen $z_0 = 0$ y extremo $z_1 = 2 + i$.*

Resolución. Para todo $z \in \mathbb{C}$, la función $F(z) = \operatorname{sen} z$ es una antiderivada de $f(z) = \cos z$: $F'(z) = \cos z = f(z)$. Por tanto,

$$\int_C \cos z dz = \int_0^{2+i} \cos z dz = \operatorname{sen} z \Big|_0^{2+i} = \operatorname{sen}(2+i) - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen}(2+i).$$

□

La demostración del siguiente resultado es inmediata a partir del Teorema 4.5.

Corolario 4.8. *Si f es continua y tiene una antiderivada F en D , entonces:*

- (i) $\int_C f(z) dz = 0$ para todo contorno cerrado C en D .
- (ii) $\int_C f(z) dz$ es independiente del camino.

4.2 Primer teorema fundamental del cálculo para integrales de contorno

Teorema 4.9 (Primer teorema fundamental del cálculo para integrales de contorno). *Si f es continua y $\int_C f(z) dz$ es independiente del camino C en un dominio D , entonces f tiene una antiderivada en D .*

Demostración. Definimos

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(s) ds \quad (z \in D),$$

donde s denota una variable compleja y $z_0 \in D$ es fijo. Como $\int_C f(z) dz$ es independiente del camino, F está bien definida. Queremos ver que $F'(z) = f(z)$ ($z \in D$).

Puesto que D es un dominio, fijado $z \in D$ cabe elegir Δz tal que $z + \Delta z \in D$. Además, z y $z + \Delta z$ pueden ser unidos por un segmento rectilíneo, como se muestra en la fig. 17. Utilizaremos este contorno en lo sucesivo.

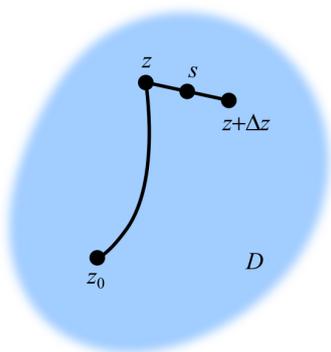


Figura 17. Contorno usado en la demostración del Teorema 4.9.

Ahora,

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(s) ds - \int_{z_0}^z f(s) ds = \int_z^{z+\Delta z} f(s) ds. \tag{8}$$

Por otra parte,

$$f(z)\Delta z = f(z) \int_z^{z+\Delta z} ds = \int_z^{z+\Delta z} f(z) ds,$$

de donde

$$f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z) ds. \tag{9}$$

Combinando (8) y (9), escribimos:

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)] ds.$$

Como f es continua en z , dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(s) - f(z)| < \varepsilon$ siempre que $|s - z| < \delta$. Consecuentemente, eligiendo Δz tal que $|\Delta z| < \delta$, sigue del teorema *ML* (Teorema 2.12) que

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)] ds \right| \\ &= \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_z^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)] ds \right| \\ &\leq \frac{1}{|\Delta z|} \varepsilon |\Delta z| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Hemos probado así que

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z),$$

esto es, que $F'(z) = f(z)$. La arbitrariedad de $z \in D$ completa la demostración. □

Teorema 4.10. *Supongamos que D es un dominio simplemente conexo, y que $f \in \mathcal{H}(D)$. Entonces f tiene una antiderivada en D , es decir, existe una función F tal que $F'(z) = f(z)$ ($z \in D$).*

Demostración. Si $f \in \mathcal{H}(D)$, entonces f es continua en D . Basta combinar el Teorema 4.2 con el Teorema 4.9. □

Sabemos que para $|z| > 0$ y $-\pi < \text{Arg } z < \pi$, la función $1/z$ es la derivada del logaritmo principal $\text{Log } z$. Esto significa que, bajo determinadas condiciones, $\text{Log } z$ es una antiderivada de $1/z$. Pero este resultado debe ser utilizado

con precaución. Por ejemplo, supongamos que D es el plano complejo perforado en el origen. La función $1/z$ es holomorfa en este dominio múltiplemente conexo. Pero si C es cualquier contorno simple cerrado que rodea al origen, no es posible inferir del Corolario 4.8(i) que

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 0.$$

Ciertamente, haciendo $n = 1$ y $z_0 = 0$ en (6) vemos que

$$\oint_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Ocurre que la función $\text{Log } z$ no es una antiderivada de $1/z$ en D , ya que $\text{Log } z$ tiene un salto de rama en el semieje real negativo, y por lo tanto no es holomorfa en D .

Ejemplo 4.11. *Evaluar*

$$\int_C \frac{1}{z} dz,$$

donde C es el contorno de la fig. 18.

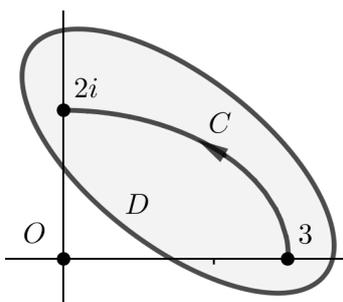


Figura 18. Ejemplo 4.11.

Resolución. En este caso, $\text{Log } z$ es una antiderivada de $1/z$ en el dominio simplemente conexo D de la figura, puesto que ambas funciones son holomorfas en D . Luego,

$$\int_3^{2i} \frac{1}{z} dz = \text{Log } z \Big|_3^{2i} = \text{Log } 2i - \text{Log } 3.$$

Como

$$\text{Log } 2i = \ln 2 + \frac{\pi}{2}i \quad \text{y} \quad \text{Log } 3 = \ln 3,$$

se concluye que

$$\int_3^{2i} \frac{1}{z} dz = \ln \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}i.$$

□

Ejemplo 4.12. *Evaluar*

$$\int_C \frac{1}{z^{1/2}} dz,$$

donde C es el segmento rectilíneo de extremos $z_0 = i$ y $z_1 = 9$.

Resolución. Sea $f(z) = z^{1/2}$ la rama principal de la función raíz cuadrada. En el dominio $|z| > 0$, $-\pi < \text{Arg}(z) < \pi$, la función $f(z) = 1/z^{1/2} = z^{-1/2}$ es holomorfa y tiene antiderivada $F(z) = 2z^{1/2}$; el segmento en cuestión está contenido en este dominio. Consecuentemente,

$$\int_i^9 \frac{1}{z^{1/2}} dz = 2z^{1/2} \Big|_i^9 = 2 \left[3 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] = 6 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

□

4.3 Integración por partes

Supóngase que f y g son holomorfas en un dominio simplemente conexo D . De la regla de derivación del producto, el Teorema 4.10 y la definición de integral indefinida se desprende que

$$\int f(z)g'(z) dz = f(z)g(z) - \int g(z)f'(z) dz.$$

Si, además, z_0 y z_1 son los puntos inicial y final de un contorno C enteramente contenido en D , entonces el Teorema 4.5 implica

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)g'(z) dz = \left[f(z)g(z) \right]_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} g(z)f'(z) dz. \quad (10)$$

Ejemplo 4.13. *Evaluar la integral*

$$\int_i^{1+i} ze^z dz$$

mediante integración por partes, y expresar el resultado en forma binómica.

Resolución. Atendiendo a la fórmula (10),

$$\begin{aligned} \int_i^{1+i} ze^z dz &= \left[ze^z \right]_i^{1+i} - \int_i^{1+i} e^z dz = (1+i)e^{1+i} - ie^i - e^{1+i} + e^i \\ &= e^i[1+i(e-1)] = (\cos 1 + i \operatorname{sen} 1)[1+i(e-1)] \\ &= [\cos 1 - (e-1) \operatorname{sen} 1] + i[\operatorname{sen} 1 + (e-1) \cos 1]. \end{aligned}$$

□

5 Fórmulas integrales de Cauchy

En esta sección alcanzaremos dos resultados importantes:

- El valor de una función holomorfa en un punto de un dominio simplemente conexo puede ser representado por una integral de contorno.
- Una función holomorfa en un dominio simplemente conexo posee derivadas de todos los órdenes.

5.1 Primera fórmula integral de Cauchy

Supongamos que $f \in \mathcal{H}(D)$, siendo D un dominio simplemente conexo, y que $z_0 \in D$. El cociente $f(z)/(z - z_0)$ no está definido en z_0 y, consecuentemente, no es holomorfo en D . Por tanto, no podemos aplicar el teorema de Cauchy-Goursat (Teorema 3.4) para concluir que la integral de $f(z)/(z - z_0)$ alrededor de un contorno simple cerrado C que encierre a z_0 es nula. De hecho, como veremos a continuación, el valor de esta integral es $2\pi i f(z_0)$.

