# Apuntes de Variable Compleja

## Tema 2: Funciones holomorfas, armónicas y analíticas

Isabel Marrero
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

## Índice

# 1 Introducción

Ya quedó dicho que el plano complejo $\mathbb{C}$ es isomorfo al plano euclídeo real bidimensional $\mathbb{R}^2$. A la hora de definir una función sobre $\mathbb{C}$, cabría pensar que ésta es, igualmente, indistinguible de una función de dos variables reales. Pero esto no es del todo cierto, en general, y la razón estriba en que $f(z)$ es también función de la única variable compleja $z$. Así pues, de algún modo, una función compleja se encuentra a medio camino entre las funciones de una variable real y las de dos variables reales, lo cual permite definir para las funciones complejas conceptos que no cabe definir para funciones de dos variables reales, como ocurre con el de derivada.

Comenzamos advirtiendo que no es posible dibujar la gráfica de una función compleja como veníamos haciéndolo con las funciones estudiadas en cálculo elemental, lo que nos motiva a considerarlas como transformaciones (sección 2). A continuación estudiamos los conceptos de límite y continuidad de una función compleja, que tienen propiedades similares a los correspondientes a funciones definidas en $\mathbb{R}^2$, y definimos qué se entiende por rama de una función multivaluada (sección 3). La derivada compleja, que se introduce en la sección 4, es un concepto fundamental dentro de la teoría de funciones de variable compleja. Aunque su definición es formalmente análoga a la de derivada de una función de variable real, el hecho de tomar el límite en $\mathbb{C}$ hace que las condiciones bajo las cuales existe esta derivada sean más fuertes que en el caso real. Las funciones complejas que son derivables en todos los puntos de un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dicen holomorfas en $\Omega$ y se comportan mejor que las funciones derivables reales. En esta sección también se introducen las funciones de dos variables reales que satisfacen la ecuación de Laplace en $\mathbb{R}^2$, llamadas armónicas, y se discute la relación existente entre éstas y las funciones holomorfas. En la sección 5 se estudia el comportamiento y las propiedades de las sucesiones y series de funciones complejas. Dentro de las sucesiones funcionales tienen especial interés las series de potencias, las cuales definen, en su círculo de convergencia, funciones complejas con muy buenas propiedades de regularidad, llamadas funciones analíticas; veremos en el siguiente tema que, de hecho, los conceptos de holomorfía y analiticidad son equivalentes. Concluimos definiendo las funciones complejas elementales (exponencial, logaritmo, potencial, trigonométricas) como extensiones de las correspondientes reales y estableciendo algunas de sus propiedades.

# 2 Funciones complejas de variable compleja

## 2.1 Funciones complejas de variable compleja

**Definición 2.1.** *Una* función compleja de variable compleja *o, más brevemente, una* función compleja *es una aplicación* $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. *Llamamos* dominio *de $f$ al mayor conjunto $S$ donde $f$ está definida.*

**Observación 2.2.** *El término «dominio» se emplea aquí en sentido conjuntista y no topológico; es decir, no se exige, en principio, que $S$ sea abierto y conexo.*

**Ejemplo 2.3.** *Son funciones complejas de variable compleja las siguientes: $f(z) = az + b$ $(a, b \in \mathbb{C})$, $f(z) = z^2$, $f(z) = z^4 - 1$, todas ellas definidas para $z \in S = \mathbb{C}$. También lo es la función $f(z) = 1/z$, con dominio $S = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Con frecuencia resulta útil estudiar $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ en términos de las funciones reales de variable compleja $\Re f$ e $\Im f$, definidas punto a punto: $(\Re f)(z) = \Re[f(z)]$, $(\Im f)(z) = \Im[f(z)]$ $(z \in S)$. También podemos pensar en $\Re f$ e $\Im f$ como funciones reales de dos variables reales: si $f(z) = u(z) + iv(z)$ y $z = x + iy$, entonces $(\Re f)(z) = u(x, y)$ e $(\Im f)(z) = v(x, y)$ $\big(z = (x, y) \in S \subset \mathbb{R}^2\big)$.

