

Apuntes de Variable Compleja

Tema 1: El sistema de los números complejos

Isabel Marrero

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de La Laguna

Índice

1	Introducción	3
2	El cuerpo complejo \mathbb{C}	3
3	Orden y \mathbb{C}	5
4	Conjugación	5
5	El plano complejo	6
6	Módulo de un número complejo	8
7	Argumento de un número complejo	13
7.1	Formas trigonométrica, exponencial y polar de un número complejo	15
7.2	Argumento y argumento principal	16
8	Potenciación y radicación	18
9	Topología del plano complejo	22
9.1	Conexidad	23
9.2	Sucesiones de números complejos	23
9.3	Compacidad	27
9.4	Series de números complejos	28
10	El plano complejo extendido	31
11	Ejercicios resueltos	35

1 Introducción

No cabe atribuir a un único matemático la «invención» de los números complejos. La controversia sobre el uso de estos números existía ya antes del siglo XVI y su empleo pudo ser más o menos soslayado hasta entonces, pero fue en esa época, al buscar soluciones de ecuaciones polinómicas de grado 3 mediante fórmulas que involucraran radicales, cuando los matemáticos se vieron obligados a admitir la existencia de otras clases de números más allá de los enteros positivos. Ecuaciones como $x^2 + 2x + 2 = 0$ ó $x^3 = 6x - 4$, que tenían como «soluciones» $1 + \sqrt{-1}$ y $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-2}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-2}}$, causaban especial consternación entre la comunidad matemática, porque todos sabían que los números cuyo cuadrado es negativo, como $\sqrt{-1}$ y $\sqrt{-2}$, no existen: tales «números» existen sólo en la imaginación. Pero, con el paso del tiempo, estos «números imaginarios» no desaparecieron; principalmente porque los matemáticos, como grupo, odian deshacerse de las cosas, son tenaces, y algunos, incluso, son prácticos. En particular, Euler sostuvo que aunque «existen sólo en nuestra imaginación [...] nada nos impide [...] utilizarlos en nuestros cálculos». Ya en el siglo XVIII, Gauss situó los «números imaginarios», o «números complejos» como empezaban a ser llamados, sobre una base lógica y consistente, tratándolos como extensión del sistema de los números reales.

En este primer tema introduciremos los números complejos. Comenzamos viendo que tienen estructura de cuerpo conmutativo (sección 2), y que no existe un orden en \mathbb{C} compatible con esta estructura algebraica (sección 3). La sección 4 se dedica a la conjugación, y la 5 a la interpretación geométrica de los números complejos como puntos del plano. En las secciones 6 y 7 estudiamos las nociones de módulo y argumento de un número complejo, respectivamente. En la sección 8 nos detenemos en las operaciones de potenciación y radicación. La sección 9 aborda la topología usual de \mathbb{C} , mientras que la sección 10 describe la esfera de Riemann. Concluimos el tema con una selección de ejercicios resueltos.

2 El cuerpo complejo \mathbb{C}

Definición 2.1. Se denomina unidad imaginaria al símbolo i , definido por la propiedad $i^2 = -1$. Un número complejo es cualquier objeto matemático de la forma $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Los números reales a y b se denominan parte real y parte imaginaria de z , y se denotan $\Re z$, $\Im z$, respectivamente. De un número complejo z cuya parte real sea cero se dirá que es imaginario puro, y se escribirá $z = i\Im z$. El conjunto de los números complejos imaginarios puros se representará por $i\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.2. Si $z = 4 - i9$, entonces $\Re z = 4$ e $\Im z = -9$. El número complejo $z = i6$ es imaginario puro.

Definición 2.3. El sistema \mathbb{C} de los números complejos es el conjunto de todos los objetos matemáticos de la forma $a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, y las leyes de composición interna suma y producto definidos como sigue: si $z = a + ib$ y $w = c + id$, entonces

$$z + w = (a + c) + i(b + d), \quad z \cdot w = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Como habitualmente, denotamos la multiplicación mediante simple yuxtaposición: $z \cdot w = zw$.

De forma natural, identificamos \mathbb{R} con un subconjunto de \mathbb{C} mediante la aplicación $a \mapsto a + i0$. Observemos que las expresiones $a + ib$ y $a + bi$ son equivalentes; en efecto: si $b \in \mathbb{R}$, entonces

$$bi = (b + i0)(0 + i) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1) + i(b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = 0 + ib = ib.$$

Ejemplo 2.4. Calcular $z + w$ y zw , si: (i) $z = 5 + 2i$, $w = 3 - 4i$; (ii) $z = 2 + 4i$, $w = -3 + 8i$.

Resolución.

(i) Se tiene:

$$\begin{aligned}z + w &= (5 + 2i) + (3 - 4i) = (5 + 3) + (2 - 4)i = 8 - 2i, \\zw &= (5 + 2i)(3 - 4i) = (15 + 8) + (6 - 20)i = 23 - 14i.\end{aligned}$$

(ii) Ahora:

$$\begin{aligned}z + w &= (2 - 3) + (4 + 8)i = -1 + 12i, \\zw &= (-6 - 32) + (16 - 12)i = -38 + 4i.\end{aligned}$$

□

Teorema 2.5. Con las leyes de composición interna suma y producto de la Definición 2.3, \mathbb{C} es un cuerpo conmutativo.

Demostración. Se deja como ejercicio al lector verificar que se satisfacen los axiomas de cuerpo conmutativo. Esto es, que dados $z, w, \zeta \in \mathbb{C}$, se tiene que la suma:

- es asociativa: $(z + w) + \zeta = z + (w + \zeta)$;
- es conmutativa: $z + w = w + z$;
- admite elemento neutro: existe $0 = 0 + 0i \in \mathbb{C}$ tal que $z + 0 = 0 + z = z$;
- cada $z = x + iy \in \mathbb{C}$ admite elemento opuesto: existe $-z \in \mathbb{C}$, $-z = -x - iy$, tal que $z + (-z) = (-z) + z = 0$.

Y que el producto:

- es asociativo: $(zw)\zeta = z(w\zeta)$;
- es conmutativo: $zw = wz$;
- admite elemento neutro: existe $1 = 1 + 0i \in \mathbb{C}$ tal que $1 \cdot z = z \cdot 1 = z$;
- cada $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ admite elemento inverso: existe $z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \in \mathbb{C}$ tal que $zz^{-1} = z^{-1}z = 1$;
- es distributivo respecto de la suma: $z(w + \zeta) = zw + z\zeta$.

□

Se desprende del Teorema 2.5 que para sumar dos números complejos basta con sumar sus partes real e imaginaria, mientras que para multiplicar dos números complejos es suficiente aplicar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, junto con el hecho de que $i^2 = -1$.

Como es usual, escribiremos $z + (-w) = z - w$ y $zw^{-1} = \frac{z}{w} = z/w$. Además, convendremos en que $z^0 = 1$ y, para $m \in \mathbb{N}$, pondremos $z^m = \underbrace{z \cdots z}_m$ y $z^{-m} = z^{-1} \cdots z^{-1}$.

3 Orden y \mathbb{C}

Definición 3.1. Diremos que un cuerpo es un cuerpo ordenado si contiene un subconjunto P con las siguientes propiedades:

- (i) Se tiene que $0 \notin P$, y si $x \neq 0$ entonces, ó bien $x \in P$, ó bien $-x \in P$.
- (ii) Si $x, y \in P$, entonces $xy \in P$ y $x + y \in P$.

Nótese que, en virtud de (ii), las posibilidades $x \in P$ y $-x \in P$ son mutuamente excluyentes: si se diesen simultáneamente se tendría $0 = x + (-x) \in P$, contradiciendo (i).

Por ejemplo, \mathbb{R} es un cuerpo ordenado, pues podemos tomar como P el conjunto de los números reales positivos. La Proposición 3.2 prueba que, sin embargo, no es posible dotar a \mathbb{C} de un orden compatible con su estructura algebraica de cuerpo.

Proposición 3.2. No existe ninguna relación binaria « \succ » sobre \mathbb{C} que haga de \mathbb{C} un cuerpo ordenado, esto es, que satisfaga:

- (i) Se cumple que $0 \neq 0$, y si $z \neq 0$ entonces, ó bien $z \succ 0$, ó bien $-z \succ 0$.
- (ii) Si $z \succ 0$ y $w \succ 0$, entonces $zw \succ 0$ y $z + w \succ 0$.

Aquí, por definición, $z \succ w$ significa que $w \prec z$.

Demostración. Supongamos que existe una relación « \succ » satisfaciendo (i) y (ii). Como $i \neq 0$, (i) obliga a que $i \succ 0$, ó bien $-i \succ 0$. Si fuese $i \succ 0$, seguiría de (ii) que $i^2 = i \cdot i = -1 \succ 0$, y de aquí que $(-1)(-1) = 1 \succ 0$. Al ser $1 \succ 0$ y $-1 \succ 0$ se tendría, otra vez por (ii), que $0 = 1 + (-1) \succ 0$, en contradicción con (i). Similarmente, la hipótesis $-i \succ 0$ implicaría $(-i)^2 = -1 \succ 0$, y razonando como antes desembocaríamos, de nuevo, en una contradicción. \square

4 Conjugación

Definición 4.1. Dado $z = a + ib \in \mathbb{C}$, se denomina conjugado de z al complejo $\bar{z} = a - ib$.

Proposición 4.2. La operación de conjugación posee las siguientes propiedades:

- (i) Involutiva: $\bar{\bar{z}} = z$ ($z \in \mathbb{C}$).
- (ii) Respeta la suma y la diferencia: $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$ ($z, w \in \mathbb{C}$).
- (iii) Respeta el producto: $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ ($z, w \in \mathbb{C}$).
- (iv) Respeta el cociente: $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ ($z, w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$).

Además, se satisface:

$$\Re z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \Im z = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \quad (1)$$

Demostración. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Poniendo $z = x + iy$ encontramos que

$$\bar{\bar{z}} = \overline{x - iy} = x + iy = z,$$

lo que prueba (i). Si, además, $w = u + iv$, entonces

$$\overline{z \pm w} = \overline{(x \pm u) + i(y \pm v)} = (x \pm u) - i(y \pm v) = (x - iy) \pm (u - iv) = \bar{z} \pm \bar{w},$$

quedando probado (ii). La verificación de las restantes propiedades es igual de sencilla y se deja como ejercicio. \square

5 El plano complejo

Todo cuerpo es un espacio vectorial unidimensional sobre sí mismo; en particular, \mathbb{C} es un espacio vectorial complejo de dimensión 1. Nos interesa ahora el siguiente resultado:

Teorema 5.1. *Con la suma de la Definición 2.3 y el producto por escalares reales definido mediante*

$$\lambda(a + ib) = (\lambda a) + i(\lambda b) \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

\mathbb{C} es un espacio vectorial real de dimensión 2.

Demostración. Sabemos, por el Teorema 2.5, que la suma es una ley de composición interna asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro, y es tal que cada número complejo tiene un elemento simétrico, que es su opuesto. Además, como caso particular del citado teorema, se constata fácilmente que el producto de complejos por escalares reales satisface las siguientes propiedades:

- distributividad del vector respecto de la suma de escalares: $(\lambda + \mu)z = \lambda z + \mu z$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$).
- distributividad del escalar respecto de la suma de vectores: $\lambda(z + w) = \lambda z + \lambda w$ ($\lambda \in \mathbb{R}$, $z, w \in \mathbb{C}$).
- asociatividad mixta: $(\lambda \mu)z = \lambda(\mu z)$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$).
- multiplicación por el neutro del cuerpo base: $1 \cdot z = z$ ($z \in \mathbb{C}$).

Consecuentemente, con las operaciones anteriores \mathbb{C} tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{R} . Es claro que $\{1, i\}$ constituye una base de este espacio vectorial, el cual tiene, por tanto, dimensión 2. \square

Puesto que todos los espacios vectoriales reales de dimensión 2 son isomorfos al espacio vectorial real \mathbb{R}^2 , el teorema anterior permite identificar el número complejo $z = x + iy$ con el punto (x, y) del plano. La expresión $z = x + iy$ se denomina *forma binómica* de z . La expresión $z = (x, y)$ se llama *forma cartesiana* de z , y el punto que ésta representa en el plano es el *afijo* de z . De este modo, usaremos indistintamente los términos «número complejo» y «punto». Además, en variable compleja, el plano coordenado de la fig. 1 es denominado *plano de Argand*, *plano complejo* o *z-plano*; el eje de abscisas o eje OX se denomina *eje real*, pues cada punto de ese eje representa un número real; y el eje de ordenadas o eje OY se denomina *eje imaginario*, pues cada punto de ese eje representa un número complejo imaginario puro.

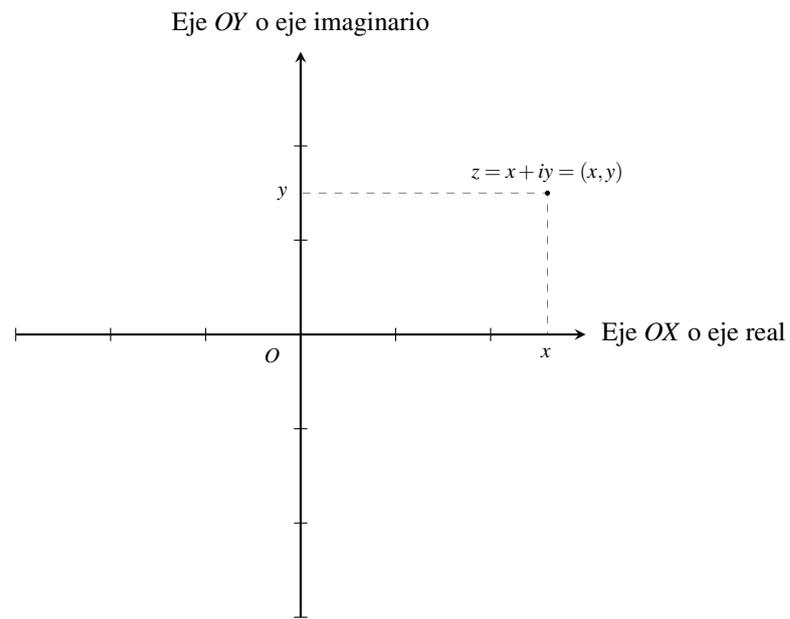


Figura 1. Plano de Argand.