Teorema 5.1 (Primera fórmula integral de Cauchy). *Sean D un dominio simplemente conexo, $f \in \mathcal{H}(D)$, y C cualquier contorno simple cerrado enteramente contenido en D . Para todo z_0 interior a C , se tiene:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Demostración. En las condiciones del enunciado, escribimos:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_C \frac{f(z_0) + f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = f(z_0) \oint_C \frac{dz}{z - z_0} + \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz.$$

Por la Proposición 3.9,

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) + \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz. \tag{11}$$

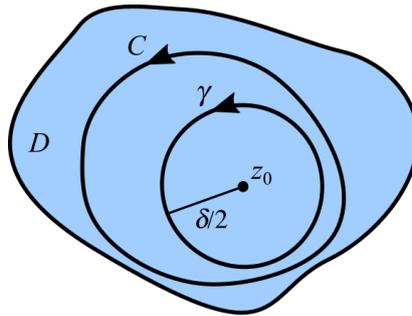


Figura 19. Contornos en la demostración del Teorema 5.1.

Queremos ver que la integral del segundo miembro de (11) es nula. A tal fin, sea γ una circunferencia centrada en z_0 , con radio lo suficientemente pequeño para que γ quede en el interior de C . Como f es continua en z_0 , dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|z - z_0| < \delta$ implica $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon/2\pi$. Si elegimos $\gamma: |z - z_0| = \delta/2 < \delta$ entonces, por el principio de deformación de contornos (sección 3.3.1) y el teorema *ML* (Teorema 2.12), obtenemos

$$\left| \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| = \left| \oint_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{\varepsilon/2\pi}{\delta/2} \frac{2\pi\delta}{2} = \varepsilon,$$

es decir,

$$\left| \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \varepsilon,$$

cualquiera que sea $\varepsilon > 0$. Haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ se concluye que

$$\oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0,$$

y de aquí, en virtud de (11), que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

como se pretendía. □

Corolario 5.2. Los valores de una función holomorfa f en el interior de un contorno simple cerrado C están determinados por los valores de f sobre C .

Corolario 5.3. Si f es holomorfa sobre y dentro de un contorno simple cerrado C , y si z_0 es cualquier punto interior a C , entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Ejemplo 5.4. Evaluar

$$\oint_C \frac{z^2 - 4z + 4}{z + i} dz,$$

donde $C : |z| = 2$.

Resolución. En primer lugar, identificamos $f(z) = z^2 - 4z + 4$ y $z_0 = -i$ como un punto encerrado por C . Seguidamente, observamos que f es holomorfa sobre y dentro del contorno C . Ahora, aplicando la fórmula integral de Cauchy (Corolario 5.3), ya resulta

$$\oint_C \frac{z^2 - 4z + 4}{z + i} dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i(3 + 4i) = -2\pi(4 - 3i).$$

□

Ejemplo 5.5. Evaluar

$$\oint_C \frac{z}{z^2 + 9} dz,$$

donde C es la circunferencia $|z - 2i| = 4$.

Resolución. Factorizando el denominador como $z^2 + 9 = (z - 3i)(z + 3i)$ encontramos que $3i$ es el único punto dentro del contorno cerrado C donde el integrando deja de ser holomorfo (fig. 20).

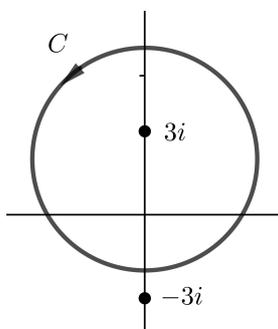


Figura 20. Ejercicio 5.4.

Reescribimos este integrando en la forma

$$\frac{z}{z^2 + 9} = \frac{\frac{z}{z + 3i}}{z - 3i},$$

y hacemos $f(z) = z/(z + 3i)$. Como la función f es holomorfa sobre y dentro del contorno C , la fórmula integral de Cauchy (Corolario 5.3) permite concluir que

$$\oint_C \frac{z}{z^2 + 9} dz = \int_C \frac{\frac{z}{z + 3i}}{z - 3i} dz = 2\pi i \left. \frac{z}{z + 3i} \right|_{z=3i} = 2\pi i \frac{3i}{6i} = \pi i.$$

□

5.2 Segunda fórmula integral de Cauchy

Ahora usaremos el Teorema 5.1 para probar que los valores de las derivadas sucesivas de una función holomorfa también pueden ser expresados mediante una integral de contorno, resultado conocido como segunda fórmula integral de Cauchy o fórmula integral de Cauchy para derivadas.

Teorema 5.6 (Fórmula integral de Cauchy para derivadas). *Sean D un dominio simplemente conexo, $f \in \mathcal{H}(D)$, y C un contorno simple cerrado, enteramente contenido en D . Para cualquier punto z_0 interior a C , se tiene:*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz.$$

Demostración. La demostración procede por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$. Aquí sólo recogeremos el caso $n = 1$.

Teniendo en cuenta la definición de derivada y el Teorema 5.1, escribimos:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i \Delta z} \left[\oint_C \frac{f(z)}{z - (z_0 + \Delta z)} dz - \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right] \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i \Delta z} \oint_C \frac{f(z)[(z-z_0) - (z-z_0-\Delta z)]}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)} dz \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)} dz. \end{aligned} \quad (12)$$

Ya que f es continua sobre el compacto C , está acotada en él: existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ ($z \in C$). Por otra parte, sea δ la distancia mínima entre z_0 y los puntos de C , y sea $z \in C$. Entonces, $|z - z_0| \geq \delta$ implica

$$\frac{1}{|z - z_0|^2} \leq \frac{1}{\delta^2}.$$

Además, eligiendo $|\Delta z| \leq \delta/2$, la desigualdad triangular inversa asegura que

$$|z - z_0 - \Delta z| \geq ||z - z_0| - |\Delta z|| \geq |z - z_0| - |\Delta z| \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2};$$

así,

$$\frac{1}{|z - z_0 - \Delta z|} \leq \frac{2}{\delta}.$$

Aplicando ahora el teorema ML (Teorema 2.12):

$$\begin{aligned} \left| \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)} dz - \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz \right| &= \left| \oint_C \frac{f(z)\Delta z}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2} dz \right| \\ &\leq \frac{2ML|\Delta z|}{\delta^3}, \end{aligned}$$

donde L es la longitud de C . El segundo miembro de esta desigualdad tiende a cero cuando $\Delta z \rightarrow 0$ por lo que, en vista de (12), hemos probado:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz.$$

Esta es la igualdad que se pretendía, con $n = 1$. □

Ejemplo 5.7. *Evaluar*

$$\oint_C \frac{z+1}{z^4+2iz^3} dz,$$

donde $C : |z| = 1$.

Resolución. El denominador del integrando es $z^4+2iz^3 = z^3(z+2i)$; luego, el integrando no es holomorfo en $z = 0$ ni en $z = -2i$, pero sólo $z = 0$ es interior a C . Escribimos dicho integrando como

$$\frac{z+1}{z^4+2iz^3} = \frac{z+1}{z^3(z+2i)}$$

y hacemos $z_0 = 0, n = 2$, y $f(z) = (z+1)/(z+2i)$ en el Teorema 5.6. La regla de derivación de cocientes proporciona $f''(z) = (2-4i)/(z+2i)^3$, así que $f''(0) = (2+i)/4$. Se concluye que

$$\oint_C \frac{z+1}{z^4+4z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}i.$$

□

Ejemplo 5.8. *Evaluar*

$$\int_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2} dz,$$

donde C es el contorno de la fig. 21.

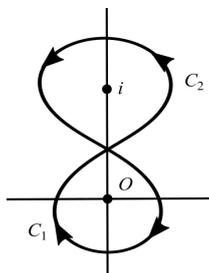


Figura 21. Ejemplo 5.8.

Resolución. Aunque C no es un contorno simple cerrado, podemos considerarlo unión de los dos contornos simples cerrados C_1 y C_2 que se señalan en la fig. 21. La curva C_1 está orientada negativamente, de modo que su opuesta $-C_1$ tiene orientación positiva. Escribimos entonces

$$\begin{aligned} \int_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2} dz &= \int_{C_1} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2} dz + \int_{C_2} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2} dz \\ &= -\oint_{-C_1} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2} dz + \oint_{C_2} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2} dz = -I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Para evaluar I_1 , hacemos $z_0 = 0$ y $f(z) = (z^3+3)/(z-i)^2$ en el Teorema 5.1. Como $f(0) = -3$, sigue que

$$I_1 = \oint_{-C_1} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i(-3) = -6\pi i.$$

Para evaluar I_2 , tomamos $z_0 = i$, $n = 1$ y $f(z) = (z^3 + 3)/z$ en el Teorema 5.6. Ahora $f'(z) = (2z^3 - 3)/z^2$ y $f'(i) = 3 + 2i$, con lo cual

$$I_2 = \oint_{C_2} \frac{z^3 + 3}{(z-i)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(i) = 2\pi i(3 + 2i) = -4\pi + 6\pi i.$$

Finalmente,

$$\int_C \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} dz = -I_1 + I_2 = 6\pi i + (-4\pi + 6\pi i) = -4\pi + 12\pi i = -4\pi(1 - 3i).$$

□

6 Algunas consecuencias de las fórmulas integrales de Cauchy

6.1 Toda función holomorfa es infinitamente derivable

El siguiente resultado está implícitamente contenido en el Teorema 5.6.