**Ejemplo 2.4.** *Sea* $f(z) = z^2$ $(z \in \mathbb{C})$, *con* $z = x + iy$. *Se tiene:* $(\Re f)(z) = u(x,y) = x^2 - y^2$, $(\Im f)(z) = v(x,y) = 2xy$ $\big(z = (x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$.

## 2.2 Las funciones como transformaciones

Una función compleja de variable compleja es, en esencia, una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, así que no es posible trazar su gráfica de la manera habitual (¡necesitaríamos cuatro dimensiones!). Lo que haremos será considerar $w = f(z)$ como una transformación de algún dominio $S$ del $z$-plano complejo en otro $f(S)$ del $w$-plano complejo, y representar de forma independiente los conjuntos $S$ y $f(S)$. Nos planteamos el problema de ver en qué se transforman en el $w$-plano los objetos geométricos del $z$-plano, tales como rectas, circunferencias, etc.

**Ejemplo 2.5.** *Sea* $f(z) = az + b$, *donde* $a \neq 0$ *y* $b$ *son ambos complejos. Poniendo* $a = |a|e^{i\theta_0}$ *encontramos que* $g(z) = az = |a|e^{i\theta_0}z$ *es una rotación centrada en el origen de ángulo* $\theta_0$, *seguida de una homotecia de razón* $|a|$. *Por otra parte,* $h(z) = z + b$ *es una traslación. Por tanto,* $f = h \circ g$ *se compone de una rotación, una homotecia y una traslación.*

**Ejemplo 2.6.** *Sea* $n \in \mathbb{N}$. *Queremos estudiar el comportamiento de* $w = z^n$ *sobre circunferencias centradas en el origen y sobre los rayos que parten de él.*

*Pongamos* $z = r_0 e^{i\theta}$, $r_0 > 0$, $-\pi < \theta \leq \pi$. *Entonces* $w = z^n = r_0^n e^{in\theta}$, *así que la aplicación transforma circunferencias de centro en el origen y radio* $r_0$ *en circunferencias con el mismo centro y radio* $r_0^n$, *recorridas* $n$ *veces.*

*Por otra parte, si* $z = re^{i\theta_0}$, $0 < r < \infty$, *entonces* $w = z^n = r^n e^{in\theta_0}$. *La aplicación transforma un rayo saliente del origen que forma un ángulo* $\theta_0$ *con el semieje OX positivo, en otro rayo que sale del origen y forma con dicho semieje un ángulo* $n\theta_0$.

**Ejemplo 2.7.** *Demostrar que*

$$f(z) = \frac{1-z}{1+z}$$

*transforma el disco unidad* $\mathbb{D}$ *en el semiplano derecho* $\mathbb{H} = \{w \in \mathbb{C} : \Re w > 0\}$.

*Resolución.* Sea $|z| < 1$. Haciendo

$$w = \frac{1-z}{1+z} = \frac{(1-z)(1+\bar{z})}{|1+z|^2} = \frac{1-|z|^2}{|1+z|^2} - 2i\frac{\Im z}{|1+z|^2}$$