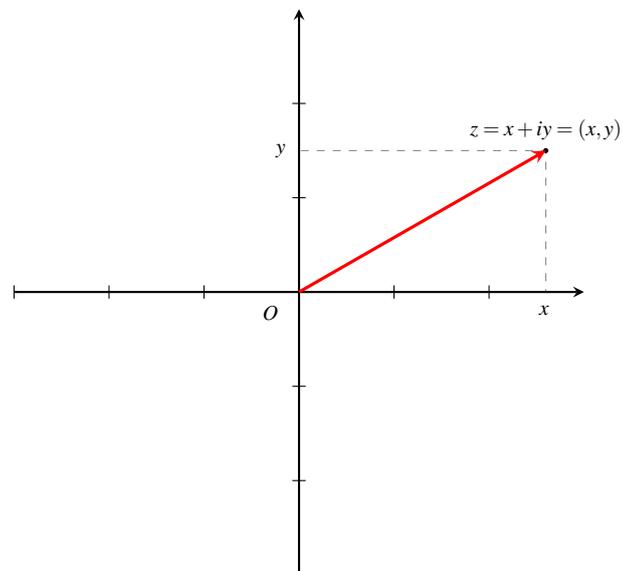
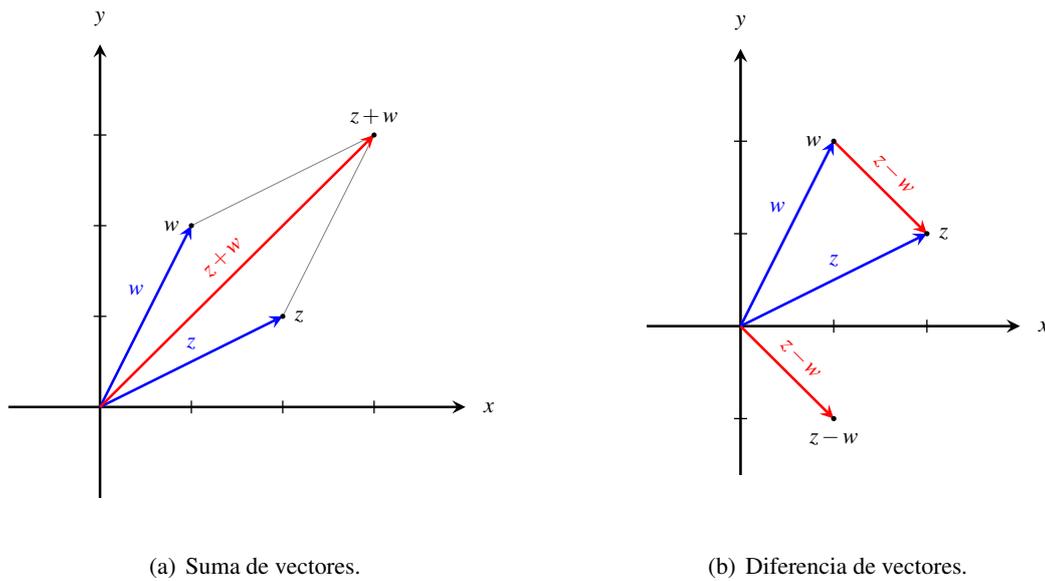


Figura 2. El complejo z como vector de posición.



(a) Suma de vectores.

(b) Diferencia de vectores.

Figura 3. Suma y diferencia de complejos como vectores.

Por otra parte, como sabemos, los puntos del plano pueden ser identificados con las componentes de un vector. Así, un número complejo $z = x + iy$ puede ser contemplado como un vector de posición bidimensional, esto es, un vector cuyo punto inicial es el origen de coordenadas y cuyo punto final es (x, y) , el afijo de z (fig. 2).

La representación de \mathbb{C} como puntos y vectores del plano permite dar un significado geométrico a la suma y a la diferencia de números complejos. La suma de dos números complejos z y w es el vector que se muestra en la fig. 3, y se interpreta vectorialmente como la diagonal mayor del paralelogramo construido sobre los vectores de posición correspondientes a z y w . El vector determinado por la diagonal menor de dicho paralelogramo, con origen en el afijo de w y extremo en el afijo de z , representa el vector $z - w$ como vector libre. Para hallar el afijo de $z - w$, este vector debe ser trasladado paralelamente de forma que su origen coincida con el origen de coordenadas.

Las relaciones (1) sugieren que para describir números complejos o lugares geométricos del plano cabe pensar tanto en el sistema de coordenadas cartesianas (x, y) como en el par (z, \bar{z}) . Para ilustrar esta idea referimos al Ejemplo 6.5 o a la Proposición 6.9.

6 Módulo de un número complejo

La identificación entre números complejos y vectores del plano sugiere la siguiente:

Definición 6.1. Se llama módulo o valor absoluto del número complejo $z = x + iy$ al número real no negativo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Nótese que, geoméricamente, $|z|$ es la longitud del vector de posición correspondiente a z , es decir, la distancia en el plano entre el origen de coordenadas y el afijo de z . Similarmente, si $z = x + iy$ y $w = u + iv$ entonces

$$|z - w| = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$$

es la distancia en el plano entre el origen de coordenadas y el punto $z - w = (x - u) + i(y - v)$ o, equivalentemente,

entre los afijos de z y de w (véase la fig. 3(b)). Es claro que el módulo complejo extiende al valor absoluto real.

Ejemplo 6.2. Hallar los módulos de los siguientes complejos: (i) $z = 2 - 3i$; (ii) $w = 9i$.

Resolución.

$$(i) |z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

$$(ii) |w| = \sqrt{0^2 + 9^2} = \sqrt{9^2} = 9.$$

□

Proposición 6.3. Si $z, w \in \mathbb{C}$, se tiene:

$$(i) z\bar{z} = |z|^2;$$

$$(ii) |zw| = |z||w|;$$

$$(iii) \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|} \quad (w \neq 0);$$

$$(iv) |z^2| = |z|^2;$$

$$(v) |z| = 0 \text{ si, y sólo si, } z = 0;$$

$$(vi) |z| = |\bar{z}|;$$

$$(vii) \max\{|\Re z|, |\Im z|\} \leq |z| \leq |\Re z| + |\Im z|;$$

$$(viii) ||z| - |w|| \leq |z - w| \leq |z| + |w|;$$

$$(ix) z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Demostración. Los apartados (i) a (vi) son de comprobación directa.

Para probar (vii), pongamos $z = x + iy$, de manera que $\Re z = x$, $\Im z = y$. Entonces

$$|x| = \sqrt{|x|^2} \leq \sqrt{|x|^2 + |y|^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|,$$

y, análogamente,

$$|y| \leq |z|.$$

Por tanto, se verifica la primera desigualdad de (vii). Respecto a la segunda, se tiene:

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = |x|^2 + |y|^2 \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2.$$

Tomando raíces cuadradas positivas se concluye que $|z| \leq |x| + |y|$, como se pretendía.

Para demostrar la segunda desigualdad de (viii), advertimos que, teniendo en cuenta el Ejercicio 1 y las propiedades (vii), (ii) y (vi):

$$|z - w|^2 = |z|^2 + 2\Re(-z\bar{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2,$$

y basta tomar raíces cuadradas positivas en esta desigualdad. Para demostrar la primera desigualdad de (viii), escribimos $z = (z - w) + w$ y aplicamos la segunda desigualdad:

$$|z| \leq |z - w| + |w|,$$

de donde

$$|z| - |w| \leq |z - w|.$$

Por la arbitrariedad de z y w y por (ii), también tenemos

$$|w| - |z| \leq |w - z| = |-(z - w)| = |z - w|.$$

Hemos probado así que

$$||z| - |w|| \leq |z - w|,$$

como se requería.

Finalmente, de la expresión para z^{-1} dada en la demostración del Teorema 2.5, o de (i), sigue que

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2},$$

lo que establece (ix). □

En lo sucesivo, nos referiremos a la segunda y primera desigualdades de la Proposición 6.3(viii) como *desigualdad triangular* y *desigualdad triangular inversa*, respectivamente.

A la luz de la Proposición 6.3, resulta evidente que $|\cdot|$ es una norma sobre \mathbb{C} , tanto si \mathbb{C} se considera como espacio vectorial real o como espacio vectorial complejo.

Ejemplo 6.4. *Expresar*

$$z = \frac{-1 + 3i}{2 - i}$$

en forma binómica.

Resolución. Multiplicamos y dividimos z por el conjugado de su denominador, y aplicamos el apartado (i) de la Proposición 6.3:

$$z = \frac{-1 + 3i}{2 - i} = \frac{(-1 + 3i)(2 + i)}{|2 - i|^2} = \frac{(-2 - 3) + (-1 + 6)i}{5} = \frac{-5 + 5i}{5} = -1 + i.$$

□

Ejemplo 6.5. *Describir el lugar geométrico de los $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z| = |z - i|$.*

Resolución. Poniendo $z = x + iy$ y elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad de partida, resulta

$$x^2 + y^2 = x^2 + (y - 1)^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1,$$

de donde $y = 1/2$. Dado que x puede ser cualquier número real, el lugar geométrico buscado es

$$\left\{ z = x + \frac{1}{2}i : x \in \mathbb{R} \right\},$$

que se corresponde con la recta horizontal a altura $1/2$.

En notación compleja, y aplicando el Ejercicio 1, tras elevar al cuadrado ambos miembros de la igualdad de partida encontramos que

$$|z|^2 = |z|^2 + 2\Re(iz) + 1 = |z|^2 - 2\Im z + 1;$$

es decir, $\Im z = 1/2$, expresión equivalente a la obtenida con anterioridad. \square

Ejemplo 6.6. Encontrar una cota superior para $\left| \frac{-1}{z^4 - 5z + 1} \right|$, si $|z| = 2$.

Resolución. Supongamos que $|z| = 2$. En primer lugar, acotamos inferiormente el denominador usando las desigualdades triangular inversa y triangular:

$$|z^4 - 5z + 1| = |z^4 - (5z - 1)| \geq ||z|^4 - |5z - 1|| \geq |z|^4 - |5z - 1| \geq |z|^4 - 5|z| - 1 = 16 - 10 - 1 = 5.$$

Por último, usamos esta estimación para acotar superiormente el módulo dado:

$$\left| \frac{-1}{z^4 - 5z + 1} \right| = \frac{1}{|z^4 - 5z + 1|} \leq \frac{1}{5}.$$

\square

Ejemplo 6.7. Hallar el inverso de $z = 2 - 3i$.

Resolución. Aplicamos el apartado (ix) de la Proposición 6.3:

$$\frac{1}{2 - 3i} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{2 + 3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i.$$

\square

Ejemplo 6.8. Hallar z/w , si $z = 2 - 3i$ y $w = 4 + 6i$.

Resolución. De nuevo, aplicamos el apartado (ix) de la Proposición 6.3:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2} = \frac{(2 - 3i)(4 - 6i)}{|4 + 6i|^2} = \frac{(8 - 18) + (-12 - 12)i}{52} = \frac{-10 - 24i}{52} = -\frac{5}{26} - \frac{6}{13}i.$$

\square

Proposición 6.9. La ecuación

$$A|z|^2 + Bz + \overline{Bz} + C = 0, \quad (2)$$

con $A \geq 0$, $C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$ y $|B|^2 > AC$, corresponde a una recta si $A = 0$, y a una circunferencia si $A > 0$.

Demostración. Estudiemos en primer lugar el caso de la recta. Sea $ax + by + c = 0$ la ecuación cartesiana de una recta, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y a, b no simultáneamente nulos. Haciendo

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad (3)$$

en dicha ecuación (cf. (1)) y sacando factor común z y \bar{z} , resulta

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2i}\right)z + \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2i}\right)\bar{z} + c = 0,$$

o bien

$$\frac{a - ib}{2}z + \frac{a + ib}{2}\bar{z} + c = 0.$$

Esta ecuación es de la forma (2), con $A = 0$, $C = c \in \mathbb{R}$, $B = (a - ib)/2 \in \mathbb{C}$ y, puesto que a, b no son simultáneamente nulos, $|B|^2 > 0 = AC$.

Recíprocamente, dada una ecuación de la forma $Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$, con $C = c \in \mathbb{R}$, $B = a + ib \in \mathbb{C}$, y $|B|^2 > AC = 0$, haciendo $z = x + iy$ obtenemos

$$(a + ib)(x + iy) + (a - ib)(x - iy) + c = 0.$$

Desarrollando y simplificando esta expresión encontramos que

$$2ax - 2by + c = 0.$$

La expresión resultante tiene la forma $mx + ny + r = 0$, con m, n no simultáneamente nulos (ya que $B \neq 0$), y por lo tanto es la ecuación cartesiana de una recta en el plano.

Partimos ahora de la ecuación cartesiana de una circunferencia en el plano, de centro $(d, f) \in \mathbb{R}^2$ y radio $R > 0$:

$$(x - d)^2 + (y - f)^2 - R^2 = 0.$$

El cambio (3) conduce a

$$\left(\frac{z + \bar{z}}{2} - d\right)^2 + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} - f\right)^2 - R^2 = 0.$$

Desarrollando los binomios,

$$\frac{z^2 + 2|z|^2 + \bar{z}^2}{4} - (z + \bar{z})d + d^2 - \frac{z^2 - 2|z|^2 + \bar{z}^2}{4} + (z - \bar{z})if + f^2 - R^2 = 0.$$

Simplificando y agrupando términos en z y \bar{z} llegamos a la ecuación

$$|z|^2 + (-d + if)z + (-d - if)\bar{z} + d^2 + f^2 - R^2 = 0,$$

que es de la forma (2), con $A = 1 > 0$, $C = d^2 + f^2 - R^2 \in \mathbb{R}$, $B = -d + if \in \mathbb{C}$, y $|B|^2 = d^2 + f^2 > d^2 + f^2 - R^2 = AC$.

Recíprocamente, si en (2) suponemos $A > 0$, $C \in \mathbb{R}$, $B = a + ib \in \mathbb{C}$ y $|B|^2 > AC$, y hacemos $z = x + iy$, encontramos que

$$A(x^2 + y^2) + 2\Re(Bz) + C = 0,$$

o bien (ya que $A > 0$),

$$x^2 + y^2 + \frac{2(ax - by)}{A} + \frac{C}{A} = 0.$$

Completando cuadrados en esta expresión:

$$\left(x + \frac{a}{A}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{A}\right)^2 - \frac{a^2 + b^2 - AC}{A^2} = 0. \quad (4)$$

Como vemos, (4) es la ecuación de una circunferencia de centro (d, f) , con $d = -\frac{a}{A}$ y $f = \frac{b}{A}$, y radio

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - AC}}{A} = \frac{\sqrt{|B|^2 - AC}}{A} > 0.$$

Nótese además que, si $E = d + if$, (4) se convierte en

$$|z - E| = R,$$

ecuación que, por consideraciones métricas, corresponde claramente a la circunferencia de centro E y radio R . \square

7 Argumento de un número complejo

Definición 7.1 (Identidad de Euler). Para $\theta \in \mathbb{R}$, definimos

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta.$$

Proposición 7.2. Sean $\theta, \phi \in \mathbb{R}$. Entonces:

- (i) $|e^{i\theta}| = 1$;
- (ii) $e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta} e^{i\phi}$;
- (iii) $e^{-i\theta} = (e^{i\theta})^{-1}$;
- (iv) Fórmula de De Moivre: $(e^{i\theta})^m = e^{im\theta} = \cos m\theta + i \operatorname{sen} m\theta$ ($m \in \mathbb{Z}$);
- (v) $e^{i2k\pi} = 1$ ($k \in \mathbb{Z}$);
- (vi) $e^{i\theta} = 1$ si, y sólo si, $\theta = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);
- (vii) $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$ ($k \in \mathbb{Z}$). Por tanto, la aplicación de \mathbb{R} en la circunferencia unidad, o toro, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ dada por $\theta \mapsto e^{i\theta}$, es 2π -periódica.