Teorema 6.1. *Supongamos que f es holomorfa en un dominio simplemente conexo D . Entonces f posee derivadas de todos los órdenes en cada punto $z \in D$. Además, las derivadas f', f'', f''', \dots son holomorfas en D .*

Acabamos de ver que si una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es holomorfa en un dominio simplemente conexo D , entonces f admite derivadas de cualquier orden en todo punto $z \in D$; en particular, f'', f''', \dots son continuas en D . Como

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \\ f''(z) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + i \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - i \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - i \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

también se infiere que las funciones reales u y v tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes en cada punto donde f es holomorfa.

6.2 Desigualdad de Cauchy

Teorema 6.2 (Desigualdad de Cauchy). *Supóngase que f es holomorfa en un dominio simplemente conexo D , que $z_0 \in D$, y que la circunferencia $C : |z - z_0| = r$ está completamente contenida en D . Si $|f(z)| \leq M$ ($z \in C$), entonces*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n}.$$

Demostración. Por hipótesis,

$$\left| \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \right| = \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{n+1}} \leq \frac{M}{r^{n+1}} \quad (z \in C).$$

Del Teorema 5.6 y el Teorema 2.12 se desprende que

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{n!M}{r^n}.$$

□

Observación 6.3. La constante M del Teorema 6.2 depende de la circunferencia $|z - z_0| = r$. Pero si $n = 0$, entonces $M \geq |f(z_0)|$ para cualquier circunferencia C centrada en z_0 y enteramente contenida en D . En otras palabras, ninguna cota superior de $|f(z)|$ sobre C puede ser menor que $|f(z_0)|$.

6.3 Teorema de Liouville

Aunque el resultado siguiente lleva el nombre del matemático francés Joseph Liouville (1809-1882), es muy probable que ya fuera conocido por Cauchy.

Teorema 6.4 (Liouville). *Las únicas funciones enteras y acotadas son las constantes.*

Demostración. Supongamos que la función f es entera y acotada, esto es, que, $|f(z)| \leq M$ ($z \in \mathbb{C}$). Entonces, para cada $z_0 \in \mathbb{C}$ y cada $r > 0$, el Teorema 6.2 proporciona $|f'(z_0)| \leq M/r$. Haciendo $r \rightarrow \infty$ encontramos que $f'(z_0) = 0$. Ya que $z_0 \in \mathbb{C}$ es arbitrario, f debe ser constante. □



Figura 22. Joseph Liouville (1809-1882).

6.4 Teorema fundamental del álgebra

Teorema 6.5 (Teorema fundamental del álgebra). *Si $p(z)$ es un polinomio no constante, entonces la ecuación $p(z) = 0$ tiene, al menos, una raíz.*

Demostración. Supongamos que el polinomio $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$, con $n > 0$, no se anula para

ningún $z \in \mathbb{C}$. Entonces la función recíproca de p , $f(z) = 1/p(z)$, es entera. Como

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \frac{1}{|z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0|} \\ &= \frac{1}{|z|^n |1 + a_{n-1}/z + \dots + a_1/z^{n-1} + a_0/z^n|} \\ &\leq \frac{1}{|z|^n |1 - |a_{n-1}/z| - \dots - |a_1/z^{n-1}| - |a_0/z^n||}, \end{aligned}$$

encontramos que $|f(z)| \rightarrow 0$ cuando $|z| \rightarrow \infty$, de modo que f está acotada en \mathbb{C} . El teorema de Liouville (Teorema 6.4) obliga entonces a que f sea constante, así que p también lo es, contradiciendo nuestra hipótesis inicial. Por consiguiente, debe existir al menos un $z \in \mathbb{C}$ tal que $p(z) = 0$. \square

6.5 Teorema de Morera

El siguiente resultado, debido al matemático italiano Giacinto Morera (1856-1909), es el recíproco del teorema de Cauchy-Goursat (Teorema 3.4).



Figura 23. Giacinto Morera (1856-1909).

Teorema 6.6. Si f es continua en un dominio simplemente conexo D , y si $\oint_C f(z) dz = 0$ para todo contorno cerrado C en D , entonces $f \in \mathcal{H}(D)$.

Demostración. Del hecho de que $\oint_C f(z) dz = 0$ para todo contorno cerrado C en D se infiere, razonando como en la demostración del Teorema 4.2, que la función continua f tiene una integral de contorno independiente del camino. En tal caso, el Teorema 4.9 implica que f admite una antiderivada F en D . Esta antiderivada es necesariamente holomorfa en D ; por el Teorema 6.1, $f = F'$ también es holomorfa. \square

Llegados a este punto, resulta oportuno recordar el Teorema 6.7, conocido de cursos anteriores, y compararlo con el Corolario 6.8.

Teorema 6.7. Sea $f(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ un campo vectorial continuo en un abierto conexo $D \subset \mathbb{R}^2$. Son equivalentes:

(i) Se tiene que $f = \nabla\phi$ para cierta función potencial $\phi \in C^1(D)$.

(ii) La integral de línea de f es independiente del camino en D .

(iii) La integral de línea de f a lo largo de cualquier camino cerrado regular a trozos contenido en D es nula.

Si, además, D es simplemente conexo y $P, Q \in C^1(D)$, cualquiera de los enunciados anteriores equivale al siguiente:

(iv) $Q_x = P_y$.

Corolario 6.8. Sea D un dominio de \mathbb{C} , y supongamos que f es continua en D . Los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) f tiene una antiderivada en D ;

(ii) f tiene una integral de contorno independiente del camino en D ;

(iii) la integral de f alrededor de cualquier contorno cerrado contenido en D es nula.

Si, además, D es simplemente conexo, cualquiera de los enunciados anteriores equivale al siguiente:

(iv) $f \in \mathcal{H}(D)$.

Demostración. Que (i) y (ii) son equivalentes es consecuencia del Corolario 4.8(ii) y el Teorema 4.9. De otra parte, si se verifica (i) entonces, por el Corolario 4.8(i), también se verifica (iii). Finalmente, es claro que (iii) implica (ii).

Si, además, D es simplemente conexo, (iv) implica (i) y (ii) en virtud de los Teoremas 4.10 y 4.2, respectivamente; y el teorema de Morera asegura que (iii) implica (iv). \square

6.6 Analiticidad de las funciones holomorfas

Hemos visto en el Tema 2 que la función suma de una serie de potencias es holomorfa. Cabe cuestionarse si, recíprocamente, toda función holomorfa en un punto es desarrollable en serie de potencias en un entorno de ese punto. La respuesta, afirmativa, viene dada por el siguiente teorema.

Teorema 6.9 (Taylor). Sean D un dominio, $f \in \mathcal{H}(D)$, y $z_0 \in D$. Entonces f admite una representación en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k, \quad (13)$$

válida en el disco de mayor radio centrado en z_0 y enteramente contenido en D .

Demostración. Denotamos por C la frontera del disco de mayor radio R centrado en z_0 y contenido en D , de modo que $|s - z_0| = R$ ($s \in C$); véase la fig. 24. Fijado un punto z en ese disco, la primera fórmula integral de Cauchy (Teorema 5.1) proporciona:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{s - z} ds = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{(s - z_0) - (z - z_0)} ds = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{s - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{s - z_0}} ds. \quad (14)$$

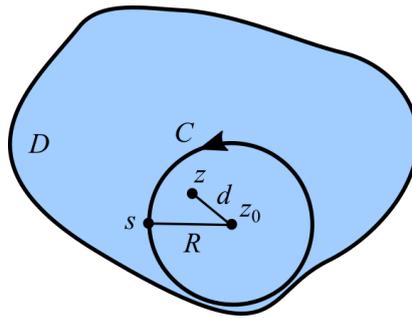


Figura 24. Contorno en la demostración del Teorema 6.9.