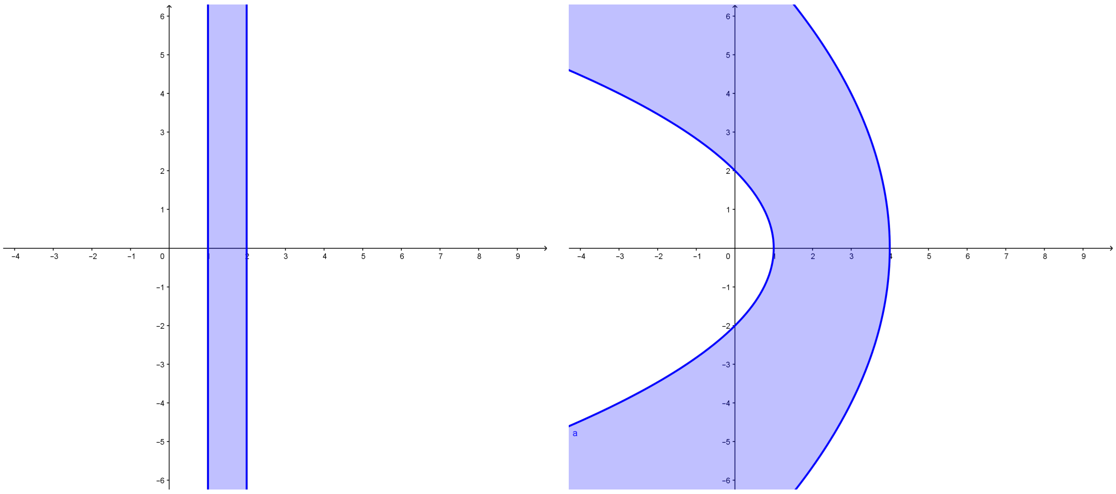
encontramos que $\Re w = (1-|z|^2)/|1+z|^2 > 0$, de donde $w \in \mathbb{H}$.

Recíprocamente, sea $w \in \mathbb{H}$. El complejo $z = (1-w)/(1+w)$ verifica que $w = (1-z)/(1+z)$. Afirmamos que $z \in \mathbb{D}$. De lo contrario, $|1-w| \geq |1+w|$, o, elevando al cuadrado,

$$1 - 2\Re w + |w|^2 \geq 1 + 2\Re w + |w|^2.$$

De aquí se deduce que $\Re w \leq 0$, así que $w \notin \mathbb{H}$. □

**Ejemplo 2.8.** *Determinar la imagen de* $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \Re z \leq 2\}$ *por la función* $f(z) = z^2$.



(a) $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \Re z \leq 2\}$. (b) Imagen de $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \Re z \leq 2\}$ por $f(z) = z^2$.

**Figura 1.** La función compleja $f(z) = z^2$ como transformación.

*Resolución.* Pongamos $z = x + iy$. Entonces $f(z) = w = u + iv$, donde $u = u(x,y) = x^2 - y^2$ y $v = v(x,y) = 2xy$. Particularizando $\Re z = x_0$, $1 \leq x_0 \leq 2$, se tendrá $y = v/2x_0$ y

$$u = x_0^2 - \frac{v^2}{4x_0^2},$$

que es una parábola en el $w$-plano $OUV$. Por ejemplo, la recta $x_0 = 1$ pasa a ser $u = 1 - v^2/4$, y la recta $x_0 = 2$ se convierte en $u = 4 - v^2/16$. Véase la fig. 1. □

# 3 Límites y continuidad

Recordemos que, dado $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega'$ denota el conjunto de los puntos de acumulación de $\Omega$.

## 3.1 Límites

**Definición 3.1.** *Sean $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $a \in \Omega'$. Se dice que $L \in \mathbb{C}$ es el* límite *de $f(z)$ cuando $z$ tiende a $a$, y se escribe $\lim_{z\to a} f(z) = L$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $z \in \Omega$ y $0 < |z - a| < \delta$ implican $|f(z) - L| < \varepsilon$.*

Nótese que si existe el límite de una función compleja en un punto, entonces es único. En efecto, supongamos que $\lim_{z\to a} f(z) = L_1$ y $\lim_{z\to a} f(z) = L_2$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño como para que $z \in \Omega$ y $0 < |z - a| < \delta$ impliquen $|f(z) - L_1| < \varepsilon/2$ y $|f(z) - L_2| < \varepsilon/2$. Fijado $z_0 \in \Omega$ con $0 < |z_0 - a| < \delta$, podemos escribir

$$|L_1 - L_2| \leq |L_1 - f(z_0)| + |f(z_0) - L_2| < \varepsilon,$$

y basta hacer $\varepsilon \to 0$ para concluir que $L_1 = L_2$.