Demostración.

- (i) Por la identidad de Euler, la definición de módulo, y la fórmula trigonométrica fundamental,

$$|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta} = 1.$$

(ii) Usando la identidad de Euler y las fórmulas trigonométricas para el seno y el coseno de una suma, escribimos:

$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\phi)} &= \cos(\theta+\phi) + i\operatorname{sen}(\theta+\phi) = (\cos\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi) + i(\operatorname{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta\operatorname{sen}\phi) \\ &= \cos\theta(\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi) + i\operatorname{sen}\theta(\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi) = (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)(\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi) \\ &= e^{i\theta}e^{i\phi}. \end{aligned}$$

(iii) Como el coseno es una función par y el seno una función impar, aplicando (i) y el apartado (ix) de la Proposición 6.3, se tiene:

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta) = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta = \overline{e^{i\theta}} = \frac{\overline{e^{i\theta}}}{|e^{i\theta}|^2} = \frac{1}{e^{i\theta}}.$$

(iv) Procedemos por inducción sobre $m \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Si } m = 0, \text{ entonces } (e^{i\theta})^0 = 1 = \cos(0 \cdot \theta) + i\operatorname{sen}(0 \cdot \theta) = e^{i(0 \cdot \theta)}.$$

Supongamos ahora que $m \in \mathbb{N}$. Si $m = 1$, trivialmente

$$(e^{i\theta})^1 = e^{i\theta} = e^{i(1 \cdot \theta)}.$$

Si $m = 2$, aplicando (ii) vemos que se cumple:

$$(e^{i\theta})^2 = e^{i\theta}e^{i\theta} = e^{i(\theta+\theta)} = e^{i2\theta}.$$

Asumamos que la fórmula es cierta para $m - 1$, y probémosla para m . Por hipótesis inductivas, y de nuevo por (ii):

$$(e^{i\theta})^m = (e^{i\theta})^{m-1}e^{i\theta} = e^{i(m-1)\theta}e^{i\theta} = e^{i[(m-1)+1]\theta} = e^{im\theta}.$$

Finalmente, supongamos que $-m \in \mathbb{N}$. Si $m = -1$, entonces, por (iii),

$$(e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta} = e^{i(-1)\theta}.$$

Para $m = -2$, otra vez por (iii) y por (ii):

$$(e^{i\theta})^{-2} = (e^{i\theta})^{-1}(e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}e^{-i\theta} = e^{i(-2)\theta}.$$

Asumamos que la fórmula es cierta para $-m + 1$, y probémosla para $-m$. Por hipótesis inductivas, y de nuevo por (ii):

$$(e^{i\theta})^{-m} = (e^{i\theta})^{-m+1}e^{-i\theta} = e^{i(-m+1)\theta}e^{-i\theta} = e^{i[(-m+1)-1]\theta} = e^{i(-m)\theta}.$$

(v) Resulta evidente que $e^{i2k\pi} = \cos 2k\pi + i\operatorname{sen} 2k\pi = 1$ ($k \in \mathbb{Z}$).

(vi) Se tiene que $e^{i\theta} = 1$ si, y sólo si, $\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta = 1$; equivalentemente, si $\cos\theta = 1$ y $\operatorname{sen}\theta = 0$, lo cual ocurre cuando, y sólo cuando, $\theta = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

(vii) Que la aplicación $\theta \mapsto e^{i\theta}$ definida sobre \mathbb{R} toma valores en \mathbb{T} se desprende de (i). Además, en virtud de (ii) y (v),

$$e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}e^{i2k\pi} = e^{i\theta} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

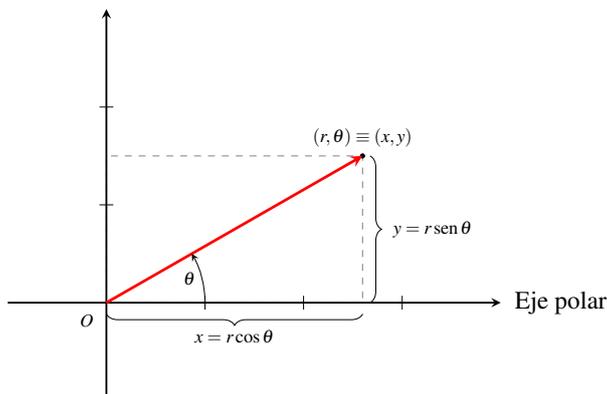


Figura 4. Coordenadas polares en el plano complejo.

probando que dicha aplicación es 2π -periódica.

□

7.1 Formas trigonométrica, exponencial y polar de un número complejo

Anteriormente hemos identificado $z = x + iy \in \mathbb{C}$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Recordemos que un punto P del plano cuyas coordenadas cartesianas son (x, y) también puede ser descrito en coordenadas polares. El *sistema de coordenadas polares* o *sistema polar* consiste en un punto O , llamado *polo*, y una semirrecta horizontal que parte del polo, llamada *eje polar*. Si r es la distancia dirigida desde el polo al punto P y θ es el ángulo (en radianes, positivo o negativo) medido desde el eje polar al segmento OP , entonces P puede ser representado por el par ordenado (r, θ) , denominado *coordenadas polares* de P .

Cuando se superpone un sistema polar a un sistema cartesiano en el plano complejo de manera que el eje polar coincida con el semieje real positivo y el polo O coincida con el origen, las coordenadas (x, y) y (r, θ) guardan la siguiente relación (fig. 4):

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \operatorname{sen} \theta; \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \theta &= \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Las ecuaciones precedentes nos facultan para escribir un número complejo no nulo $z = x + iy$ en la forma

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

expresión que se conoce como *forma trigonométrica* del complejo z . En virtud de la identidad de Euler (Definición 7.1), esta expresión también puede ser escrita como

$$z = |z|e^{i\theta},$$

la cual se denomina *forma exponencial* de z . Por último, la representación del complejo z exclusivamente en términos

de sus coordenadas polares $r = |z|$ y θ ,

$$z = |z|\theta,$$

constituye la llamada *forma polar* de z .

En la práctica, el ángulo θ se suele calcular mediante la fórmula (5). Sin embargo, como la función tangente es periódica de periodo π , una calculadora nos dará solamente los ángulos correspondientes a la rama principal de la arcotangente, es decir, valores de θ tales que $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, correspondientes al primer y cuarto cuadrantes. Como hemos de elegir θ consistentemente con el cuadrante en el que esté situado z , puede ser necesario sumar o restar π al valor de $\arctg(y/x)$ proporcionado por la calculadora.

Ejemplo 7.3. Expresar $z = -\sqrt{3} - i$ en sus formas trigonométrica, exponencial y polar.

Resolución. Se tiene que $|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$. Por otra parte, $y/x = (-1)/(-\sqrt{3})$, de modo que la calculadora nos da $\arctg(1/\sqrt{3}) = \pi/6$, que es un ángulo correspondiente a un punto del primer cuadrante. Como el punto $(-\sqrt{3}, -1)$ está situado en el tercer cuadrante, tomamos $\theta = \pi/6 + \pi = 7\pi/6$. Por tanto, formas trigonométrica, exponencial y polar de z serán, respectivamente, las siguientes:

$$\begin{aligned} z &= 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6} \right) \\ &= 2e^{i7\pi/6} \\ &= 2_{7\pi/6}. \end{aligned}$$

Hay que tener en cuenta que el valor de θ no es único. Por ejemplo, podríamos haber tomado $\theta = \pi/6 - \pi = -5\pi/6$, en cuyo caso también son formas trigonométrica, exponencial y polar de z , respectivamente, las siguientes:

$$\begin{aligned} z &= 2 \left[\cos \left(-\frac{5\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right] = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} - i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} \right) \\ &= 2e^{-i5\pi/6} \\ &= 2_{-5\pi/6}. \end{aligned}$$

□

7.2 Argumento y argumento principal

La discusión y el ejemplo precedentes sugieren dar la siguiente:

Definición 7.4. Se llama argumento de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ al conjunto

$$\arg z = \left\{ \theta \in \mathbb{R} : e^{i\theta} = \frac{z}{|z|} \right\}.$$

Si $\theta \in \arg z$, abusando de la terminología es habitual decir que θ es *un* argumento de z . Pero no se debe olvidar que *el* argumento de z , $\arg z$, es un conjunto.

Proposición 7.5. Dados $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, se tiene:

- (i) Si $\theta \in \arg z$, entonces $\arg z = \{\theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
- (ii) Existe un único $\theta \in (-\pi, \pi]$ tal que $\theta \in \arg z$. Este valor particular de θ se denomina argumento principal de z , y se denota $\text{Arg } z$.
- (iii) $\arg z^{-1} = -\arg z$.
- (iv) $\arg zw = \arg z + \arg w$.
- (v) $\arg z/w = \arg z - \arg w$.

Las tres últimas igualdades deben interpretarse en términos conjuntistas.

Demostración.

- (i) Fijemos $\theta \in \arg z$. Para establecer la igualdad de conjuntos, probaremos la doble inclusión. Si $\phi \in \arg z$ entonces $e^{i\phi} = e^{i\theta} = z/|z|$, así que $e^{-i\theta} = |z|/z$. Por tanto,

$$e^{i(\phi-\theta)} = e^{i\phi} e^{-i\theta} = \frac{z}{|z|} \frac{|z|}{z} = 1.$$

La Proposición 7.2(vi) obliga a que $\phi - \theta = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), como se requería.

Recíprocamente, supongamos que $\phi = \theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Atendiendo a la Proposición 7.2(vii):

$$e^{i\phi} = e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta} = \frac{z}{|z|},$$

ya que $\theta \in \arg z$. En consecuencia, $\phi \in \arg z$.

- (ii) La familia de intervalos semiabiertos por la izquierda $\{(k\pi, (k+2)\pi] : k \in \mathbb{Z}, k \text{ impar}\}$ constituye una partición de la recta real \mathbb{R} en intervalos de amplitud 2π . Por tanto, dado cualquier $\phi \in \arg z \subset \mathbb{R}$, existe un entero impar m tal que $\phi \in (m\pi, (m+2)\pi]$. Es claro entonces que para $k = -m - 1 \in \mathbb{Z}$ se tiene $\theta = \phi + k\pi \in (-\pi, \pi]$. Además, $\theta \in \arg z$ ya que, al ser m un entero impar, $\theta - \phi = (-m - 1)\pi$ es un múltiplo entero y par de π .

Este θ es único. Para comprobarlo, sea otro $\varphi \in (-\pi, \pi] \cap \arg z$. Por (i), existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\varphi = \theta + 2k\pi$, así que la distancia entre φ y θ es menor que la amplitud del intervalo $(-\pi, \pi]$: $|\varphi - \theta| = 2|k|\pi < 2\pi$. Se infiere que $|k| < 1$, y como $k \in \mathbb{Z}$, necesariamente $k = 0$, probando que $\varphi = \theta$.

- (iii) Si $-\theta \in -\arg z$ entonces $\theta \in \arg z$, de donde $e^{i\theta} = z/|z|$, o bien

$$e^{-i\theta} = \frac{|z|}{z} = \frac{z^{-1}}{|z|^{-1}} = \frac{z^{-1}}{|z^{-1}|};$$

luego, $-\theta \in \arg z^{-1}$. Hemos demostrado que $-\arg z \subset \arg z^{-1}$. El argumento es fácilmente reversible, lo que permite probar la inclusión opuesta y con ella la igualdad de ambos conjuntos.

- (iv) Supongamos que $\theta \in \arg zw$, de modo que

$$e^{i\theta} = \frac{zw}{|zw|} = \frac{z}{|z|} \frac{w}{|w|} = e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$$

para ciertos $\alpha \in \arg z$ y $\beta \in \arg w$. Entonces $\theta = \alpha + \beta + 2k\pi$ para cierto $k \in \mathbb{Z}$ (Proposición 7.2(vi)), y $\theta = \alpha + (\beta + 2k\pi) \in \arg z + \arg w$. Recíprocamente, si $\theta \in \arg z + \arg w$, existen $\alpha \in \arg z$ y $\beta \in \arg w$ tales que $\theta = \alpha + \beta$, es decir, tales que $e^{i\alpha} = z/|z|$ y $e^{i\beta} = w/|w|$. Sigue que

$$e^{i\theta} = e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta} = \frac{z}{|z|} \frac{w}{|w|} = \frac{zw}{|zw|},$$

y de aquí que $\theta \in \arg zw$.

(v) Combinando (iv) y (iii): $\arg(z/w) = \arg zw^{-1} = \arg z + \arg w^{-1} = \arg z - \arg w$.

□

Conviene observar que la elección del intervalo $(-\pi, \pi]$ para la definición del argumento principal de un complejo z es arbitraria; tomando cualquier otro intervalo semiabierto de amplitud 2π , por ejemplo $[0, 2\pi)$, se hubiera garantizado igualmente la existencia y unicidad de $\text{Arg} z$. Con la elección del intervalo $(-\pi, \pi]$, convenimos en que el semieje real negativo es una especie de «barrera» que no nos está permitido cruzar; la denominación técnica de esta barrera es *salto de rama*. Si usamos el intervalo $[0, 2\pi)$, entonces el salto de rama se encuentra en el semieje real positivo. El concepto de salto de rama es importante y tendremos ocasión de reencontrarlo a lo largo del curso.

Ejemplo 7.6. Expresar $z = 1 - i$ en sus formas trigonométrica, exponencial y polar usando $\text{Arg} z$.

Resolución. Por una parte, $|z| = \sqrt{2}$. Por otra,

$$\begin{cases} \Re z = \sqrt{2} \cos \theta = 1 & \text{implica } \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \Im z = \sqrt{2} \sen \theta = -1 & \text{implica } \sen \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Luego, $\theta = -\pi/4 \in (-\pi, \pi]$, así que $\text{Arg} z = -\pi/4$. Consecuentemente:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sen \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sen \frac{\pi}{4} \right) && \text{(forma trigonométrica),} \\ &= \sqrt{2} e^{-i\pi/4} && \text{(forma exponencial),} \\ &= \sqrt{2}_{-\pi/4} && \text{(forma polar).} \end{aligned}$$

□

8 Potenciación y radicación

La forma exponencial de los números complejos es muy útil para realizar operaciones de multiplicación, división, potenciación y radicación en \mathbb{C} .

Proposición 8.1. Sean $R, r > 0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces:

(i) $(Re^{i\alpha})(re^{i\beta}) = Rre^{i(\alpha+\beta)}$;

$$(ii) \frac{Re^{i\alpha}}{re^{i\beta}} = \frac{R}{r}e^{i(\alpha-\beta)},$$

$$(iii) (Re^{i\alpha})^m = R^m e^{im\alpha} \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Demostración. Sigue inmediatamente de la Proposiciones 6.3 y 7.2. □

Ejemplo 8.2. Dados $z = i$ y $w = -\sqrt{3} - i$, hallar: (i) zw ; (ii) z/w .