Sea $n \in \mathbb{N}$. La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica de razón $w \in \mathbb{C}$ es

$$\sum_{k=0}^n w^k = \frac{1-w^{n+1}}{1-w} = \frac{1}{1-w} - \frac{w^{n+1}}{1-w}.$$

Sigue que

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{k=0}^n w^k + \frac{w^{n+1}}{1-w}. \quad (15)$$

Haciendo aquí $w = (z - z_0)/(s - z_0)$, el segundo sumando del segundo miembro se convierte en

$$\frac{\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^{n+1}}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}} = \frac{(z-z_0)^{n+1}}{(s-z_0)^{n+1} - (s-z_0)^n(z-z_0)} = \frac{(z-z_0)^{n+1}}{(s-z_0)^n[(s-z_0) - (z-z_0)]} = \frac{(z-z_0)^{n+1}}{(s-z)(s-z_0)^n},$$

y (15) queda

$$\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^k + \frac{(z-z_0)^{n+1}}{(s-z)(s-z_0)^n}. \quad (16)$$

Insertando (16) en (14) resulta

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{s-z} \left[\sum_{k=0}^n \left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^k + \frac{(z-z_0)^{n+1}}{(s-z)(s-z_0)^n} \right] ds \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(z-z_0)^k}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{(s-z_0)^{k+1}} ds + \frac{(z-z_0)^{n+1}}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{(s-z)(s-z_0)^n} ds. \end{aligned}$$

De las fórmulas integrales de Cauchy (Teoremas 5.1 y 5.6) se desprende que

$$f(z) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k + R_n(z), \quad (17)$$

donde

$$R_n(z) = \frac{(z-z_0)^{n+1}}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{(s-z)(s-z_0)^n} ds.$$

Para completar la prueba, hemos de ver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(z)| = 0.$$

A tal fin, advertamos que, por la continuidad de f sobre C , existe $M > 0$ tal que $|f(s)| \leq M$ ($s \in C$), y pongamos $d = |z - z_0|$. Como $d < R$, la desigualdad triangular inversa permite escribir:

$$|s - z| = |(s - z_0) - (z - z_0)| \geq |s - z_0| - |z - z_0| = R - d.$$

Aplicando ahora el teorema *ML* (Teorema 2.12) y teniendo en cuenta que $d/R < 1$ resulta

$$|R_n(z)| \leq \frac{d^n}{2\pi} \frac{M}{(R-d)R^n} 2\pi R = \frac{MR}{R-d} \left(\frac{d}{R}\right)^n \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

como se pretendía. □

Definición 6.10. La expresión (17) se denomina fórmula de Taylor centrada en z_0 con resto R_n .

Observación 6.11. (i) El desarrollo en serie de Taylor (13) de una función holomorfa f , centrado en un punto z_0 , es único, independientemente del método que se utilice para obtenerlo.

(ii) De acuerdo con el Teorema 6.9, el radio de convergencia R de la serie (13) es la distancia del centro de la serie, z_0 , a la singularidad aislada de f más próxima, entendiendo por singularidad aislada un punto donde f deja de ser holomorfa aunque lo es en un entorno reducido de ese punto. El estudio de las singularidades aisladas de una función holomorfa será abordado en el Tema 4.

Ejemplo 6.12. Supongamos que la función

$$f(z) = \frac{3-i}{1-i+z}$$

es desarrollada en una serie de Taylor con centro en $z_0 = 4 - 2i$. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie?

Resolución. La función dada es holomorfa en todo \mathbb{C} excepto en $z = -1 + i$, que es una singularidad aislada de f . La distancia de $z = -1 + i$ a $z_0 = 4 - 2i$ es

$$|z - z_0| = \sqrt{(-1-4)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{34}.$$

Por tanto, el radio de convergencia que se pide es $R = \sqrt{34}$. □

Ejemplo 6.13. Encontrar los desarrollos en serie de

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

centrados en: (i) $z_0 = 0$; (ii) $z_0 = 2i$.

Demostración.

(i) La función f es suma de la serie geométrica de razón z , si $|z| < 1$:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

(ii) Se tiene que

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-2i) - (z-2i)} = \frac{1}{1-2i} \frac{1}{1 - \frac{z-2i}{1-2i}} = \frac{1}{1-2i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-2i}{1-2i} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-2i)^{n+1}} (z-2i)^n,$$

y esta serie converge para

$$\left| \frac{z-2i}{1-2i} \right| < 1,$$

es decir, para $|z-2i| < |1-2i| = \sqrt{5}$.

□

Observación 6.14. La función f del Ejemplo 6.13 puede ser representada por cualquiera de las dos series en el interior de la intersección de los círculos de convergencia de ambas (fig. 25). Fuera de esta intersección, al menos una de las dos series diverge.

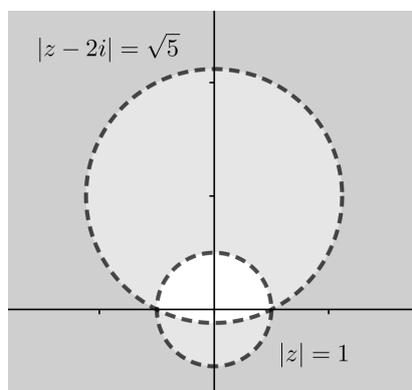


Figura 25. Las dos series del Ejemplo 6.13 convergen en la región no sombreada.

6.7 Principio de identidad de funciones holomorfas

Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Se tiene que $f \in C^1(\mathbb{R})$ se anula en $x = 0$ y en todos los puntos $x_n = 1/n\pi$ ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$). Por tanto, en cualquier entorno del origen hay infinitos ceros de f , es decir, el conjunto de los ceros de f tiene un punto de acumulación en el origen. Como veremos, este comportamiento contrasta marcadamente con el comportamiento de los ceros de las funciones holomorfas.

Teorema 6.15. Sean D un dominio en \mathbb{C} , f una función holomorfa en D , y

$$Z(f) = \{z \in D : f(z) = 0\}$$

el conjunto de los ceros de f en D . Los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) $Z(f)$ tiene un punto de acumulación en D , es decir, $Z(f)' \cap D \neq \emptyset$.

(ii) Existe un punto $a \in D$ tal que $f^{(n)}(a) = 0$ ($n \in \mathbb{N}_0$).

(iii) La función f es idénticamente nula en D .

Demostración. En primer lugar, veamos que (i) implica (ii). Por hipótesis, existe $a \in Z(f)' \cap D$. Sea $\rho > 0$ tal que $D(a, \rho) \subset D$. Alguna sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z(f) \cap D^*(a, \rho)$ es tal que $a_n \rightarrow a$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por otra parte, el teorema de Taylor (Teorema 6.9) afirma que

$$f(z) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (z \in D(a, \rho)), \quad (18)$$

siendo

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Queremos ver que todos estos coeficientes son nulos.

En efecto, por la continuidad de f se verifica que

$$f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0.$$

Reescribimos (18) teniendo en cuenta que $f(a) = 0$ y dividimos ambos miembros de (18) por $z-a$ para obtener

$$\frac{f(z)}{z-a} = c_1 + g_1(z) \quad (z \in D^*(a, \rho)), \quad (19)$$

donde la función

$$g_1(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-a)^{n-1}$$

es holomorfa en $D(a, \rho)$, con $g_1(a) = 0$. Evaluando (19) en a_n encontramos que $0 = c_1 + g_1(a_n)$, y tomando límites para $n \rightarrow \infty$ deducimos que

$$0 = c_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} g_1(a_n) = c_1 + g_1(a) = c_1.$$

Consecuentemente, $c_1 = 0$. Ahora procedemos por inducción sobre $k \in \mathbb{N}$. Supuesto probado que $c_j = 0$ para $j = 1, \dots, k$, podemos escribir:

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} = c_{k+1} + \sum_{j=k+2}^{\infty} c_j (z-a)^{j-k-1} \quad (z \in D^*(a, \rho)).$$

Definimos

$$g_{k+1}(z) = \sum_{j=k+2}^{\infty} c_j (z-a)^{j-k-1},$$

evaluamos la igualdad precedente en $z = a_n$ y tomamos límites cuando $n \rightarrow \infty$, con lo cual:

$$0 = c_{k+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} g_{k+1}(a_n) = c_{k+1} + g_{k+1}(a) = c_{k+1};$$

es decir, $c_{k+1} = 0$. Se concluye que $c_k = 0$ ($k \in \mathbb{N}_0$), como se pretendía.

Para ver que (ii) implica (iii), pongamos

$$A = \left\{ z \in D : f^{(k)}(z) = 0 \quad (k \in \mathbb{N}_0) \right\}.$$

Por hipótesis, $A \neq \emptyset$. Además, A es un cerrado relativo de D , puesto que es intersección de cerrados relativos:

$$A = \bigcap_{k=0}^{\infty} \left\{ z \in D : f^{(k)}(z) = 0 \right\}.$$

Fijemos $a \in A \subset D$. Como D es abierto, existe $\rho > 0$ tal que $D(a, \rho) \subset D$. El teorema de Taylor (Teorema 6.9) asegura que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{n!} (z-a)^n \quad (z \in D(a, \rho)),$$

así que $f(z) = 0$ para todo $z \in D(a, \rho)$. Pero entonces $f^{(k)}(z) = 0$ para todo $z \in D(a, \rho)$ y para cualquier $k \in \mathbb{N}_0$, obligando a que $D(a, \rho) \subset A$; luego, A es abierto. Ya que D es conexo, se concluye que $A = D$.

Que (iii) implica (i) es obvio. □

A continuación establecemos uno de los resultados más útiles de la teoría de funciones holomorfas. Este resultado afirma, en particular, que los valores de una función holomorfa en un dominio están determinados de forma única por los valores que dicha función toma en los puntos de una sucesión que converja a un punto del dominio.

Teorema 6.16 (Principio de identidad de funciones holomorfas). *Si dos funciones f, g , holomorfas en un dominio D , coinciden en un subconjunto de D que tiene algún punto de acumulación en D , entonces dichas funciones son idénticas en D .*

Demostración. Pongamos $h = f - g$. Por hipótesis, $Z(h)' \cap D \neq \emptyset$. El Teorema 6.15 implica entonces que h es idénticamente nula en D , es decir, que $f(z) = g(z)$ ($z \in D$). □

6.8 Principio del módulo máximo

Lema 6.17. *Sean D un dominio de \mathbb{C} y $f \in \mathcal{H}(D)$. Si $a \in D$, $r > 0$, y $D(a, r) \subset D$, entonces*

$$|f(a)| \leq \max\{|f(z)| : z \in C(a, r)\} = M(r).$$

Además, se da la igualdad en esta desigualdad si, y sólo si, f es constante en D .