Por otra parte, para que exista $\lim_{z\to a} f(z) = L$, se requiere que $f(z)$ se aproxime al mismo número complejo $L$ con independencia de la forma en que $z$ se aproxime a $a$. Dicho de otra manera: si $f$ se aproxima a dos números complejos $L_1 \neq L_2$ cuando $z$ tiende a $a$ siguiendo dos caminos diferentes, entonces $\lim_{z\to a} f(z)$ no existe.

**Ejemplo 3.2.** *Probar, usando la definición, que* $\lim_{z\to 1+i}(2+i)z = 1+3i$.

*Resolución.* Debe ocurrir que para todo $\varepsilon > 0$, exista $\delta > 0$ tal que $|(2+i)z-(1+3i)| < \varepsilon$ si $0 < |z-(1+i)| < \delta$. En efecto:

$$\begin{aligned}
|(2+i)z+(1+3i)| &= |2+i|\left|z-\frac{1+3i}{2+i}\right| = \sqrt{5}\left|z-\frac{(1+3i)(2-i)}{5}\right| \\
&= \sqrt{5}\left|z-\frac{(2+3)+i(-1+6)}{5}\right| = \sqrt{5}|z-(1+i)| \\
&< \delta\sqrt{5} < \varepsilon
\end{aligned}$$

siempre que $\delta < \varepsilon/\sqrt{5}$. □

**Ejemplo 3.3.** *Mostrar que no existe* $\lim_{z\to 0} z/\overline{z}$.

*Resolución.* Encontraremos dos formas de hacer tender $z$ a cero que proporcionan valores distintos para el límite.

Si nos acercamos a cero a través del eje real, es decir, tomando puntos de la forma $z = x+0i$, con $x\to 0$:

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\overline{z}} = \lim_{x\to 0}\frac{x+0i}{x-0i} = \lim_{z\to 0}\frac{x}{x} = 1.$$

Si nos acercamos a cero a través del eje imaginario, es decir, tomando puntos de la forma $z = 0+iy$, con $y\to 0$:

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\overline{z}} = \lim_{y\to 0}\frac{0+iy}{0-iy} = \lim_{y\to 0}\frac{iy}{-iy} = -1.$$

□

Cuando $\infty$ es un punto de acumulación de $\Omega$, tiene sentido hablar de $\lim_{z\to\infty} f(z)$.

**Definición 3.4.** $(i)$ *Se dirá que* $\lim_{z\to\infty} f(z) = L \in \mathbb{C}$ *si para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $R > 0$ *tal que* $z\in\Omega$ *y* $|z| > R$ *implican* $|f(z)-L| < \varepsilon$.

$(ii)$ *Se dirá que* $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ *si para todo* $M > 0$*, existe* $R > 0$ *tal que* $z\in\Omega$ *y* $|z| > R$ *implican* $|f(z)| > M$.

**Proposición 3.5.** *Sean* $f:\Omega\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$*,* $a\in\Omega'$*,* $L\in\mathbb{C}$*. Se tiene que* $\lim_{z\to a} f(z) = L$ *si, y sólo si,* $\lim_{z\to a}(\Re f)(z) = \Re L$ *y* $\lim_{z\to a}(\Im f)(z) = \Im L$.

*Demostración.* La conclusión deseada sigue inmediatamente de las estimaciones

$$\begin{aligned}
|(\Re f)(z)-\Re L| \le |f(z)-L| \le |(\Re f)(z)-\Re L| + |(\Im f)(z)-\Im L| \\
|(\Im f)(z)-\Im L| \le |f(z)-L| \le |(\Re f)(z)-\Re L| + |(\Im f)(z)-\Im L|,
\end{aligned}$$

válidas para $z\in\Omega$. □

**Ejemplo 3.6.** *Hallar*

$$\lim_{z\to 1+i}(z^2+i).$$

*Resolución.* Pongamos $z = z + iy$, de modo que $f(z) = z^2 + i = x^2 - y^2 + i(2xy + 1)$. Si $z \to 1 + i$, entonces $x \to 1$ e $y \to 1$; por tanto, $(\Re f)(z) = x^2 - y^2 \to 0$ e $(\Im f)(z) = 2xy + 1 \to 3$. Se concluye que $\lim_{z\to 1+i}(z^2 + i) = 3i$. $\square$

**Ejemplo 3.7.** *Sean $a \in \mathbb{C}$, $f(z) = c$, $g(z) = z$ y $h(z) = \bar{z}$, siendo $c$ una constante compleja. Entonces* $\lim_{z\to a} f(z) = c$, $\lim_{z\to a} g(z) = a$, *y* $\lim_{z\to a} h(z) = \bar{a}$.