Resolución. En forma exponencial, $z = e^{i\pi/2}$ y $w = 2e^{-i5\pi/6}$ (cf. Ejemplo 7.3). Aplicamos la Proposición 8.1:

$$(i) zw = 2e^{i(\pi/2-5\pi/6)} = 2e^{-i\pi/3};$$

(ii) ahora

$$\frac{z}{w} = \frac{1}{2}e^{i(\pi/2+5\pi/6)} = \frac{1}{2}e^{i4\pi/3} = \frac{1}{2}e^{-i2\pi/3},$$

donde para escribir la última igualdad hemos usado el argumento principal del cociente. □

Ejemplo 8.3. Dado $z = -\sqrt{3} - i$, calcular z^3 y z^{-3} .

Resolución. Una representación exponencial de z es $z = 2e^{-i5\pi/6}$ (cf. Ejemplos 7.3 y 8.2). Por la Proposición 8.1:

$$z^3 = 2^3 e^{-i3 \cdot 5\pi/6} = 8e^{-i5\pi/2} = -8i,$$

$$z^{-3} = 2^{-3} e^{-i(-3)5\pi/6} = \frac{1}{8}e^{i5\pi/2} = \frac{1}{8}i.$$

□

Ejemplo 8.4. Hallar $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^3$.

Resolución. Pongamos $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. Entonces, $|z| = 1$; por otra parte,

$$\operatorname{arctg} \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

Luego, $z = e^{i\pi/6}$, así que

$$z^3 = e^{i3\pi/6} = e^{i\pi/2} = i.$$

□

Nos ocupamos a continuación de encontrar las raíces de la ecuación $z^n = a$, con $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Proposición 8.5. Si $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existen exactamente n raíces n -ésimas de a , es decir, n números complejos z_k ($k = 0, \dots, n-1$) tales que $z_k^n = a$ ($k = 0, \dots, n-1$). Además, si $\theta \in \arg a$, entonces

$$z_k = |a|^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n} \quad (k = 0, \dots, n-1). \quad (6)$$

Demostración. Sea $a = |a|e^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, y sea $n \in \mathbb{N}$. Buscamos $z = \rho e^{i\phi}$ tal que $z^n = a$, es decir, tal que $\rho^n e^{in\phi} = |a|e^{i\theta}$. Debe tenerse entonces que $\rho^n = |a|$, de donde $\rho = |a|^{1/n}$, y $n\phi = \theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), de donde $\phi = (\theta + 2k\pi)/n$ ($k \in \mathbb{Z}$). Consecuentemente,

$$z_k = |a|^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Veamos ahora que sólo se obtienen valores distintos de $e^{i(\theta+2k\pi)/n}$ para $k = 0, \dots, n-1$. En efecto, sea $k \in \mathbb{Z}$ arbitrario, y supongamos que $k = mn + r$ para ciertos $m \in \mathbb{Z}$ y $r = 0, \dots, n-1$. Puesto que

$$\frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta + 2(mn + r)\pi}{n} = \frac{\theta + 2r\pi}{n} + 2m\pi$$

y $e^{i2m\pi} = 1$, se tiene

$$e^{i(\theta+2k\pi)/n} = e^{i(\theta+2r\pi)/n} e^{i2m\pi} = e^{i(\theta+2r\pi)/n}$$

para algún $r = 0, \dots, n-1$, como habíamos afirmado. □

Definición 8.6. La única raíz n -ésima de un número complejo a obtenida tomando $\theta = \text{Arg } a$ y $k = 0$ en (6), se denomina raíz n -ésima principal de a .

Como todas las raíces dadas por (6) tienen igual módulo $|a|^{1/n}$, resulta que las raíces n -ésimas de un número complejo a están situadas sobre una circunferencia del plano complejo, centrada en el origen de coordenadas y de radio $|a|^{1/n}$. Además, como la diferencia entre los argumentos de dos raíces sucesivas cualesquiera es $2\pi/n$, las raíces n -ésimas de a están igualmente espaciadas sobre la circunferencia, comenzando con la raíz que tiene por un argumento a θ/n . Así pues, las n raíces constituyen los vértices de un polígono regular de n lados centrado en el origen, inscrito en la circunferencia centrada en el origen de radio $|a|^{1/n}$.

En particular, las n raíces de $a = 1$ se llaman raíces n -ésimas de la unidad. Poniendo $w = e^{i2\pi/n}$, encontramos que el conjunto de estas raíces está constituido por $w^0 = 1, w^1 = w, w^2, \dots, w^{n-1}$. Además, si z es una raíz n -ésima de un complejo a , entonces el conjunto de todas ellas será zw^k ($k = 0, \dots, n-1$).

Ejemplo 8.7. Hallar las raíces cúbicas de $a = i$. Representarlas gráficamente y determinar la raíz principal.

Resolución. Es claro que $a = e^{i\pi/2}$. Para obtener las raíces cúbicas de a , usamos (6) con $n = 3$:

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{i(\pi/2+0\pi)/3} = e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}; \\ z_1 &= e^{i(\pi/2+2\pi)/3} = e^{i5\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}; \\ z_2 &= e^{i(\pi/2+4\pi)/3} = e^{i9\pi/6} = e^{i3\pi/2} = -i. \end{aligned}$$

Como $\text{Arg } a = \pi/2$, la raíz principal es z_0 . Para una representación gráfica, véase la fig. 5. □

Ejemplo 8.8. Hallar las raíces cuartas de $a = 1 + i$. Representarlas gráficamente y determinar la raíz principal.

Resolución. Resulta evidente que $a = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Para obtener las raíces cuartas de a , usamos (6) con $n = 4$:

$$z_0 = 2^{1/8} e^{i(\pi/4+0\pi)/4} = 2^{1/8} e^{i\pi/16};$$

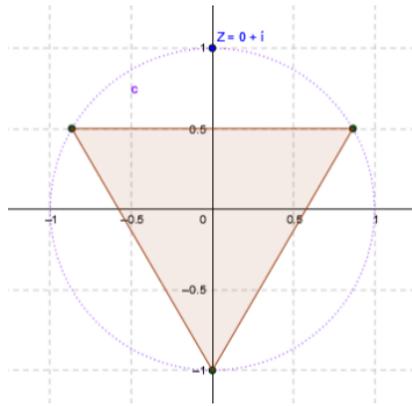


Figura 5. Ejemplo 8.7: raíces cúbicas de i .

$$\begin{aligned} z_1 &= 2^{1/8} e^{i(\pi/4+2\pi)/4} = 2^{1/8} e^{i9\pi/16}, \\ z_2 &= 2^{1/8} e^{i(\pi/4+4\pi)/4} = 2^{1/8} e^{i17\pi/16}, \\ z_3 &= 2^{1/8} e^{i(\pi/4+6\pi)/4} = 2^{1/8} e^{i25\pi/16}. \end{aligned}$$

Como $\text{Arg } a = \pi/4$, la raíz principal es z_0 . Para una representación gráfica, véase la fig. 6. □

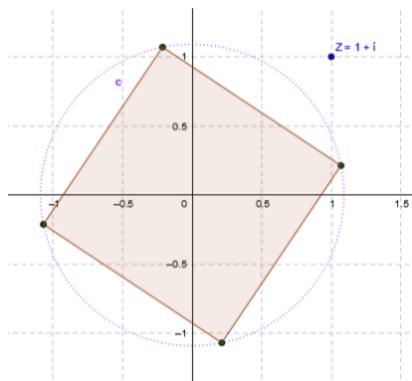


Figura 6. Ejemplo 8.8: raíces cuartas de $1 + i$.

Ejemplo 8.9. Hallar las raíces sextas de $a = 2$. Representarlas gráficamente y determinar la raíz principal.

Resolución. Para obtener las raíces sextas de $a = 2e^{i0}$, usamos (6) con $n = 6$:

$$\begin{aligned} z_0 &= 2^{1/6} e^{i(0+0\pi)/6} = 2^{1/6}; \\ z_1 &= 2^{1/6} e^{i(0+2\pi)/6} = 2^{1/6} e^{i\pi/3} = 2^{1/6} \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2^{5/6}}; \\ z_2 &= 2^{1/6} e^{i(0+4\pi)/6} = 2^{1/6} e^{i2\pi/3} = 2^{1/6} \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2^{5/6}}; \\ z_3 &= 2^{1/6} e^{i(0+6\pi)/6} = 2^{1/6} e^{i\pi} = -2^{1/6}; \\ z_4 &= 2^{1/6} e^{i(0+8\pi)/6} = 2^{1/6} e^{i4\pi/3} = 2^{1/6} \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2^{5/6}}; \\ z_5 &= 2^{1/6} e^{i(0+10\pi)/6} = 2^{1/6} e^{i5\pi/3} = 2^{1/6} \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2^{5/6}}. \end{aligned}$$

Como $\text{Arg } a = 0$, la raíz principal es z_0 . Para una representación gráfica, véase la fig. 7. □

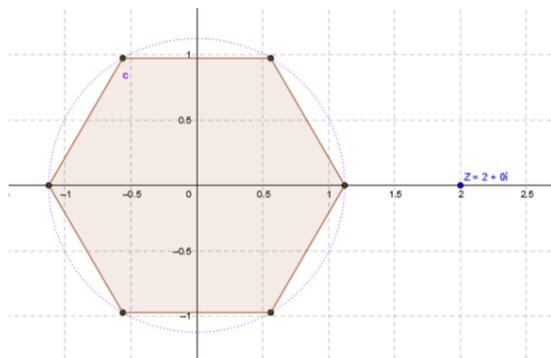


Figura 7. Ejemplo 8.9: raíces sextas de 2.

9 Topología del plano complejo

Nótese que si identificamos $z = x + iy = (x, y)$ y $w = u + iv = (u, v)$, entonces

$$|z - w| = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2} = d_2(z, w)$$

es la distancia euclídea habitual en \mathbb{R}^2 . Por tanto, la aplicación $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty)$ definida por

$$d(z, w) = |z - w| \quad (z, w \in \mathbb{C})$$

constituye una distancia (o métrica) en \mathbb{C} , que se conoce como *distancia (o métrica) euclídea* porque coincide con la distancia (o métrica) euclídea d_2 en \mathbb{R}^2 . Recordemos los axiomas que verifica: para $z, w, \zeta \in \mathbb{C}$,

- (i) $d(z, w) \geq 0$; $d(z, w) = 0$ si, y sólo si, $z = w$;
- (ii) $d(z, w) = d(w, z)$;
- (iii) $d(z, w) \leq d(z, \zeta) + d(\zeta, w)$.

Vía la identificación de (\mathbb{C}, d) con (\mathbb{R}^2, d_2) , la distancia d dota a \mathbb{C} de la topología euclídea usual; salvo que se indique otra cosa, se supondrá que \mathbb{C} está dotado de esta topología. Se trasladan entonces a \mathbb{C} las definiciones y resultados ya conocidos sobre espacios métricos en general y sobre la topología euclídea de \mathbb{R}^2 en particular, algunos de los cuales recordaremos a continuación.

Las bolas abiertas en \mathbb{C} son discos abiertos: para $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, el conjunto

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$$

es el *disco abierto* centrado en a y de radio r ; convenimos que $D(a, +\infty) = \mathbb{C}$. El disco $D(0, 1)$ se denomina *disco unidad abierto* y se representa por \mathbb{D} . La familia de discos $\{D(a, r)\}_{r>0}$ constituye una base local en el punto a .

La *frontera* de $D(a, r)$, $\partial D(a, r)$, es el conjunto

$$C(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\},$$

esto es, la circunferencia de centro a y radio r . La unión de $D(a, r)$ con su frontera es la *clausura* de $D(a, r)$, y coincide con el *disco cerrado*

$$\bar{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}.$$

Nótese que esta última definición tiene sentido también para $r = 0$: $\bar{D}(a, 0) = \{a\}$.

Definición 9.1. Un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ es:

- abierto, si es vacío o si para todo $a \in A$, existe $r > 0$ tal que $D(a, r) \subset A$;
- cerrado, si su complementario $\mathbb{C} \setminus A$ es abierto;
- acotado, si está contenido en algún disco centrado en cero, esto es, si existe $M > 0$ tal que $|z| \leq M$ ($z \in A$).

Definición 9.2. Un punto $a \in \mathbb{C}$ es un punto de acumulación de un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ si para todo $r > 0$, se tiene que $D^*(a, r) \cap A \neq \emptyset$, donde $D^*(a, r) = D(a, r) \setminus \{a\}$ es el disco perforado de centro a y radio r . El conjunto de todos los puntos de acumulación de A se denota A' .

9.1 Conexidad

Definición 9.3. Se dice que un conjunto $W \subset \mathbb{C}$ es:

- conexo, cuando no es posible escribir W como unión disjunta de abiertos relativos no vacíos: si existen A, B , abiertos en W , tales que $A \cap B = \emptyset$ y $W = A \cup B$, entonces $A = \emptyset$ ó $B = \emptyset$;
- conexo por caminos, si dos puntos cualesquiera de W pueden ser unidos por una curva enteramente contenida en él: dados $z, w \in W$, existe una función continua $\gamma: [0, 1] \rightarrow W$ tal que $\gamma(0) = z$ y $\gamma(1) = w$.

Intuitivamente, un conjunto conexo de \mathbb{C} es el que aparece como una sola pieza, que no se puede «dividir» o «particionar».

La conexidad por caminos implica conexidad, pero el recíproco es falso, en general. En \mathbb{R}^2 , y por tanto en \mathbb{C} , un conjunto abierto es conexo si, y sólo si, es conexo por caminos.

Definición 9.4. Un dominio de \mathbb{C} es un conjunto no vacío, abierto y conexo (o conexo por caminos).

En \mathbb{C} , todo conjunto abierto no vacío es unión numerable de dominios disjuntos (sus *componentes conexas*).

9.2 Sucesiones de números complejos

Definición 9.5. Una sucesión de números complejos es una aplicación $n \mapsto z(n) = z_n$ del conjunto de los números naturales en \mathbb{C} . Como de costumbre, identificaremos la aplicación y su rango, representándola por $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$.

La definición de sucesión convergente es la misma que en cualquier espacio métrico:

Definición 9.6. Se dice que la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ converge a un número complejo z , llamado límite de $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, y se escribe $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$, $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} z$, ó bien $z_n \rightarrow z$ cuando $n \rightarrow \infty$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe un número natural N tal que $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq N$ implican $|z_n - z| < \varepsilon$. Equivalentemente, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a z en \mathbb{C} si $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0$ en \mathbb{R} .

Como ocurre en todo espacio métrico, cuando el límite de una sucesión existe, es único.

Ejemplo 9.7. Probar que la sucesión $\left\{ \frac{i^{n+1}}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ converge a cero.