Demostración. En virtud de la primera fórmula integral de Cauchy (Teorema 5.1), se verifica que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a+re^{it}) dt. \quad (20)$$

Por tanto,

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})| dt \leq M(r).$$

Si f es constante en D , es claro que $|f(a)| = M(r)$.

Recíprocamente, supongamos que $|f(a)| = M(r)$. Si $|f(a)| = M(r) = 0$, entonces $f = 0$ sobre $C(a, r)$ y, por el principio de identidad de funciones holomorfas (Teorema 6.16), necesariamente $f = 0$ en D . Sea, pues, $|f(a)| = M(r) \neq 0$. Multiplicando f , si es preciso, por un cierto $e^{i\theta}$, de modo que $f(a)e^{i\theta} > 0$, podemos suponer que $f(a) > 0$ (el módulo de f y $M(r)$ no varían). Consideramos por separado las partes real e imaginaria en la igualdad (20), para obtener:

$$0 < f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re f(a+re^{it}) dt.$$

Puesto que $\Re f(a+re^{it})$ es continua en $[0, 2\pi]$ y $\Re f(a+re^{it}) \leq M(r) = f(a)$, necesariamente $\Re f(a+re^{it}) = M(r) = f(a)$ ($t \in [0, 2\pi]$). En consecuencia, $\Im f(a+re^{it}) = 0$ ($t \in [0, 2\pi]$), es decir, f es constantemente igual a $f(a)$ sobre $C(a, r)$. Otra aplicación del principio de identidad de funciones holomorfas

(Teorema 6.16) prueba que f es constante en D . □

Proposición 6.18. Sean D un dominio de \mathbb{C} , $a \in D$ y $f \in \mathcal{H}(D)$, tales que

$$|f(a)| \geq |f(z)| \quad (z \in D).$$

Entonces f es constante en D .

Demostración. Sea $r > 0$ tal que $D(a, r) \subset D$. Por hipótesis,

$$|f(a)| \geq \max\{|f(z)| : z \in C(a, r)\} = M(r).$$

Por el Lema 6.17, sabemos que $|f(a)| \leq M(r)$. Luego, $|f(a)| = M(r)$ y, de nuevo por el Lema 6.17, concluimos que f es constante en D . □

Teorema 6.19 (Principio del módulo máximo). Supóngase que f es holomorfa y no constante en un dominio D . Entonces $|f(z)|$ alcanza su máximo en ∂D .

Demostración. Obviamente,

$$\max\{|f(z)| : z \in \bar{D}\} \geq \max\{|f(z)| : z \in \partial D\},$$

porque $\partial D \subset \bar{D}$. Supongamos que

$$\max\{|f(z)| : z \in \bar{D}\} > \max\{|f(z)| : z \in \partial D\}, \quad (21)$$

y sea $a \in \bar{D}$ tal que $|f(a)| = \max\{|f(z)| : z \in \bar{D}\}$. Necesariamente $a \in D$, pues $a \in \bar{D} = D \cup \partial D$ pero $a \notin \partial D$, debido a (21); la Proposición 6.18 fuerza entonces a que f sea constante sobre D , contradiciendo la hipótesis. En consecuencia,

$$\max\{|f(z)| : z \in \bar{D}\} = \max\{|f(z)| : z \in \partial D\}.$$

□

Ejemplo 6.20. Encontrar el módulo máximo de $f(z) = 2z + 5i$ en la región circular cerrada definida por la condición $|z| \leq 2$.

Resolución. Se tiene:

$$|2z + 5i|^2 = |2z|^2 - 20\Re(iz) + |5i|^2 = 4|z|^2 + 20\Im z + 25 \quad (z \in \mathbb{C}). \quad (22)$$

Ya que f es un polinomio, es holomorfa en la región definida por $|z| \leq 2$. En virtud del Teorema 6.19,

$$\max_{|z| \leq 2} |f(z)| = \max_{|z|=2} |f(z)| = \max_{|z|=2} |2z + 5i|.$$

Pero, según (22),

$$|2z + 5i| = \sqrt{41 + 20\Im z} \quad (|z| = 2).$$

Esta última expresión es máxima sobre $|z| = 2$ cuando lo es $\Im z$, es decir, cuando $z = 2i$. Así pues,

$$\max_{|z| \leq 2} |f(z)| = \max_{|z|=2} \sqrt{41 + 20\Im z} = \sqrt{41 + 20 \cdot 2} = \sqrt{81} = 9.$$

□

Observación 6.21. En el Ejemplo 6.20, $f(z) = 0$ únicamente en $z = -5i/2$, y este punto es exterior a la región definida por $|z| \leq 2$. Aplicando el Teorema 6.19 a $g(z) = 1/f(z)$, que es holomorfa en D , vemos que f alcanza su mínimo en $|z| = 2$ y donde lo alcanza $\Im z$, es decir, en $z = -2i$. Consecuentemente,

$$\min_{|z| \leq 2} |f(z)| = \min_{|z|=2} \sqrt{41 + 20\Im z} = \sqrt{41 + 20 \cdot (-2)} = \sqrt{1} = 1.$$

7 Ejercicios resueltos

1. Evaluar las siguientes integrales a lo largo del contorno C que se indica en cada caso:

- (i) $\int_C \frac{z+1}{z} dz$, C la semicircunferencia unidad derecha desde $z = -i$ hasta $z = i$;
- (ii) $\int_C (x^2 + iy^3) dz$, C el segmento rectilíneo desde $z = 1$ hasta $z = i$;
- (iii) $\int_C \Im(z-i) dz$, C el camino regular a trozos formado por el arco de $|z| = 1$ desde $z = 1$ hasta $z = i$, y el segmento rectilíneo desde $z = i$ hasta $z = -1$.

Resolución.

(i) Pongamos $f(z) = (z+1)/z$. Se tiene:

$$z(t) = e^{it}, \quad z'(t) = ie^{it}, \quad f[z(t)] = \frac{e^{it} + 1}{e^{it}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Por tanto,

$$\int_C \frac{z+1}{z} dz = i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{it} + 1}{e^{it}} e^{it} dt = i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^{it} + 1) dt = \left[e^{it} + it \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = (2 + \pi)i.$$

(ii) Pongamos $f(x+iy) = x^2 + iy^3$. Se tiene:

$$z(t) = (1-t) + it, \quad z'(t) = -1 + i, \quad f[z(t)] = (1-t)^2 + it^3 \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_C (x^2 + iy^3) dz &= (-1+i) \int_0^1 [(1-t)^2 + it^3] dt = (-1+i) \int_0^1 [(1-2t+t^2) + it^3] dt \\ &= (-1+i) \left[t - t^2 + \frac{t^3}{3} + i \frac{t^4}{4} \right]_0^1 = (-1+i) \left(\frac{1}{3} + \frac{i}{4} \right) = \frac{-7+i}{12}. \end{aligned}$$

(iii) Pongamos $f(x+iy) = \Im(z-i) = y-1$. Sobre $C_1 : z_1(t) = e^{it}$ ($0 \leq t \leq \pi/2$), se tiene:

$$z_1'(t) = ie^{it}, \quad f[z_1(t)] = \operatorname{sen} t - 1 \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \Im(z-i) dz &= i \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} t - 1)(\operatorname{cost} + i \operatorname{sen} t) dt = i \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\operatorname{sen} 2t}{2} - \operatorname{cost} + i(\operatorname{sen}^2 t - \operatorname{sen} t) \right] dt \\ &= i \left[-\frac{\cos 2t}{4} - \operatorname{sen} t + i \left(\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + \operatorname{cost} \right) \right]_0^{\pi/2} = 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

Sobre $C_2 : z_2(t) = -t + (1-t)i$ ($0 \leq t \leq 1$), se tiene:

$$z_2'(t) = -(1+i), \quad f[z_2(t)] = -t \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Por tanto,

$$\int_{C_2} \Im(z-i) dz = (1+i) \int_0^1 t dt = (1+i) \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1+i}{2}.$$

Se concluye que

$$\int_C \Im(z-i) dz = \int_{C_1} \Im(z-i) dz + \int_{C_2} \Im(z-i) dz = \left(1 - \frac{\pi}{4} - \frac{i}{2}\right) + \frac{1+i}{2} = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

□

2. Evaluar la integral

$$\oint_C \Re z dz$$

a lo largo del contorno C mostrado en la fig. 26(a).