*Resolución.* Es consecuencia inmediata de la Definición 3.1, o de la Proposición 3.5. $\square$

Como la definición de límite en el caso complejo es formalmente análoga a la correspondiente definición en el caso real, no sorprende que el álgebra de límites sea similar en ambos casos.

**Proposición 3.8** (Álgebra de límites)**.** *Sean $f, g$ funciones complejas definidas sobre $\Omega \subset \mathbb{C}$, sea $a \in \Omega'$, y sean $L, M \in \mathbb{C}$ tales que* $\lim_{z\to a} f(z) = L$ *y* $\lim_{z\to a} g(z) = M$. *Entonces:*

$(i)$ $\lim_{z\to a}(cf)(z) = cL$ $(c \in \mathbb{C})$;

$(ii)$ $\lim_{z\to a}(f \pm g)(z) = L \pm M$;

$(iii)$ $\lim_{z\to a}(fg)(z) = LM$;

$(iv)$ *si* $M \neq 0$, $\lim_{z\to a}(f/g)(z) = L/M$.

*Demostración.* Probaremos (i), dejando el resto de propiedades como ejercicio.

Supongamos que $z = x + iy$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $a = \alpha + i\beta$, $L = r + is$ y $c = p + iq$. Si $\lim_{z\to a} f(z) = L$, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} u(x,y) = r \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} v(x,y) = s.$$

Además, $\Re(cf)(z) = pu(x,y) - qv(x,y)$ e $\Im(cf)(z) = pv(x,y) + qu(x,y)$. Sigue que

$$\lim_{z\to a}(cf)(z) = \lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)}[pu(x,y) - qv(x,y)] + i \lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)}[pv(x,y) + qu(x,y)] = (pr - qs) + i(ps + qr) = cL.$$

$\square$

**Observación 3.9.** *El Ejemplo 3.7 junto con la Proposición 3.8 permiten calcular el límite de un polinomio en cualquier punto, o de una función racional en un punto donde ésta esté definida, simplemente evaluando el polinomio o la función racional en el punto dado.*

**Ejemplo 3.10.** *Hallar*

$$\lim_{z\to 1+i}(z^2 + i).$$

*Resolución.* Se tiene:

$$\lim_{z\to 1+i}(z^2 + i) = \left(\lim_{z\to 1+i} z\right)^2 + \lim_{z\to 1+i} i = (1 + i)^2 + i = (1 + 2i - 1) + i = 3i.$$

Compárese con el Ejemplo 3.6. $\square$

Recordemos que, por ser $\mathbb{C}$ un espacio métrico, para $\Omega \subset \mathbb{C}$ se verifica que $a \in \Omega'$ si, y sólo si, existe una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega \setminus \{a\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = a$. El siguiente resultado reviste cierto interés práctico.

**Proposición 3.11.** *Sean $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $a \in \Omega'$, $L \in \mathbb{C}$. Se tiene que $\lim_{z\to a} f(z) = L$ si, y sólo si, $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = L$ para toda sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega \setminus \{a\}$ que converja a $a$.*

*Demostración.* Supongamos que $\lim_{z\to a} f(z) = L$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $z \in \Omega$, $0 < |z-a| < \delta$ implican $|f(z) - L| < \varepsilon$. Si $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega \setminus \{a\}$ con $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ entonces, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, será $0 < |z_n - a| < \delta$, obligando a que $|f(z_n) - L| < \varepsilon$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = L$.