Resolución. Se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{i^{n+1}}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

□

Proposición 9.8. Una sucesión de números complejos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente si, y sólo si, las sucesiones de números reales $\{\Re z_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\Im z_n\}_{n=1}^{\infty}$ son convergentes. En tal caso, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ en \mathbb{C} si, y sólo si, $\lim_{n \rightarrow \infty} \Re z_n = \Re z$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \Im z_n = \Im z$ en \mathbb{R} .

Demostración. En virtud de la Proposición 6.3(vii), tenemos que

$$|\Re z_n - \Re z| = |\Re(z_n - z)| \leq |z_n - z| \leq |\Re(z_n - z)| + |\Im(z_n - z)| = |\Re z_n - \Re z| + |\Im z_n - \Im z| \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Similarmente,

$$|\Im z_n - \Im z| = |\Im(z_n - z)| \leq |z_n - z| \leq |\Re z_n - \Re z| + |\Im z_n - \Im z| \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Se deduce que $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0$ si, y sólo si, $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Re z_n - \Re z| = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Im z_n - \Im z| = 0$. □

Nótese que la Proposición 9.8 permite reducir el estudio de la convergencia de sucesiones de números complejos al de la convergencia de dos sucesiones de números reales.

Ejemplo 9.9. Demostrar que las siguientes sucesiones convergen a i :

$$(i) \left\{ \frac{1+i(n+1)}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}; \quad (ii) \left\{ \frac{1}{2^n} + i \frac{n}{n+2} \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Resolución.

(i) Pongamos $z_n = \frac{1+i(n+1)}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$). Apelando directamente a la definición de convergencia:

$$|z_n - i| = \left| \frac{1+i(n+1)}{n} - i \right| = \left| \frac{1+i}{n} \right| = \frac{\sqrt{2}}{n} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Alternativamente, podemos calcular

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Re z_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \Im z_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \end{aligned}$$

y aplicar la Proposición 9.8 para concluir que $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a i .

(ii) Pongamos ahora $z_n = \frac{1}{2^n} + i \frac{n}{n+2}$ ($n \in \mathbb{N}$). Se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Re z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Im z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1,$$

así que, de nuevo por la Proposición 9.8, $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ converge a i .

□

Ejemplo 9.10. Estudiar la convergencia de $\left\{ \frac{3+ni}{n+2ni} \right\}_{n=1}^\infty$.

Resolución. Para cada $n \in \mathbb{N}$, expresamos

$$z_n = \frac{3+ni}{n+2ni} = \frac{(3+ni)(n-2ni)}{5n^2} = \frac{(3n+2n^2) + i(-6n+n^2)}{5n^2}$$

en forma binómica y analizamos la convergencia de las sucesiones reales $\{\Re z_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{\Im z_n\}_{n=1}^\infty$:

$$\begin{aligned} \Re z_n &= \frac{3n+2n^2}{5n^2} = \frac{3+2n}{5n} \rightarrow \frac{2}{5} \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty; \\ \Im z_n &= \frac{-6n+n^2}{5n^2} = \frac{-6+n}{5n} \rightarrow \frac{1}{5} \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Se concluye que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{2+i}{5}.$$

□

Definición 9.11. Diremos que la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ es divergente, y escribiremos $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, si $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$, esto es, si para todo $K > 0$, existe un número natural N de forma que $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq N$ implican $|z_n| \geq K$.

Veremos más adelante que los conceptos de «no convergencia» y «divergencia» no son equivalentes (Ejemplo 9.15).

Proposición 9.12 (Álgebra de límites). Se verifican los enunciados siguientes:

- (i) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm w_n) = z \pm w$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n w_n) = zw$. Si, además, $z_n \neq 0$ ($n \in \mathbb{N}$) y $z \neq 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/z_n) = 1/z$.
- (ii) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{z}_n = \bar{z}$.
- (iii) Si $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ diverge y $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ está acotada, entonces $\{z_n \pm w_n\}_{n=1}^\infty$ diverge.
- (iv) Si $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ diverge y $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ está separada de cero, esto es, existen $r > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ de forma que para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, se cumple que $|w_n| \geq r$, entonces $\{z_n w_n\}_{n=1}^\infty$ diverge.

Demostración.

- (i) Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$. Aplicando la desigualdad triangular,

$$|(z_n \pm w_n) - (z \pm w)| \leq |z_n - z| + |w_n - w| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

probando que $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm w_n) = z \pm w$. Por otra parte, puesto que toda sucesión convergente está acotada, existe $M > 0$ tal que $|z_n| \leq M$ ($n \in \mathbb{N}$), y podemos escribir:

$$\begin{aligned} |z_n w_n - z w| &\leq |z_n w_n - z_n w| + |z_n w - z w| \leq |z_n| |w_n - w| + |w| |z_n - z| \\ &\leq M |w_n - w| + |w| |z_n - z| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

El resultado para la sucesión de inversos sigue inmediatamente del que acabamos de probar: como $|z_n - z| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y $|z_n z| \rightarrow |z|^2$ cuando $n \rightarrow \infty$, se infiere que

$$\left| \frac{1}{z_n} - \frac{1}{z} \right| = \frac{|z_n - z|}{|z_n z|} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

(ii) Basta advertir que $\lim_{n \rightarrow \infty} |\bar{z}_n - \bar{z}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z|$.

(iii) Sean $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergente y $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ acotada. Existe $M > 0$ tal que $|w_n| \leq M$ ($n \in \mathbb{N}$). Dado $K > 0$, la divergencia de $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ permite elegir $N \in \mathbb{N}$ de manera que $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, implican $|z_n| \geq K + M$. Por la desigualdad triangular inversa,

$$|z_n \pm w_n| \geq |z_n| - |w_n| \geq (K + M) - M = K \quad (n \geq N),$$

así que $\{z_n \pm w_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverge.

(iv) Supongamos que $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverge y $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ está separada de cero. Existen $r > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ de forma que para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, se cumple que $|w_n| \geq r$. Ahora, puesto que $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverge, dado $K > 0$ podemos elegir N lo suficientemente grande como para que, además, se tenga $|z_n| \geq K/r$ siempre que $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq N$. Se concluye entonces que

$$|z_n w_n| \geq \frac{K}{r} r = K \quad (n \geq N),$$

así que $\{z_n w_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverge, como habíamos afirmado.

□

Definición 9.13. Una sucesión de números complejos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$, existe un número natural N tal que si $p, q \in \mathbb{N}$ y $p, q \geq N$, entonces $|z_p - z_q| < \varepsilon$.

Al igual que ocurre con el concepto de convergencia, la definición de sucesión de Cauchy en \mathbb{C} es la particularización de la ya conocida en espacios métricos arbitrarios. Toda sucesión convergente es de Cauchy, pero el recíproco es falso, en general. Los espacios métricos donde vale el recíproco se llaman *completos*. Por ejemplo, \mathbb{R} , con su topología usual, es completo, propiedad que se traslada a \mathbb{C} :

Teorema 9.14. Toda sucesión de Cauchy de números complejos es convergente. En otras palabras, \mathbb{C} es completo.

Demostración. Aplicando la Proposición 6.3(vii) como en la demostración de la Proposición 9.8, deducimos que $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{C} si, y sólo si, $\{\Re z_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\Im z_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de Cauchy en \mathbb{R} . Puesto que \mathbb{R} es completo, ser de Cauchy equivale a ser convergente en \mathbb{R} , luego $\{\Re z_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\Im z_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen; por la Proposición 9.8, lo mismo cabe afirmar de $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. □

Un espacio normado que es completo con la topología inducida por la norma se llama *espacio de Banach*. Así pues, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ es un espacio de Banach, tanto si el cuerpo de escalares es \mathbb{R} como si es \mathbb{C} .

Ejemplo 9.15. *Demostrar que la sucesión de término general $z_n = i^n$ ($n \in \mathbb{N}$) no converge ni diverge.*

Resolución. En primer lugar, advertimos que $|z_n| = 1 \not\rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, así que $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ no diverge. Por otra parte, esta sucesión no es de Cauchy, así que tampoco puede ser convergente. Para ver que no es de Cauchy, nótese que, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$,

$$z_{4n} = i^{4n} = (e^{i\pi/2})^{4n} = (e^{i\pi})^{2n} = (-1)^{2n} = 1$$

mientras que

$$z_{4n+2} = i^{4n+2} = (e^{i\pi/2})^{4n+2} = (e^{i\pi})^{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1,$$

así que $|z_{4n} - z_{4n+2}| = 2 \not\rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. □

Definición 9.16. *Una sucesión parcial o subsucesión de una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es cualquier sucesión $\{z_{\sigma(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, donde $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es una aplicación estrictamente creciente.*

Es habitual denotar una subsucesión de la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ en la forma $\{z_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$. Si $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge, entonces cualquier subsucesión de $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge al mismo límite.

Teorema 9.17 (Bolzano-Weierstrass). *Toda sucesión acotada de números complejos tiene alguna sucesión parcial convergente.*

Demostración. Teniendo en cuenta la Proposición 6.3(vii), se advierte fácilmente que una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada si, y sólo si, $\{\Re z_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\Im z_n\}_{n=1}^{\infty}$ son acotadas. Como toda sucesión acotada de números reales posee una subsucesión convergente, alguna subsucesión $\{z_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ de $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es tal que $\{\Re z_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ converge. Ya que $\{\Im z_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ también está acotada, existe una subsucesión $\{z_{n_{j_k}}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{z_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$, y por tanto de $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, tal que $\{\Im z_{n_{j_k}}\}_{k=1}^{\infty}$ converge. Ahora, $\{\Re z_{n_{j_k}}\}_{k=1}^{\infty}$ es subsucesión de una sucesión convergente, luego ella misma es convergente. Se infiere de la Proposición 9.8 que $\{z_{n_{j_k}}\}_{k=1}^{\infty}$ converge. □

Concluimos esta sección recordando que la continuidad de una aplicación definida entre dos espacios métricos es equivalente a su continuidad secuencial, es decir, a que la aplicación transforme sucesiones convergentes en sucesiones convergentes. Este criterio es aplicable, por tanto, a cualquier aplicación entre dos espacios métricos tales que uno de ellos (o ambos) sea \mathbb{C} .

9.3 Compacidad

Definición 9.18. *Un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ se dice compacto si de todo recubrimiento de S por abiertos de \mathbb{C} se puede extraer un subrecubrimiento finito.*

La siguiente caracterización de subconjuntos compactos de (\mathbb{R}^2, d_2) es válida en (\mathbb{C}, d) .

Teorema 9.19. *Sea $S \subset \mathbb{C}$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (i) *S es compacto.*

- (ii) Todo subconjunto infinito de puntos de S tiene algún punto de acumulación en S .
- (iii) Toda sucesión de puntos de S tiene alguna subsucesión convergente a un punto de S .
- (iv) S es cerrado y acotado.

A la luz del Teorema 9.19 es obvio que \mathbb{C} , al no estar acotado, no es compacto con su topología usual. En la sección 10 estudiaremos un procedimiento para compactificar \mathbb{C} .

9.4 Series de números complejos

Definición 9.20. Dada una sucesión de números complejos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, se llama serie de término general z_n , y se denota $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, a la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los de $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$S_n = \sum_{j=1}^n z_j \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Puesto que las series son sucesiones, todos los conceptos y resultados estudiados para sucesiones siguen valiendo cuando se aplican a series. Así, que una serie sea *convergente* significa que existe el límite de la sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ de sumas parciales; en tal caso, dicho límite se suele denominar *suma* de la serie. Simbólicamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n z_j.$$

Como caso particular de la Proposición 9.8, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente si, y sólo si, lo son las series

$$\Re \left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Re z_n \quad \text{e} \quad \Im \left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Im z_n.$$

La condición básica *necesaria* para la convergencia de una serie es que su término general tienda a cero. En efecto, si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge entonces la sucesión $z_n = \sum_{j=1}^n z_j - \sum_{j=1}^{n-1} z_j$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) es diferencia de dos sucesiones que convergen al mismo límite, y por lo tanto ella misma converge a cero.

En el caso de las series es útil definir otro tipo de convergencia:

Definición 9.21. Se dice que una serie de números complejos $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente si la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ es convergente.

Proposición 9.22. Si una serie de números complejos $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es absolutamente convergente, entonces es convergente.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $S_n = \sum_{j=1}^n z_j$ y $A_n = \sum_{j=1}^n |z_j|$. Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es absolutamente convergente, es decir, que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge. Entonces esta sucesión es de Cauchy: dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \in \mathbb{N}$ y $q > p \geq N$, se verifica que

$$\sum_{j=p+1}^q |z_j| = A_q - A_p = |A_q - A_p| < \varepsilon.$$

Luego,

$$|S_q - S_p| = |z_{p+1} + z_{p+2} + \dots + z_q| \leq \sum_{j=p+1}^q |z_j| < \varepsilon \quad (p, q \in \mathbb{N}, q > p \geq N),$$

probando que la sucesión $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ es de Cauchy, o, equivalentemente (Teorema 9.14), que la serie $\sum_{n=1}^\infty z_n$ converge, como se pretendía. \square

De la Proposición 9.22 se deduce que los criterios de convergencia para las series de términos positivos permiten estudiar la convergencia absoluta de una serie de números complejos. Cuando la serie no converge absolutamente podemos intentar comprobar si verifica la condición de Cauchy, pero esta comprobación suele ser complicada. En los Ejercicios 15 y 16 damos sendos criterios de convergencia absoluta, centrándonos a continuación en otros criterios que proporcionan información sobre la convergencia no absoluta. Comenzamos con un resultado auxiliar.

Lema 9.23 (Fórmula de sumación por partes de Abel). Sean $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ dos sucesiones de números complejos, y sea $A_n = \sum_{j=1}^n a_j$ ($n \in \mathbb{N}$). Entonces

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Demostración. Poniendo $A_0 = 0$, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k &= \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=2}^n A_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^n A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1} = \sum_{k=1}^n A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

\square

Teorema 9.24 (Criterio general de Dirichlet). Sean $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ dos sucesiones de números complejos, y supongamos que:

- (i) La serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ tiene sumas parciales acotadas, es decir, existe $M > 0$ tal que $|a_1 + \dots + a_n| \leq M$ ($n \in \mathbb{N}$).
- (ii) La serie $\sum_{n=1}^\infty |b_n - b_{n+1}|$ es convergente.
- (iii) Se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Entonces, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ es convergente.

Demostración. Sea $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n \in \mathbb{N}$). Puesto que, por (i),

$$|A_n| |b_n - b_{n+1}| \leq M |b_n - b_{n+1}| \quad (n \in \mathbb{N}),$$

inferimos de (ii), por el criterio de comparación, que la serie $\sum_{n=1}^\infty A_n (b_n - b_{n+1})$ converge absolutamente y, por tanto, es convergente (Proposición 9.22); es decir, la sucesión $\{\sum_{k=1}^n A_k (b_k - b_{k+1})\}_{n=1}^\infty$ converge. Como, además, la sucesión $\{A_n b_{n+1}\}_{n=1}^\infty$ converge a cero, por ser producto de una sucesión acotada por otra convergente a cero según (i) y (iii), concluimos, en virtud del Lema 9.23, que la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ es convergente. \square

Teorema 9.25 (Criterio general de Abel). Sean $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ dos sucesiones de números complejos, y supongamos que:

(i) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

(ii) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}|$ es convergente.

Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ también es convergente.

Demostración. La hipótesis (i) afirma que la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n \in \mathbb{N}$), es convergente; en particular, está acotada por lo que, como en la demostración del Teorema 9.24, deducimos que $\{\sum_{k=1}^n A_k(b_k - b_{k+1})\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente. Además, (ii) y la Proposición 9.22 implican que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$ converge. Pero esta serie es telescópica y sus sumas parciales se reducen a la sucesión $\{b_1 - b_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, así que $\{b_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ converge. Como el producto de sucesiones convergentes también lo es (Proposición 9.12), resulta que $\{A_n b_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ converge. Finalmente, el Lema 9.23 prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge. \square

Proposición 9.26. Si $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona y acotada de números reales, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}|$ es convergente.

Demostración. Basta advertir que $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^n |b_k - b_{k+1}| = \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

si $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente, mientras que

$$\sum_{k=1}^n |b_k - b_{k+1}| = \sum_{k=1}^n (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1$$

si $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente. \square

La Proposición 9.26 permite particularizar los criterios de Dirichlet y Abel como sigue.

Teorema 9.27 (Criterio particular de Dirichlet). Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales, y supongamos que:

(i) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene sumas parciales acotadas, es decir, existe $M > 0$ tal que $|a_1 + \dots + a_n| \leq M$.

(ii) La sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Demostración. El hecho de que toda sucesión convergente está acotada nos faculta para aplicar la Proposición 9.26 y situarnos en las hipótesis del Teorema 9.24. \square

Teorema 9.28 (Criterio particular de Abel). Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales, y supongamos que:

(i) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

(ii) La sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona y acotada.

Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Demostración. Es consecuencia directa de la Proposición 9.26. □

Ejemplo 9.29. Usando el criterio particular de Dirichlet, demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n}$$

converge.

Resolución. La sucesión $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona y converge a cero. Por otra parte, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(n\pi/2)$ tiene sumas parciales acotadas, ya que la sucesión de estas sumas es $\{1, 1, 0, 0, 1, 1, \dots\}$. El criterio particular de Dirichlet prueba que la serie dada converge. □

Ejemplo 9.30. Usando el criterio particular de Abel, demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+i)^n}$$

converge.

Resolución. La sucesión $\{1/n^2\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona y acotada. Por otra parte, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(1+i)^n$ es una serie geométrica de razón menor que 1, y por lo tanto converge (cf. Ejercicios 13 y 14(i)). El criterio particular de Abel prueba que la serie dada también converge. □

10 El plano complejo extendido

El plano complejo con la topología usual no es compacto, ya que no es acotado (Teorema 9.19). En esta sección estudiaremos cómo compactificar \mathbb{C} añadiéndole un punto, al que llamaremos *punto del infinito* y denotaremos ∞ . Con esta extensión podremos seguir visualizando geoméricamente los puntos de $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}_{\infty}$.

Sea \mathbb{S}^2 la esfera unidad en \mathbb{R}^3 :

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + t^2 = 1\}.$$

En ella destacamos el polo norte $N = (0, 0, 1)$. Identificamos \mathbb{C} con el plano OXY que contiene al ecuador de \mathbb{S}^2 . Por cada punto $z \in \mathbb{C}$ se traza la recta que lo une a N y que corta a \mathbb{S}^2 en un único $P \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$. Obtenemos una correspondencia biyectiva ψ entre \mathbb{C}_{∞} y \mathbb{S}^2 sin más que definir $\psi(z) = P$ ($z \in \mathbb{C}$) y $\psi(\infty) = N$. La correspondencia así definida se denomina *proyección estereográfica* y justifica la denominación de *esfera de Riemann* que recibe el *plano complejo extendido* \mathbb{C}_{∞} (fig. 8).

Analíticamente:

Proposición 10.1. La proyección estereográfica $\psi : \mathbb{C}_{\infty} \rightarrow \mathbb{S}^2$, definida por

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \psi(z) = P = \left(\frac{2\Re z}{|z|^2 + 1}, \frac{2\Im z}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \quad (7)$$

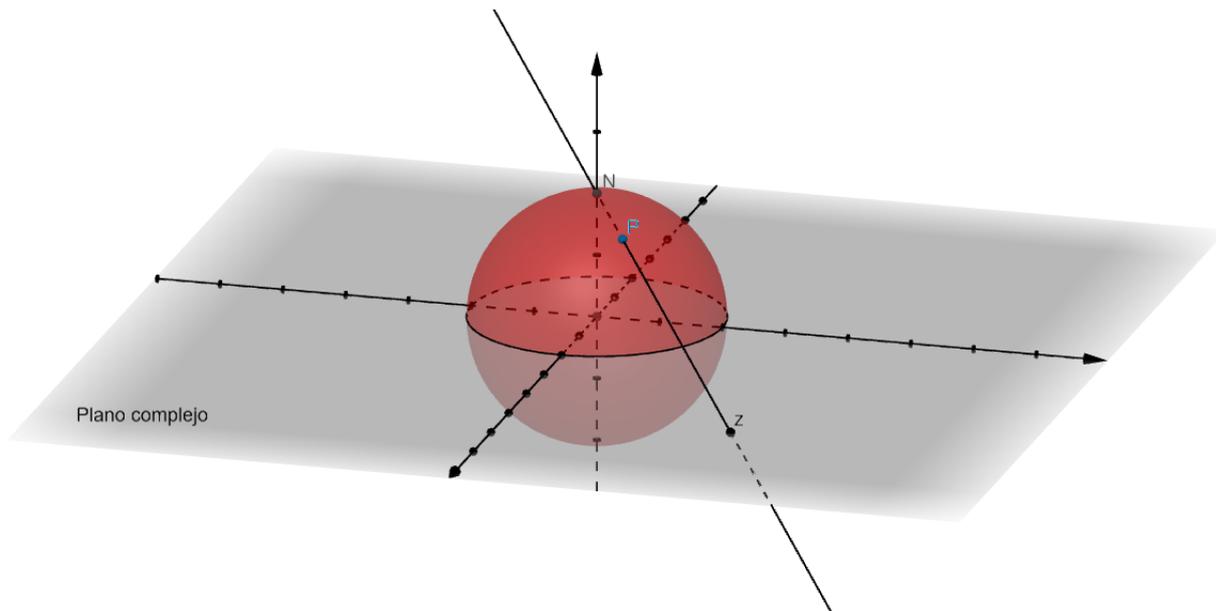


Figura 8. Proyección estereográfica.

$$\infty \mapsto \psi(\infty) = N,$$

es una biyección cuya inversa $\psi^{-1} : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ satisface

$$\psi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1-x_3} + i \frac{x_2}{1-x_3}. \tag{8}$$

Además, ψ es un homeomorfismo de \mathbb{C} con su métrica usual sobre $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ con la topología heredada de \mathbb{R}^3 .

Demostración. Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$. El punto $P = \psi(z)$ es la intersección con \mathbb{S}^2 de la recta que pasa por N y z . Un vector de dirección de esta recta es $(x, y, -1)$; luego, una ecuación paramétrica de dicha recta será:

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1) + \lambda(x, y, -1) = (\lambda x, \lambda y, 1 - \lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Intersecando con \mathbb{S}^2 obtenemos

$$1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + (1 - \lambda)^2,$$

o, equivalentemente,

$$\lambda [\lambda(x^2 + y^2 + 1) - 2] = 0.$$

De aquí, o bien $\lambda = 0$, o bien

$$\lambda = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{2}{|z|^2 + 1}. \tag{9}$$

El valor $\lambda = 0$ corresponde a N , de manera que el que proporciona el punto de intersección es (9). Sustituyéndolo en la ecuación paramétrica resulta

$$P = \psi(z) = \psi(x + iy) = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) = \left(\frac{2\Re z}{|z|^2 + 1}, \frac{2\Im z}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

Por consideraciones geométricas, es claro que ψ es biyectiva, y por lo tanto admite inversa. Supongamos que

$P = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, y que $z = x + iy \in \mathbb{C}$ satisface $z = \psi^{-1}(P)$. Existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_1 = \mu x, \quad x_2 = \mu y, \quad x_3 = 1 - \mu.$$

Eliminando μ entre estas ecuaciones obtenemos:

$$\psi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = x + iy = \frac{x_1}{1 - x_3} + i \frac{x_2}{1 - x_3} \quad ((x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 1)).$$

A continuación queremos ver que tanto $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ como $\psi^{-1} : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ son continuas.

Para probar la continuidad de ψ , basta establecer su continuidad secuencial. Supongamos que $z_n = a_n + ib_n \in \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}$) son tales que $z_n \rightarrow z = a + ib$ en \mathbb{C} , cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces $a_n \rightarrow a$ y $b_n \rightarrow b$ en \mathbb{R} , cuando $n \rightarrow \infty$. Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n}{a_n^2 + b_n^2 + 1} = \frac{2a}{a^2 + b^2 + 1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2b_n}{a_n^2 + b_n^2 + 1} = \frac{2b}{a^2 + b^2 + 1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 + b_n^2 - 1}{a_n^2 + b_n^2 + 1} = \frac{a^2 + b^2 - 1}{a^2 + b^2 + 1}.$$

Consecuentemente, $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(z_n) = \psi(z)$, probando que ψ es continua.

Ahora demostraremos la continuidad de ψ^{-1} . Sea $\{(r_n, s_n, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ que converge a $(r, s, t) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ en la topología heredada de \mathbb{R}^3 . Entonces $r_n \rightarrow r$, $s_n \rightarrow s$ y $t_n \rightarrow t$ cuando $n \rightarrow \infty$, en la topología de \mathbb{R} . Por consiguiente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{1 - t_n} = \frac{r}{1 - t}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{1 - t_n} = \frac{s}{1 - t};$$

es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi^{-1}(r_n, s_n, t_n) = \psi^{-1}(r, s, t)$, como queríamos demostrar. \square

Aprovechamos ahora la biyectividad de ψ para transferir a \mathbb{C}_{∞} la topología de \mathbb{S}^2 . Denotemos por d_3 la métrica euclídea de \mathbb{R}^3 :

$$d_3((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} \quad ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3).$$

Definición 10.2. Si $z, w \in \mathbb{C}_{\infty}$, se define la distancia cordal entre z y w , $\chi(z, w)$, como la distancia entre las respectivas proyecciones estereográficas:

$$\chi(z, w) = d_3(\psi(z), \psi(w)).$$

Nótese que la distancia cordal mide cuerdas en la esfera, lo que justifica su denominación.

Claramente, χ es una métrica en \mathbb{C}_{∞} . Además, $\chi(z, w) \leq 2$ ($z, w \in \mathbb{C}_{\infty}$), pues el diámetro de \mathbb{S}^2 bajo d_3 es 2; por esta razón, la restricción de χ a \mathbb{C} no puede coincidir con la distancia euclídea de \mathbb{C} , que no está acotada. Aunque ambas distancias no son métricamente equivalentes sobre \mathbb{C} , lo son topológicamente, como se verá en el Teorema 10.4.

Proposición 10.3. La distancia cordal de \mathbb{C}_{∞} viene dada por:

$$\chi(z, w) = \begin{cases} \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}}, & z, w \in \mathbb{C} \\ \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}, & z \in \mathbb{C}, w = \infty \\ 0, & z = w = \infty. \end{cases}$$

Demostración. Pongamos $z = x + iy, w = u + iv \in \mathbb{C}$, de modo que

$$\begin{aligned}\psi(z) &= \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) = (x_1, x_2, x_3) \\ \psi(w) &= \left(\frac{2u}{|w|^2 + 1}, \frac{2v}{|w|^2 + 1}, \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1} \right) = (y_1, y_2, y_3),\end{aligned}$$

con $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$. Ahora,

$$\begin{aligned}\chi^2(z, w) &= d_3^2(\psi(z), \psi(w)) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 \\ &= (x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2) + (x_2^2 - 2x_2y_2 + y_2^2) + (x_3^2 - 2x_3y_3 + y_3^2) = 2(1 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3) \\ &= 2 \left[1 - \frac{4xu}{(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)} - \frac{4yv}{(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)} - \frac{(|z|^2 - 1)(|w|^2 - 1)}{(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)} \right] \\ &= \frac{2}{(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)} [(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1) - 4xu - 4yv - (|z|^2 - 1)(|w|^2 - 1)] \\ &= \frac{4}{(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)} [|z|^2 + |w|^2 - 2\Re(z\bar{w})] \\ &= \frac{4}{(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)} |z - w|^2.\end{aligned}$$

Tomando raíces cuadradas positivas:

$$\chi(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{|z|^2 + 1}\sqrt{|w|^2 + 1}}.$$

Similarmemente, para $z = x + iy \in \mathbb{C}$ y $w = \infty$, con $\psi(z) = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ y $\psi(\infty) = (0, 0, 1)$:

$$\begin{aligned}\chi^2(z, \infty) &= d_3^2(\psi(z), \psi(\infty)) = d_3^2((x_1, x_2, x_3), (0, 0, 1)) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_3 + 1 = 2(1 - x_3) \\ &= 2 \left(1 - \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) = \frac{4}{|z|^2 + 1};\end{aligned}$$

luego,

$$\chi(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{|z|^2 + 1}}.$$

Esto completa la demostración. □

Teorema 10.4. *Se verifican los siguientes enunciados:*

- (i) *El espacio métrico $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ es compacto.*
- (ii) *Las métricas cordal y euclídea inducen la misma topología en \mathbb{C} .*
- (iii) *Los conjuntos $\{\infty\} \cup \{z : |z| > r\}$ ($r > 0$) constituyen una base local de ∞ en $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$.*

Demostración.

- (i) \mathbb{S}^2 es cerrado y acotado, por tanto compacto, en \mathbb{R}^3 . Ya que ψ^{-1} es una isometría (luego, un homeomorfismo) de (\mathbb{S}^2, d_3) en $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$, este espacio es también compacto.

(ii) Hemos de probar que la identidad $\text{id} : (\mathbb{C}, d) \rightarrow (\mathbb{C}_\infty, \chi)$ es un homeomorfismo de \mathbb{C} en \mathbb{C} ; pero esto es consecuencia inmediata de la Definición 10.2 y la Proposición 10.1. En efecto, sean $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$. Si $|z_n - z| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ entonces, ya que la función ψ es continua, $\chi(\text{id}(z_n), \text{id}(z)) = \chi(z_n, z) = d_3(\psi(z_n), \psi(z)) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, probando que la función id es asimismo continua. Recíprocamente, por la continuidad de ψ^{-1} , si $\chi(z_n, z) = d_3(\psi(z_n), \psi(z)) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces $|\text{id}^{-1}(z_n) - \text{id}^{-1}(z)| = |z_n - z| = |\psi^{-1} \circ \psi(z_n) - \psi^{-1} \circ \psi(z)| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, lo que establece la continuidad de la función id^{-1} sobre \mathbb{C} .