Resolución. Parametrizamos los tres tramos de C y calculamos la integral sobre cada tramo. Sea

$$C_1 : z_1(t) = t, \quad z_1'(t) = 1, \quad f[z_1(t)] = t \quad (0 \leq t \leq 1);$$

entonces,

$$\int_{C_1} \Re z dz = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Por otro lado,

$$C_2 : z_2(t) = 1 + it, \quad z_2'(t) = i, \quad f[z_2(t)] = 1 \quad (0 \leq t \leq 1);$$

entonces,

$$\int_{C_2} \Re z dz = i \int_0^1 dt = i.$$

Además,

$$-C_3 : z_3(t) = (1+i)t, \quad z_3'(t) = 1+i, \quad f[z_3(t)] = t \quad (0 \leq t \leq 1);$$

luego,

$$\int_{-C_3} \Re z dz = (1+i) \int_0^1 t dt = (1+i) \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1+i}{2}.$$

Se concluye que

$$\oint_C \Re z dz = \int_{C_1} \Re z dz + \int_{C_2} \Re z dz - \int_{-C_3} \Re z dz = \frac{1}{2} + i - \frac{1+i}{2} = \frac{i}{2}.$$

□

3. Encontrar una cota superior para el módulo de la integral

$$\int_C (z^2 + 4) dz,$$

donde C es el segmento rectilíneo que une $z = 0$ con $z = 1 + i$.

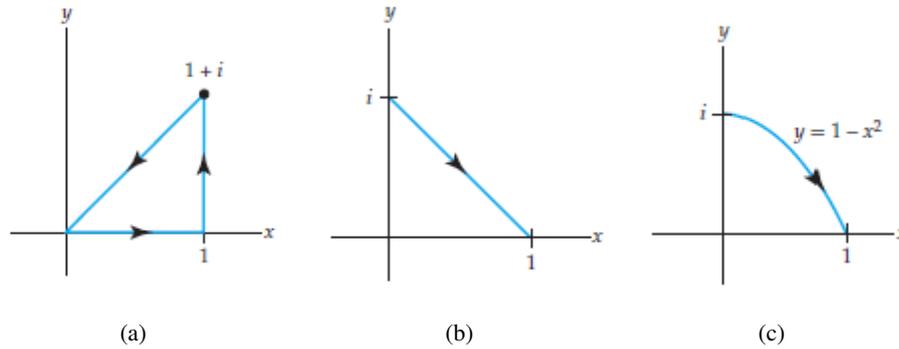


Figura 26

Resolución. Una parametrización de C es $z(t) = (1+i)t$ ($0 \leq t \leq 1$). Por tanto, sobre C ,

$$|z^2 + 4| \leq |z|^2 + 4 = |(1+i)t|^2 + 4 = 2t^2 + 4 \leq 6 = M.$$

Como la longitud de C es $|1+i| = \sqrt{2} = L$, el teorema ML (Teorema 2.12) asegura que

$$\left| \int_C (z^2 + 4) dz \right| \leq ML = 6\sqrt{2}.$$

□

4. Probar que $\oint_C \operatorname{tg} z dz = 0$, siendo $C : |z| = 1$.

Resolución. Los únicos ceros de $\cos z$ son los reales:

$$\{z \in \mathbb{C} : \cos z = 0\} = \left\{ \frac{(2n+1)\pi}{2} : n \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots \right\}.$$

Ninguno de ellos está sobre o dentro de $C : |z| = 1$; luego, el integrando $f(z) = \operatorname{tg} z = \operatorname{sen} z / \cos z$ es holomorfo sobre y dentro de C . El resultado se deduce del Corolario 3.5. □

5. Evaluar la integral

$$\oint_C \frac{2z+1}{z^2+z} dz$$

alrededor de los siguientes contornos cerrados: (i) $C : |z| = 1/2$; (ii) $C : |z| = 2$; (iii) $C : |z - 3i| = 1$.

Resolución. Los ceros del denominador del integrando son $z = 0$, $z = -1$. Descomponiendo el integrando en fracciones simples encontramos que

$$\oint_C \frac{2z+1}{z^2+z} = \oint_C \frac{dz}{z} + \oint_C \frac{dz}{z+1}. \tag{23}$$

(i) Como $z = 0$ es interior al contorno C , mientras que $z = -1$ es exterior a él, la primera integral del segundo miembro de (23) vale $2\pi i$ (Proposición 3.9), mientras que la segunda es nula (Corolario 3.5). Por tanto, la integral pedida vale

$$\oint_C \frac{2z+1}{z^2+z} dz = 2\pi i.$$

- (ii) Ahora $z = 0$ y $z = -1$ son ambos interiores al contorno C , así que cada una de las integrales del segundo miembro de (23) vale $2\pi i$ (Proposición 3.9). Por tanto, la integral pedida vale

$$\oint_C \frac{2z+1}{z^2+z} dz = 4\pi i.$$

- (iii) Los dos puntos $z = 0$ y $z = -1$ son exteriores a la circunferencia $C : |z - 3i| = 1$. Por el Corolario 3.5,

$$\oint_C \frac{2z+1}{z^2+z} dz = 0.$$

□

6. Evaluar las siguientes integrales a lo largo de los contornos cerrados C que se indican en cada caso:

- (i) $\oint_C \operatorname{Log}(z+10) dz$, $C : |z| = 2$;
(ii) $\oint_C \left(\frac{e^z}{z+3} - 3\bar{z} \right) dz$, $C : |z| = 1$.

Resolución.

- (i) El integrando es holomorfo en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -10]$, y el contorno $C : |z| = 2$ está enteramente contenido en este dominio. Se desprende del teorema de Cauchy-Goursat (Teorema 3.4, o Corolario 3.5) que

$$\oint_C \operatorname{Log}(z+10) dz = 0.$$

- (ii) Se tiene:

$$\oint_C \left(\frac{e^z}{z+3} - 3\bar{z} \right) dz = \oint_C \frac{e^z}{z+3} dz - 3 \oint_C \bar{z} dz.$$

Analizamos el segundo miembro. El integrando de la primera integral es holomorfo excepto en $z = -3$; dado que este punto es exterior a $C : |z| = 1$, el Teorema 3.4 (o el Corolario 3.5) permiten concluir que la integral vale cero. En cuanto a la segunda integral, nótese que si $|z| = 1$ entonces $\bar{z} = 1/z$ y, como $z = 0$ está encerrado por C , la Proposición 3.9 da para esta integral el valor $2\pi i$. Consecuentemente,

$$\oint_C \left(\frac{e^z}{z+3} - 3\bar{z} \right) dz = -3 \cdot 2\pi i = -6\pi i.$$

□

7. Evaluar la integral

$$\int_C (z^2 - z + 2) dz$$

a lo largo de los contornos C que se muestran en las siguientes figuras:

- (i) fig. 26(b), desde $z = i$ hasta $z = 1$;
(ii) fig. 26(c), desde $z = i$ hasta $z = 1$.

Resolución. La función $F(z) = z^3/3 - z^2/2 + 2z$ es una antiderivada del integrando $f(z) = z^2 - z + 2$, y los dos contornos tienen los mismos puntos inicial y final. Aplicando el Teorema 4.5 se obtiene, en ambos casos:

$$\int_C (z^2 - z + 2) dz = \left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + 2z \right]_i^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(-\frac{i}{3} + \frac{1}{2} + 2i \right) = \frac{4 - 5i}{3}.$$

□

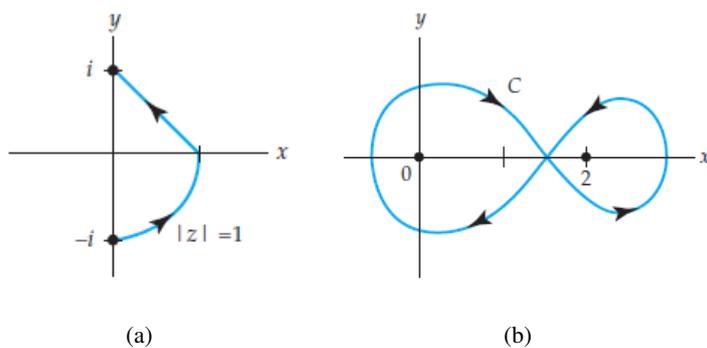


Figura 27

8. Evaluar la integral $\int_C (4z - 1) dz$ para el contorno dado en la fig. 27(a): (i) usando un contorno alternativo; (ii) mediante el teorema fundamental del cálculo para integrales de contorno.

Resolución.