(iii) Recordemos que, en un espacio métrico, la colección de discos abiertos centrados en un punto constituye una base local o base de entornos en ese punto. Si $R > 2$, $\{z \in \mathbb{C}_\infty : \chi(\infty, z) < R\} = \mathbb{C}_\infty$. Si $R = 2$, entonces $z \in \mathbb{C}$ es tal que $\chi(\infty, z) < 2 = R$ si, y sólo si, $|z| > 0$ ó, equivalentemente, existe $r > 0$ tal que $|z| > r$. Si $0 < R < 2$, pongamos

$$r = \sqrt{\frac{4}{R^2} - 1} > 0.$$

Para $z \in \mathbb{C}$, se tiene que $\chi(z, \infty) < R$ si, y sólo si, $|z| > r$, probando (iii).

□

11 Ejercicios resueltos

1. Demostrar que $|z+w|^2 = |z|^2 + 2\Re(z\bar{w}) + |w|^2$ ($z, w \in \mathbb{C}$).

Resolución. Para $z, w \in \mathbb{C}$, podemos escribir:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\bar{z} + \bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2\Re(z\bar{w}) + |w|^2. \end{aligned}$$

□

2. Calcular las partes real e imaginaria de $\frac{\bar{z}}{1+z^2}$, siendo $z = x+iy \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$.

Resolución. Se tiene:

$$\frac{\bar{z}}{1+z^2} = \frac{\bar{z}(1+\bar{z}^2)}{(1+z^2)(1+\bar{z}^2)} = \frac{\bar{z} + \bar{z}^3}{|1+z^2|^2}.$$

Como

$$\bar{z}^3 = \overline{(x+iy)^3} = \overline{x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3} = \overline{(x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)} = (x^3 - 3xy^2) - i(3x^2y - y^3)$$

y

$$|1+z^2|^2 = |z|^4 + 2\Re z^2 + 1 = (x^2+y^2)^2 + 2(x^2-y^2) + 1 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^2 - 2y^2 + 1,$$

resulta que

$$\frac{\bar{z}}{1+z^2} = \frac{(x+x^3-3xy^2) - i(y+3x^2y-y^3)}{x^4+y^4+2x^2y^2+2x^2-2y^2+1},$$

de donde

$$\Re\left(\frac{\bar{z}}{1+z^2}\right) = \frac{x+x^3-3xy^2}{x^4+y^4+2x^2y^2+2x^2-2y^2+1}, \quad \Im\left(\frac{\bar{z}}{1+z^2}\right) = -\frac{y+3x^2y-y^3}{x^4+y^4+2x^2y^2+2x^2-2y^2+1}.$$

□

3. Calcular $\left| \frac{(2+i\sqrt{5})(1+i\sqrt{3})^3}{\sqrt{5}+i\sqrt{3}} \right|$.

Resolución. Puesto que

$$|2+i\sqrt{5}| = \sqrt{4+5} = 3, \quad |1+i\sqrt{3}|^3 = (1+3)^{3/2} = 2^3 = 8, \quad |\sqrt{5}+i\sqrt{3}| = \sqrt{5+3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

se verifica:

$$\left| \frac{(2+i\sqrt{5})(1+i\sqrt{3})^3}{\sqrt{5}+i\sqrt{3}} \right| = \frac{|2+i\sqrt{5}| |1+i\sqrt{3}|^3}{|\sqrt{5}+i\sqrt{3}|} = \frac{3 \cdot 8}{2\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}.$$

□

4. Hallar los números complejos z tales que $w = \frac{2z-i}{2+iz}$ es:

(i) real;

(ii) imaginario puro.

Resolución. Antes que nada, debemos excluir el valor $z = 2i$, que anula al denominador de w . Ahora, si $z = x + iy$, escribimos:

$$\begin{aligned} w &= \frac{2z-i}{2+iz} = \frac{(2z-i)(2-i\bar{z})}{|2+iz|^2} \\ &= \frac{4z - \bar{z} - i2(|z|^2+1)}{|2+iz|^2} \end{aligned} \tag{10}$$

$$= \frac{3x - i(2x^2 + 2y^2 - 5y + 2)}{|2+iz|^2}. \tag{11}$$

(i) Para que $w \in \mathbb{R}$, debemos imponer que $\Im w = 0$. Usando (10), la condición es que se tenga

$$\frac{4}{2i}(z - \bar{z}) - \frac{1}{2i}(\bar{z} - z) - 2(|z|^2 + 1) = 0;$$

equivalentemente,

$$\frac{5}{2i}(z - \bar{z}) - 2(|z|^2 + 1) = 0$$

o bien

$$|z|^2 + \frac{5i}{4}z - \frac{5i}{4}\bar{z} + 1 = 0.$$

De acuerdo con la Proposición 6.9, z describe una circunferencia de centro $5i/4$ y radio

$$\sqrt{\left|\frac{5i}{4}\right|^2 - 1} = \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \frac{3}{4},$$

cuya ecuación también podemos expresar en la forma

$$\left|z - \frac{5i}{4}\right| = \frac{3}{4}.$$

Alternativamente, usando (11) la condición es que $2x^2 + 2y^2 - 5y + 2 = 0$, o bien

$$x^2 + y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = 0.$$

Completando cuadrados en esta expresión resulta

$$x^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16},$$

que es la ecuación de una circunferencia de centro $(0, 5/4)$ y radio $3/4$.

El valor $z = 2i$ pertenece a esta circunferencia y, como indicamos al principio de la resolución, ha de ser excluido: $z \neq 2i$.

- (ii) Para que w sea imaginario puro, imponemos que $\Re w = 0$; atendiendo a (11), debemos tener $3x = 0$, o bien $x = 0$. En notación compleja, los z buscados son los que satisfacen las condiciones

$$z + \bar{z} = 0 \quad \text{y} \quad z \neq 2i,$$

o, más resumidamente, $z \in i\mathbb{R} \setminus \{2i\}$.

5. Encontrar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $w = \frac{z-1-i}{z+1+i}$:

- (i) es real;
(ii) tiene módulo 1.

Demostración. Para $z \neq -1 - i$, podemos escribir:

$$\begin{aligned} w &= \frac{z-1-i}{z+1+i} = \frac{(z-1-i)(\bar{z}+1-i)}{|z+1+i|^2} = \frac{|z|^2 + z - iz - \bar{z} - 1 + i - i\bar{z} - i - 1}{|z+1+i|^2} \\ &= \frac{|z|^2 + (z - \bar{z}) - i(z + \bar{z}) - 2}{|z+1+i|^2} = \frac{|z|^2 - 2 + 2i(\Im z - \Re z)}{|z+1+i|^2}. \end{aligned}$$

- (i) Imponiendo que $\Im w = 0$:

$$\Im z - \Re z = 0,$$

o bien, si $z = x + iy$,

$$y = x.$$

Esta ecuación corresponde a la bisectriz del primer-tercer cuadrantes, de la que debemos excluir el punto $(-1, -1)$, identificable con $z = -1 - i$.

(ii) Imponiendo que $|w| = 1$:

$$|z - 1 - i| = |z + 1 + i|,$$

de donde

$$|z|^2 - 2\Re[z(1 - i)] + 2 = |z|^2 + 2\Re[z(1 - i)] + 2;$$

se infiere que

$$\Re[z(1 - i)] = 0.$$

Haciendo aquí $z = x + iy$ desembocamos en la ecuación

$$\Re[(x + y) + i(y - x)] = 0,$$

es decir:

$$y = -x,$$

correspondiente a la bisectriz del segundo-cuarto cuadrantes.

□

6. Expresar los siguientes complejos en sus formas trigonométrica, exponencial y polar:

(i) $-1 + i$;

(ii) $\frac{-\sqrt{3} + i}{1 + i}$;

(iii) $\frac{1}{-1 + i\sqrt{3}}$.

Resolución.

(i) Se tiene que $|-1 + i| = \sqrt{2}$; además,

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos \theta = -1 & \text{implica } \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sqrt{2} \sen \theta = 1 & \text{implica } \sen \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Se desprende que $\theta = 3\pi/4 = \text{Arg}(-1 + i)$. Consecuentemente:

$$\begin{aligned} -1 + i &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sen \frac{3\pi}{4} \right) && \text{(forma trigonométrica),} \\ &= \sqrt{2} e^{i3\pi/4} && \text{(forma exponencial),} \\ &= \sqrt{2} {}_{3\pi/4} && \text{(forma polar).} \end{aligned}$$

(ii) Se tiene que $|\sqrt{-3} + i| = 2$ y $|1 + i| = \sqrt{2}$. Por una parte,

$$\begin{cases} 2 \cos \theta = -\sqrt{3} & \text{implica } \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ 2 \operatorname{sen} \theta = 1 & \text{implica } \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Se desprende que $\theta = 5\pi/6 = \operatorname{Arg}(-\sqrt{3} + i)$. Análogamente,

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos \phi = 1 & \text{implica } \cos \phi = \frac{1}{2}, \\ \sqrt{2} \operatorname{sen} \phi = 1 & \text{implica } \operatorname{sen} \phi = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Se desprende que $\phi = \pi/4 = \operatorname{Arg}(1 + i)$. En consecuencia, un argumento de $(-\sqrt{3} + i)/(1 + i)$ es

$$\theta - \phi = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}.$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} \frac{-\sqrt{3} + i}{1 + i} &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{12} \right) && \text{(forma trigonométrica),} \\ &= \sqrt{2} e^{i7\pi/12} && \text{(forma exponencial),} \\ &= \sqrt{2} e^{i7\pi/12} && \text{(forma polar).} \end{aligned}$$

(iii) Se tiene que $|-1 + i\sqrt{3}| = 2$; además,

$$\begin{cases} 2 \cos \theta = -1 & \text{implica } \cos \theta = -\frac{1}{2}, \\ 2 \operatorname{sen} \theta = \sqrt{3} & \text{implica } \operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Se desprende que $\theta = 2\pi/3 = \operatorname{Arg}(-1 + i\sqrt{3})$. Consecuentemente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{-1 + i\sqrt{3}} &= 2^{-1} \left[\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right] = 2^{-1} \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right) && \text{(forma trigonométrica),} \\ &= 2^{-1} e^{-i2\pi/3} && \text{(forma exponencial),} \\ &= 2^{-1} e^{-i2\pi/3} && \text{(forma polar).} \end{aligned}$$

□

7. Hallar los $z \in \mathbb{C}$ tales que $w = \frac{2z-1}{z-2}$ satisface:

(i) $\operatorname{Arg} w = \pi/2$;

(ii) $\operatorname{Arg} w = -\pi/2$.

Resolución. En primer lugar, observamos que debemos excluir el valor $z = 2$, el cual anula al denominador: $z \neq 2$.

Por otra parte, se cumple que $\text{Arg } w = \pi/2$ ó $\text{Arg } w = -\pi/2$ si, y sólo si, $w \neq 0$ es imaginario puro. Por tanto, las siguientes condiciones a imponer son que $z \neq 1/2$ y $\Re w = 0$. Hecho esto, se tendrá (i) ó (ii) según que $\Im w > 0$ ó $\Im w < 0$, respectivamente.

Escribamos $z = x + iy$. Se verifica:

$$w = \frac{2z-1}{z-2} = \frac{(2z-1)(\bar{z}-2)}{|z-2|^2} = \frac{2|z|^2 - 4z - \bar{z} + 2}{|z-2|^2}.$$

La condición $\Re w = 0$ se traduce en $2x^2 + 2y^2 - 5x + 2 = 0$, o bien

$$x^2 + y^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0.$$

Completando cuadrados obtenemos la ecuación de la circunferencia de centro $(5/4, 0)$ y radio $3/4$:

$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16}.$$

Por otra parte, $\Im w = -3y$. Consecuentemente, se tendrá (i) si $y < 0$; por tanto, el lugar geométrico de los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen (i) es la semicircunferencia inferior de centro $(5/4, 0)$ y radio $3/4$, excluyendo los puntos de ésta situados sobre el eje real. Y se tendrá (ii) si $y > 0$; por tanto, el lugar geométrico de los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen (ii) es la semicircunferencia superior de centro $(5/4, 0)$ y radio $3/4$, excluyendo, de nuevo, los puntos de esta semicircunferencia situados sobre el eje real. Concretamente, quedan excluidos los puntos $z = 1/2$ y $z = 2$, que ya habíamos descartado. \square

8. Probar:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2) \quad (z, w \in \mathbb{C}).$$

Esta identidad se conoce como *ley del paralelogramo*. Justificar geoméricamente tal denominación.

Resolución. Fijados $z, w \in \mathbb{C}$, en virtud del Ejercicio 1 podemos escribir:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = [|z|^2 + 2\Re(z\bar{w}) + |w|^2] + [|z|^2 - 2\Re(z\bar{w}) + |w|^2] = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

La denominación de *ley del paralelogramo* proviene de la siguiente interpretación geométrica: *la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales de un paralelogramo es igual al doble de la suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados.* \square

9. Demostrar la desigualdad:

$$|z+w| \geq \frac{1}{2}(|z|+|w|) \left| \frac{z}{|z|} + \frac{w}{|w|} \right| \quad (z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

Resolución. En efecto, dados $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se tiene:

$$(|z|+|w|) \left| \frac{z}{|z|} + \frac{w}{|w|} \right| = \left| (|z|+|w|) \left(\frac{z}{|z|} + \frac{w}{|w|} \right) \right| = \left| z + \frac{|z|w}{|w|} + \frac{|w|z}{|z|} + w \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq |z+w| + \frac{||z|^2w + |w|^2z|}{|zw|} = |z+w| + \frac{|zw(\bar{z} + \bar{w})|}{|zw|} \\ &= |z+w| + \frac{|zw||z+w|}{|zw|} = 2|z+w|. \end{aligned}$$

□

10. Probar que $z \in \mathbb{C}$ es real o imaginario puro si, y sólo si, $\bar{z}^2 = z^2$.

Resolución. Si $z = 0$ entonces $z \in \mathbb{R} \cap (i\mathbb{R})$ y cumple que $\bar{z}^2 = z^2$. Si $z \neq 0$, se tiene que $\bar{z}^2 = z^2$ si, y sólo si, $e^{-i2\theta} = e^{i2\theta}$, donde θ es un argumento de z . Pero esto ocurre si, y sólo si, $-2\theta = 2\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) o, equivalentemente, $\theta = k\pi/2$ ($k \in \mathbb{Z}$). Como k es par si, y sólo si, z está sobre el eje real, mientras que k es impar si, y sólo si, z es imaginario puro, el ejercicio queda resuelto. □

11. (i) Esbozar gráficamente el conjunto A de los puntos $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen la desigualdad indicada en cada caso, especificando si A es: abierto; cerrado; acotado; conexo; compacto; un dominio.