- (i) Como la función $f(z) = 4z - 1$ es entera, tiene una integral de contorno independiente del camino en \mathbb{C} (Teorema 4.2). Por tanto, podemos sustituir el contorno dado por el segmento rectilíneo que une los puntos $-i$ e i , para el que se cumple: $z(t) = it$ ($-1 \leq t \leq 1$), $z'(t) = i$, $f[z(t)] = 4ti - 1$ ($-1 \leq t \leq 1$). Resulta así que

$$\int_C (4z - 1) dz = i \int_{-1}^1 (4ti - 1) dt = i [2t^2i - t]_{-1}^1 = -2i.$$

- (ii) Una antiderivada de f es $F(z) = 2z^2 - z$ ($z \in \mathbb{C}$). Aplicando la regla de Barrow para integrales de contorno (Teorema 4.5):

$$\int_C (4z - 1) dz = [2z^2 - z]_{-i}^i = -2i.$$

□

9. Calcular la integral $\int_C 2z dz$, donde $C : z(t) = 2t^3 + i(t^4 - 4t^3 + 2)$, $-1 \leq t \leq 1$.

Resolución. La función $F(z) = z^2$ es una antiderivada de $f(z) = 2z$ en \mathbb{C} . Por otra parte, el origen y el extremo del contorno C son los puntos $z(-1) = -2 + 7i$, $z(1) = 2 - i$, respectivamente. En virtud de la regla de Barrow para integrales de contorno (Teorema 4.5),

$$\int_C 2z dz = z^2 \Big|_{-2+7i}^{2-i} = (2-i)^2 - (-2+7i)^2 = 4 - 4i - 1 - (4 - 28i - 49) = 48 + 24i.$$

□

10. Evaluar las siguientes integrales usando el segundo teorema fundamental del cálculo para integrales de contorno (Teorema 4.5), y expresar el resultado en forma binómica:

- (i) $\int_C \frac{1}{z} dz$, C la poligonal con vértices en los puntos $-i, 2, i/2, i$;
- (ii) $\int_{-4i}^{4i} \frac{1}{z^2} dz$, C cualquier contorno que no atraviese el origen;
- (iii) $\int_C \frac{1}{4z^{1/2}} dz$, C el arco de circunferencia $z(t) = 4e^{it}$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ (considerar el valor principal de la raíz cuadrada).

Resolución.

- (i) Existe un entorno de C enteramente contenido en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$; en ese entorno, el integrando tiene antiderivada $F(z) = \text{Log } z$, donde la función logaritmo principal viene dada por $\text{Log } z = \ln |z| + i \text{Arg } z$. Luego,

$$\int_C \frac{1}{z} dz = \int_{-i}^i \frac{1}{z} dz = \text{Log } z \Big|_{-i}^i = \text{Log } i - \text{Log}(-i) = i[\text{Arg } i - \text{Arg}(-i)] = i \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \pi i.$$

- (ii) Existe un entorno de C que no contiene a $z = 0$; en ese entorno, el integrando tiene antiderivada $F(z) = -1/z$. Por tanto,

$$\int_{-4i}^{4i} \frac{1}{z^2} dz = -\frac{1}{z} \Big|_{-4i}^{4i} = -\frac{2}{4i} = \frac{i}{2}.$$

- (iii) Existe un entorno de C enteramente contenido en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$; en ese entorno, el integrando tiene antiderivada $F(z) = z^{1/2}/2$, donde la función raíz cuadrada principal es

$$z^{1/2} = |z|^{1/2} e^{i(\text{Arg } z)/2} = |z|^{1/2} \left[\cos \left(\frac{\text{Arg } z}{2} \right) + i \text{sen} \left(\frac{\text{Arg } z}{2} \right) \right].$$

Además, el origen y el extremo de C son, respectivamente: $z(-\pi/2) = -4i$, $z(\pi/2) = 4i$. Así pues,

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{4z^{1/2}} dz &= \int_{-4i}^{4i} \frac{1}{4z^{1/2}} dz = \frac{z^{1/2}}{2} \Big|_{-4i}^{4i} = \frac{1}{2} |4i|^{1/2} \left[\left(\cos \frac{\pi/2}{2} + i \text{sen} \frac{\pi/2}{2} \right) - \left(\cos \frac{\pi/2}{2} - i \text{sen} \frac{\pi/2}{2} \right) \right] \\ &= \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \text{sen} \frac{\pi}{4} \right) - \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \text{sen} \frac{\pi}{4} \right) = 2i \text{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{2i}{\sqrt{2}} = i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

□

11. Evaluar la integral $\oint_C \frac{3z+1}{z(z-2)^2} dz$, donde C es el contorno de la fig. 27(b).

Resolución. Descomponemos $C = -C_1 + C_2$, donde $-C_1$ denota el bucle de C que encierra a $z = 0$ y C_2 es el bucle de C que encierra a $z = 2$, de modo que

$$\oint_C \frac{3z+1}{z(z-2)^2} dz = \oint_{-C_1} \frac{3z+1}{z(z-2)^2} dz + \oint_{C_2} \frac{3z+1}{z(z-2)^2} dz = I_1 + I_2.$$

Por el Teorema 5.1, con $f(z) = (3z+1)/(z-2)^2$ y $z_0 = 0$:

$$I_1 = \oint_{-C_1} \frac{3z+1}{z(z-2)^2} dz = - \oint_{C_1} \frac{3z+1}{z(z-2)^2} dz = -2\pi i f(0) = -2\pi i \frac{3z+1}{(z-2)^2} \Big|_{z=0} = -\frac{\pi i}{2}.$$

Análogamente, aplicando el Teorema 5.6, con $f(z) = (3z + 1)/z$, $z_0 = 2$ y $n = 1$:

$$I_2 = \oint_{C_2} \frac{3z+1}{z(z-2)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(2) = -2\pi i \left. \frac{1}{z^2} \right|_{z=2} = -\frac{\pi i}{2}.$$

Se concluye que

$$\oint_C \frac{3z+1}{z(z-2)^2} dz = I_1 + I_2 = -\pi i.$$

□

12. Usar las fórmulas integrales de Cauchy para evaluar las siguientes integrales a lo largo del contorno cerrado que se indica en cada caso:

(i) $\oint_C \frac{z^2+4}{z^2-5iz-4} dz$, $C : |z-3i| = 1.3$;

(ii) $\oint_C \frac{e^{z^2}}{(z-i)^3} dz$, $C : |z-i| = 1$;

(iii) $\oint_C \frac{\cos 2z}{z^5} dz$, $C : |z| = 1$;

(iv) $\oint_C \frac{1}{z^2(z^2+1)} dz$, $C : |z-i| = 3/2$.

Resolución.

(i) El denominador del integrando admite la factorización $z^2 - 5iz - 4 = (z-i)(z-4i)$, y por lo tanto tiene raíces $z = i$ y $z = 4i$, de las cuales tan sólo $z_0 = 4i$ está encerrada por $C : |z-3i| = 1.3$. Aplicando el Teorema 5.1,

$$\oint_C \frac{z^2+4}{z^2-5iz-4} dz = \oint_C \frac{z^2+4}{z-4i} dz = 2\pi i \left. \frac{z^2+4}{z-i} \right|_{z=4i} = -8\pi.$$

(ii) Como $z_0 = i$ está encerrado por $C : |z-i| = 1$, ponemos $f(z) = e^{z^2}$ y aplicamos el Teorema 5.6, con $n = 2$, para obtener:

$$\oint_C \frac{e^{z^2}}{(z-i)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f^{(2)}(i) = \pi i \left[2e^{z^2}(1+2z^2) \right]_{z=i} = -\frac{2\pi i}{e}.$$

(iii) El punto $z_0 = 0$ está dentro de $C : |z| = 1$. Hacemos $f(z) = \cos 2z$ y aplicamos el Teorema 5.6, con $n = 4$:

$$\oint_C \frac{\cos 2z}{z^5} dz = \frac{2\pi i}{4!} f^{(4)}(0) = \frac{\pi i}{12} 16 \cos 2z \Big|_{z=0} = \frac{4\pi i}{3}.$$

(iv) El denominador del integrando puede ser factorizado en la forma

$$z^2(z^2+1) = z^2(z+i)(z-i);$$

luego, tiene raíces $z = 0$, $z = i$ y $z = -i$, de las cuales únicamente las dos primeras son interiores a $C : |z-i| = 3/2$. Introducimos circunferencias C_1 , C_2 centradas en $z = 0$, $z = i$, respectivamente, de radios lo suficientemente pequeños como para que ambas queden dentro de C (fig. 28), y aplicamos la versión del teorema de Cauchy-Goursat para dominios múltiplemente conexos (Teorema 3.12):

$$\oint_C \frac{1}{z^2(z^2+1)} dz = \oint_{C_1} \frac{1}{z^2(z^2+1)} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z^2(z^2+1)} dz = I_1 + I_2.$$

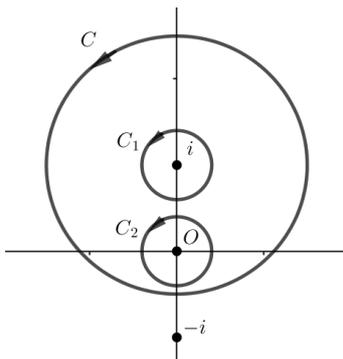


Figura 28. Contornos en el Ejercicio 12(iv).

Ahora, por el Teorema 5.6, con $f(z) = 1/(z^2 + 1)$, $z_0 = 0$ y $n = 1$:

$$I_1 = \oint_{C_1} \frac{1}{z^2(z^2 + 1)} dz = \oint_{C_1} \frac{\frac{1}{z^2 + 1}}{z^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(0) = -2\pi i \left. \frac{2z}{(z^2 + 1)^2} \right|_{z=0} = 0.$$

Similarmente, el Teorema 5.1, con $f(z) = 1/[z^2(z + i)]$ y $z_0 = i$, proporciona:

$$I_2 = \oint_{C_2} \frac{1}{z^2(z^2 + 1)} dz = \oint_{C_2} \frac{\frac{1}{z^2(z + i)}}{z - i} dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i \left. \frac{1}{z^2(z + i)} \right|_{z=i} = -\pi.$$

Se concluye que

$$\oint_C \frac{1}{z^2(z^2 + 1)} dz = I_1 + I_2 = -\pi.$$

□

- 13. (i) Probar que la imagen de una función entera no constante es densa en \mathbb{C} .
- (ii) Deducir que si $f = u + iv$ es entera y no constante, entonces $u(\mathbb{C}) = v(\mathbb{C}) = \mathbb{R}$.

Resolución.

- (i) Demostraremos la implicación contrarrecíproca. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, y supongamos que existe $a \in \mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{C})}$. Entonces, algún $\rho > 0$ es tal que $\overline{D}(a, \rho) \cap f(\mathbb{C}) = \emptyset$, es decir, $|f(z) - a| > \rho$ ($z \in \mathbb{C}$). Pongamos

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - a} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Claramente, g es entera, y está acotada ya que

$$|g(z)| < \frac{1}{\rho} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Por el teorema de Liouville (Teorema 6.4), g es constante, obligando a que f también lo sea.

- (ii) En efecto: por (i), $u(\mathbb{C})$ y $v(\mathbb{C})$ no pueden estar mayorados ni minorados en \mathbb{C} , y como son subconjuntos conexos de \mathbb{R} , deben ser intervalos. Consecuentemente, $u(\mathbb{C}) = v(\mathbb{C}) = \mathbb{R}$.

□

14. Demostrar que si $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$, con $n > 0$, es un polinomio no constante de grado n , entonces $p(z) = 0$ tiene exactamente n raíces (contando multiplicidades). A tal fin, seguir la línea argumental que se esboza a continuación.

(i) Verificar que si $n > 0$ y $p(w) = 0$, entonces

$$p(z) = p(z) - p(w) = (z^n - w^n) + a_{n-1}(z^{n-1} - w^{n-1}) + \dots + a_1(z - w).$$

(ii) Deducir que $p(z) = (z - w)q(z)$, donde q es un polinomio de grado $n - 1$.

(iii) Concluir que la ecuación $p(z) = 0$ tiene exactamente n raíces.

Resolución.

(i) Este enunciado es de verificación trivial. La existencia de w está garantizada por el Teorema 6.5.

(ii) Como

$$\frac{z^k - w^k}{z - w} = z^{k-1} + z^{k-2}w + z^{k-3}w^2 + \dots + zw^{k-2} + w^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

sacando factor común $z - w$ en (i) resulta

$$\begin{aligned} p(z) &= (z - w) \left[\frac{z^n - w^n}{z - w} + a_{n-1} \frac{z^{n-1} - w^{n-1}}{z - w} + \dots + a_1 \right] \\ &= (z - w) [q_{n-1}(z) + a_{n-1}q_{n-2}(z) + \dots + q_0(z)], \end{aligned}$$

donde $q_k(z)$ denota un polinomio de grado k , $k = 0, \dots, n - 1$, con $q_0(z) = a_1$. Por tanto, se verifica (ii).

(iii) Procedemos por inducción sobre n . Si $n = 1$, es claro que $p(z)$ tiene exactamente una raíz. Si $n = 2$ entonces, en la factorización (ii), $q(z)$ es un polinomio de grado 1; por tanto, $q(z)$ tiene una raíz, y $p(z)$ tiene exactamente 2 raíces. Suponiendo el resultado cierto para $n - 1$, probémoslo para n . Cuando $p(z)$ tiene grado n , el polinomio $q(z)$ en la factorización (ii) tiene grado $n - 1$ y, por hipótesis inductivas, exactamente $n - 1$ raíces. Se concluye que $p(z)$ tiene exactamente n raíces.

□

15. Supongamos que la frontera C de la región circular cerrada R definida por $|z| \leq 1$ está parametrizada por $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Considerando $|f[z(t)]|$, hallar el módulo máximo y el módulo mínimo de la función holomorfa $f(z) = -2iz^2 + 5$, y los puntos $z(t)$ del contorno C donde se alcanzan esos extremos.

Resolución. Comenzamos advirtiendo que los ceros de f son exteriores a $|z| \leq 1$, lo que da sentido al problema de mínimo (véase la Observación 6.21). Por el principio del módulo máximo (Teorema 6.19):

$$\max_{|z| \leq 1} |f(z)| = \max_{|z|=1} |f(z)| = \max_{|z|=1} |-2iz^2 + 5|,$$

y análogamente para el mínimo. Ahora bien,

$$\begin{aligned} |-2iz^2 + 5|^2 &= |-2iz^2|^2 + 2\Re(-2iz^2 \cdot \bar{5}) + |5|^2 \\ &= 4|z|^4 - 20\Re(iz^2) + 25 = 29 + 20\Im z^2 \quad (|z| = 1). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\Im z^2 = 2\Re z \Im z$ y atendiendo a la parametrización sugerida para $C : |z| = 1$ resulta que, sobre C ,

$$\Im z^2(t) = 2 \cos t \sin t = \sin 2t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Dado que es equivalente maximizar/minimizar $|f[z(t)]|$ y $|f[z(t)]|^2$, el problema queda reducido a encontrar los extremos de la función real de una variable real

$$g(t) = |f[z(t)]|^2 = 29 + 20 \sin 2t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Los puntos críticos de g , candidatos a extremos, son los ceros de la derivada $g'(t) = 40 \cos 2t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$); es decir, $t_1 = \pi/4$, $t_2 = 3\pi/4$, $t_3 = 5\pi/4$ y $t_4 = 7\pi/4$. Evaluamos g en estos puntos y en los extremos del intervalo $[0, 2\pi]$, encontrando que

$$g(0) = g(2\pi) = 29, \quad g(\pi/4) = g(5\pi/4) = 49, \quad g(3\pi/4) = g(7\pi/4) = 9.$$

Por tanto, el módulo máximo se alcanza en los puntos de C

$$z(\pi/4) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad z(5\pi/4) = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$$

y el valor de este máximo es 7, mientras que el módulo mínimo se alcanza en los puntos de C

$$z(3\pi/4) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad z(7\pi/4) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

y el valor de este mínimo es 3. □

16. Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, consideremos los conjuntos

$$K_n = \{z \in \Omega : |z| \leq n, d(z, \partial\Omega) \geq n^{-1}\} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

donde

$$d(z, \partial\Omega) = \inf_{w \in \partial\Omega} |z - w|$$

es la distancia del complejo z a la frontera $\partial\Omega$ de Ω .

Demostrar que la sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una *exhaución compacta* de Ω , es decir, verifica las siguientes propiedades:

- (i) K_n ($n \in \mathbb{N}$) es compacto.
- (ii) $K_n \subset K_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$).
- (iii) $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

Resolución.

- (i) Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $\{z \in \partial\Omega : d(z, \partial\Omega) \geq n^{-1}\} = \emptyset$, se tiene que

$$K_n = \{z \in \overline{\Omega} : |z| \leq n, d(z, \partial\Omega) \geq n^{-1}\}.$$

Claramente, K_n está acotado, porque está contenido en el disco cerrado centrado en el origen y de radio n . Además, ya que la distancia de un punto a un conjunto es una función continua, la antiimagen de conjuntos cerrados por una función continua es un conjunto cerrado, y la intersección de cerrados es cerrada, K_n es un conjunto cerrado. Al ser cerrado y acotado, K_n es compacto.

- (ii) Esta propiedad es evidente, toda vez que $|z| \leq n \leq n+1$ y $d(z, \partial\Omega) \geq n^{-1} \geq (n+1)^{-1}$ ($z \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$).
- (iii) Sea $z \in \Omega$. Puesto que $\partial\Omega$ es un conjunto cerrado y $z \notin \partial\Omega$, se tiene que $d(z, \partial\Omega) > 0$. Por tanto, existe $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que $|z| \leq n$ y $d(z, \partial\Omega) \geq n^{-1}$, en cuyo caso $z \in K_n$.

□

17. Sean D un dominio de \mathbb{C} , $f \in \mathcal{H}(D)$ una función no idénticamente nula en D , y

$$Z(f) = \{z \in D : f(z) = 0\}$$

el conjunto de los ceros de f en D . Probar:

- (i) Todo punto de $Z(f)$ es un punto aislado de $Z(f)$.
- (ii) $Z(f)$ es numerable.

Resolución.

- (i) Como f no es idénticamente nula, el Teorema 6.15 impide que $Z(f)$ tenga puntos de acumulación en D .
- (ii) Basta advertir que el abierto D es unión numerable de compactos (Ejercicio 16), y que $Z(f) \cap K$ ha de ser finito para todo compacto $K \subset D$.

□