(a) $\Re z < -1$;

(b) $\Im z > 3$;

(c) $2 < \Re(z-1) < 4$;

(d) $\Re z^2 > 0$;

(e) $|z-i| > 1$;

(f) $1 \leq |z-1-i| < 2$.

(ii) Un punto $a \in \mathbb{C}$ es un *punto frontera* de un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ si para todo $r > 0$ se tiene que $D(a, r) \cap S \neq \emptyset$ y $D(a, r) \cap (\mathbb{C} \setminus S) \neq \emptyset$. El conjunto de los puntos frontera de S se llama *frontera* de S , y se denota ∂S . Por ejemplo, ya vimos al comienzo de la sección 9 que $\partial D(a, r) = C(a, r)$. ¿Cuáles son las fronteras de los conjuntos considerados en (i)?

Resolución.

(i) Todos los conjuntos, excepto (f) son abiertos. Ninguno de ellos es cerrado ni, por tanto, compacto (Teorema 9.19). Únicamente (f) es acotado. Todos, salvo (d), son conexos. No son dominios (d) ni (f) (Definición 9.4). Véase la fig. 9.

(ii) Las fronteras de estos conjuntos vienen dados por los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen:

(a) $\Re z = -1$;

(b) $\Im z = 3$;

(c) $\Re z = 3$ ó $\Re z = 5$;

(d) $\Im z = \pm \Re z$;

(e) $|z-i| = 1$;

(f) $|z-1-i| = 1$ ó $|z-1-i| = 2$.

□

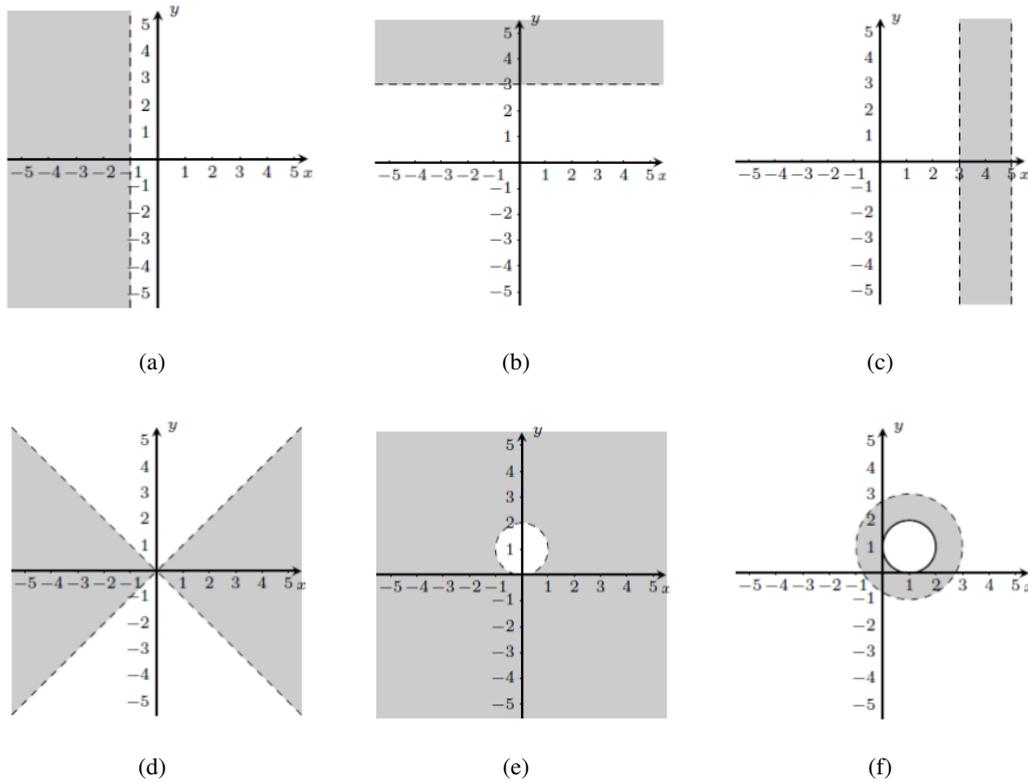


Figura 9. Ejercicio 11(i).

12. Describir el conjunto sombreado de la fig. 10 usando $\text{Arg } z$ y una desigualdad conveniente.

Resolución. Se trata del conjunto de los $z \in \mathbb{C}$ tales que $|\text{Arg } z| \leq 2\pi/3$. □

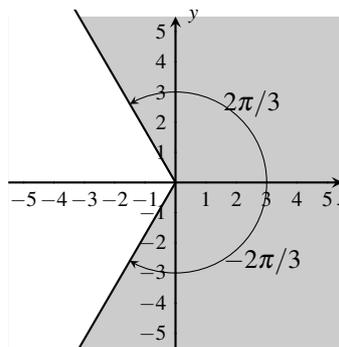


Figura 10. Ejercicio 12.

13. Se considera la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Demostrar que:

(i) Esta serie es convergente si, y sólo si, $|z| < 1$.

(ii) Si converge, su suma es $S = \frac{1}{1-z}$.

Resolución. El término n -ésimo de la serie es $u_n = z^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Si $|z| \geq 1$, también $|u_n| = |z|^{n-1} \geq 1$ ($n \in \mathbb{N}$); es decir, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ no tiende a cero, lo cual implica que la serie no es convergente.

Sea $|z| < 1$. La n -ésima suma parcial de la serie es:

$$S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z} \quad (n \in \mathbb{N});$$

para comprobarlo, basta advertir que

$$\begin{aligned} (1 - z)S_n &= (1 - z)(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) \\ &= (1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) - (z + z^2 + \dots + z^n) \\ &= 1 - z^n \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Ahora, $|z^n| = |z|^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por tanto,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

Quedan, pues, demostrados los apartados (i) y (ii). □

14. Hallar la suma de las series:

$$\begin{aligned} (i) & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n}; \\ (ii) & \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{i}{2^n} + \frac{5}{(1+i)^n} \right]. \end{aligned}$$

Resolución. Nos apoyaremos en el Ejercicio 13.

(i) Se trata de una serie geométrica de razón $1/(1+i)$, con $|1/(1+i)| = 1/\sqrt{2} < 1$; por tanto, es convergente y su suma vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1}{1 - 1/(1+i)} = \frac{1+i}{i} = 1 - i.$$

(ii) Usando el álgebra de series y el apartado precedente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{i}{2^n} + \frac{5}{(1+i)^n} \right] = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} + 5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{i}{1 - 1/2} + 5(1 - i) = 2i + (5 - 5i) = 5 - 3i.$$

□

15. Probar el *criterio del cociente*: sea $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ una serie compleja. Supongamos que $|u_{n+1}/u_n|$ tiene límite L . Entonces:

- (i) si $L < 1$, la serie converge absolutamente;
- (ii) si $L > 1$, la serie no converge;
- (iii) si $L = 1$, el criterio no es concluyente.

Resolución.

- (i) Sea $L < 1$, y consideremos un número r tal que $L < r < 1$. Por definición de límite, para n suficientemente grande se verifica que $|u_{n+1}/u_n| < r$. Puesto que suprimir un número finito de términos de la serie no altera su carácter, podemos suponer que se verifica $|u_{n+1}/u_n| < r$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tenemos, pues:

$$|u_n| = \left| \frac{u_n}{u_{n-1}} \right| \left| \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \right| \left| \frac{u_{n-2}}{u_{n-3}} \right| \cdots \left| \frac{u_2}{u_1} \right| |u_1| < |u_1| r^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

Como $r < 1$, la serie de término general $|u_n| r^{n-1}$ es convergente (cf. Ejercicio 13). Por el criterio de comparación para series de términos positivos, la serie de término general $|u_n|$ es convergente.

- (ii) Si $L > 1$ entonces, para n suficientemente grande, se verifica $|u_{n+1}/u_n| > 1$ o, equivalentemente, $|u_{n+1}| > |u_n|$; luego, el término general u_n no tiende a cero, y como consecuencia la serie no converge.
- (iii) Consideremos las series armónicas reales (por tanto, complejas):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \tag{12}$$

Para la primera serie tenemos

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

y para la segunda

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} = 1.$$

En ambos casos, $L = 1$. Sabemos, por la teoría de series reales, que la primera diverge y la segunda converge. Esto demuestra que cuando $L = 1$, el criterio del cociente no decide sobre el carácter de la serie.

□

16. Probar el *criterio de la raíz*: sea $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ una serie compleja. Supongamos que $\{\sqrt[n]{|u_n|}\}_{n=1}^{\infty}$ tiene límite L . Entonces:

- (i) si $L < 1$, la serie converge absolutamente;
- (ii) si $L > 1$, la serie no converge;
- (iii) si $L = 1$, el criterio no es concluyente.

Resolución.

- (i) Supongamos que $L < 1$ y consideremos un número r tal que $L < r < 1$. Por definición de límite, para n suficientemente grande se verifica $\sqrt[n]{|u_n|} < r$, ó, de forma equivalente, $|u_n| < r^n$. Como la serie de término general r^n es convergente (cf. Ejercicio 13), se deduce que la serie de término general $|u_n|$ es convergente.
- (ii) Si $L > 1$, por definición de límite se verifica, para n suficientemente grande, que $\sqrt[n]{|u_n|} > 1$ o, de forma equivalente, $|u_n| > 1$, así que $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ no tiende a cero. Luego, la serie correspondiente no converge.

(iii) Consideremos, de nuevo, las series (12). Para la primera de ellas tenemos

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1/n}} = 1,$$

y para la segunda

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^{1/n}}\right)^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1/n}}\right)^2 = 1.$$

En ambos casos $L = 1$, pero, como sabemos, la primera serie es divergente y la segunda convergente. Por tanto, si $L = 1$ el criterio de la raíz no permite concluir nada sobre el carácter de la serie.

□

17. Estudiar la convergencia absoluta de las series:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n n}{2^n};$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-2)^n}.$$

Resolución.

(i) Usando el criterio del cociente:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(1+i)^{n+1}(n+1)}{2^{n+1}} \frac{2^n}{(1+i)^n n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1+i}{2} \frac{n+1}{n} \right| = \left| \frac{1+i}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1.$$

Por tanto, la serie es absolutamente convergente.

(ii) Usando el criterio de la raíz:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(|z-2|)^{1/n}} = \frac{1}{|z-2|},$$

con $1/|z-2| < 1$ si, y sólo si, $|z-2| > 1$. Así pues, si $|z-2| > 1$ la serie es absolutamente convergente, y si $|z-2| < 1$ no converge. Cuando $|z-2| = 1$ el criterio no es concluyente, pero, según el Ejercicio 13, la serie tampoco converge.

□

18. Describir las imágenes por la proyección estereográfica del disco unidad abierto de \mathbb{C} , del exterior de este disco, y de la circunferencia unidad.

Resolución. Geométricamente es claro que el disco unidad abierto de \mathbb{C} , $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, se corresponde con el hemisferio sur de \mathbb{S}^2 , $x_3 < 0$, y que el exterior de \mathbb{D} , $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$, se corresponde con el hemisferio norte de \mathbb{S}^2 , $x_3 > 0$, mientras que la circunferencia unidad de \mathbb{C} , $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, se corresponde con el ecuador de \mathbb{S}^2 ,

$x_3 = 0$. La fórmula (7) refleja analíticamente estos hechos:

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}. \quad (13)$$

□

19. Demostrar que, bajo la proyección estereográfica, las rectas de \mathbb{C} se transforman en circunferencias sobre \mathbb{S}^2 que pasan por el polo norte, mientras que las circunferencias de \mathbb{C} se transforman en circunferencias sobre \mathbb{S}^2 que no pasan por el polo norte. Inversamente, probar que las circunferencias sobre \mathbb{S}^2 se transforman en rectas y circunferencias de \mathbb{C} según pasen o no por el polo norte, respectivamente.

Resolución. Estas transformaciones resultan evidentes a partir de la construcción geométrica. A continuación resolveremos el ejercicio analíticamente.

Probamos, en primer lugar, que una recta en el plano se transforma en una circunferencia sobre la esfera que pasa por el polo norte. Una recta en \mathbb{C} está definida por la ecuación

$$ax + by = c,$$

con a, b no simultáneamente nulos. Según (8), estos puntos se corresponden con el conjunto de puntos de la esfera definido por la ecuación

$$\frac{ax_1}{1-x_3} + \frac{bx_2}{1-x_3} = c \quad (x_3 \neq 1),$$

o bien

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = c,$$

los cuales están contenidos en la intersección de un plano con la esfera, es decir, describen una circunferencia. Puesto que $\psi(\infty) = (0, 0, 1)$ también satisface dicha ecuación, esta circunferencia pasa por el polo norte.

Estableceremos ahora que una circunferencia en \mathbb{C} se transforma en una circunferencia sobre la esfera que no pasa por el polo norte. Una circunferencia en el plano está representada por la ecuación

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Haciendo $z = x + iy$ en (13) vemos que se tiene

$$x^2 + y^2 = \frac{1+x_3}{1-x_3} \quad (x_3 \neq 1).$$

De aquí y de (8) sigue que la imagen de la circunferencia en la esfera está definida por los puntos (x_1, x_2, x_3) que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1+x_3}{1-x_3} + \frac{ax_1}{1-x_3} + \frac{bx_2}{1-x_3} + c = 0,$$

$$1 + x_3 + ax_1 + bx_2 + c(1-x_3) = 0,$$

$$ax_1 + bx_2 + (1-c)x_3 + (1+c) = 0.$$

Se concluye que tales puntos están contenidos en un plano, y por lo tanto describen una circunferencia sobre la esfera, que, obviamente, no pasa por el polo norte.

Para finalizar, probamos que una circunferencia en la esfera se transforma en una recta o una circunferencia en el plano. Una circunferencia en \mathbb{S}^2 es la intersección de un plano con la esfera, por lo que sus puntos satisfacen una ecuación de la forma

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d, \quad (14)$$

o, atendiendo a (7),

$$\frac{a(z + \bar{z})}{|z|^2 + 1} + \frac{b(z - \bar{z})}{i(|z|^2 + 1)} + \frac{c(|z|^2 - 1)}{|z|^2 + 1} = d;$$

equivalentemente,

$$a(z + \bar{z}) - ib(z - \bar{z}) + c(|z|^2 - 1) - d(|z|^2 + 1) = 0.$$

Agrupando los términos en $|z|^2$, z y \bar{z} , resulta la ecuación

$$(c - d)|z|^2 + (a - ib)z + (a + ib)\bar{z} - c - d = 0,$$

que corresponde a una recta o una circunferencia según que $c = d$ ó $c \neq d$, respectivamente (Proposición 6.9). Sigue de (14) que la circunferencia de partida pasa por el polo norte de \mathbb{S}^2 si, y sólo si, $c = d$, es decir si, y sólo si, su imagen es una recta de \mathbb{C} . \square

20. Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos. Demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi(z_n, \infty) = 0$ si, y sólo si, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverge.

Resolución. Basta observar que, por el Teorema 10.4(iii), $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi(z_n, \infty) = 0$ si, y sólo si, dado $r > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq N$ implican $|z_n| > r$. \square