Probaremos ahora la implicación recíproca o, equivalentemente, la contrarrecíproca. Supongamos falso que $\lim_{z\to a} f(z) = L$: algún $\varepsilon > 0$ es tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in \Omega$ con $0 < |z_n - a| < 1/n$ y $|f(z_n) - L| \geq \varepsilon$. Entonces $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega \setminus \{a\}$ y $\lim_{n\to\infty} z_n = a$, pero $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a $L$. □

## 3.2 Continuidad

**Definición 3.12.** *Se dice que una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es* continua en el punto $a \in \Omega$ *si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $z \in \Omega$ y $|z-a| < \delta$ implican $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$. En caso contrario, se dice que $f$ es* discontinua *en $a$.*

Dada una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y un punto $a \in \Omega$, se pueden presentar dos casos:

$(i)$ Si $a \in \Omega \setminus \Omega'$, entonces $f$ es continua en el punto $a$.

$(ii)$ Si $a \in \Omega \cap \Omega'$, entonces $f$ es continua en $a$ si, y sólo si, $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$.

Nótese que la definición de continuidad de una función $f$ en un punto $a$ lleva implícita la condición de que

$(i)$ existe $f(a)$.

Además, si $a \in \Omega \cap \Omega'$ también deben darse las dos siguientes:

$(ii)$ existe $\lim_{z\to a} f(z)$;

$(iii)$ $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$.

Por tanto, basta con que se incumpla alguna de las tres para que $f$ sea discontinua en $a$.

**Ejemplo 3.13.** *Decidir si la función $f(z) = z^2 - iz + 2$ es continua en $a = 1 - i$.*

*Resolución.* Se cumple que $f$ está definida en $a$, con

$$f(a) = (1-i)^2 - i(1-i) + 2 = 1 - 2i - 1 - i - 1 + 2 = 1 - 3i.$$

Además, obviamente, existe $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$ (Observación 3.9). Por tanto, $f$ es continua en $a$. □

**Ejemplo 3.14.** *La función*

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

*es discontinua en $z = \pm i$, ya que no está definida en esos puntos.*

**Ejemplo 3.15.** *Probar que la función $F(z) = z^{1/2}$ (raíz cuadrada principal de $z$) es discontinua en $a = -1$.*

*Resolución.* Veremos que no existe $\lim_{z\to -1} z^{1/2}$. A tal fin, mostraremos dos formas de aproximarnos a $-1$ que proporcionan dos valores diferentes del límite. La raíz cuadrada principal de $z$ es

$$z^{1/2} = |z|^{1/2} e^{i \operatorname{Arg} z/2}.$$

Si nos aproximamos a $-1$ a través de valores $z = e^{i\theta}$ con $\pi/2 < \theta < \pi$, entonces

$$\lim_{z\to -1} z^{1/2} = \lim_{\theta\to\pi} e^{i\theta/2} = e^{i\pi/2} = i;$$

sin embargo, si nos aproximamos a $-1$ a través de valores $z = e^{i\theta}$ con $-\pi < \theta < -\pi/2$, entonces

$$\lim_{z\to -1} z^{1/2} = \lim_{\theta\to -\pi} e^{i\theta/2} = e^{-i\pi/2} = -i.$$

□

**Proposición 3.16.** *Sean $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $a \in \Omega$, y pongamos $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $(z = x+iy \in \Omega)$, $a = \alpha + i\beta$. Entonces $f$ es continua en $a$ si, y sólo si, $u, v$ son continuas en $(\alpha,\beta)$.*

*Demostración.* Basta considerar el caso en que $a \in \Omega \cap \Omega'$. Asumamos que $f$ es continua en $a$, de modo que

$$\lim_{z\to a} f(z) = f(a) = u(\alpha,\beta) + iv(\alpha,\beta).$$

Por la Proposición 3.5:

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} u(x,y) = u(\alpha,\beta), \qquad \lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} v(x,y) = v(\alpha,\beta). \tag{1}$$

Así pues, $u, v$ son continuas en $(\alpha,\beta)$.

Recíprocamente, si ocurre (1) entonces $\lim_{z\to a} f(z) = u(\alpha,\beta) + iv(\alpha,\beta) = f(a)$, probando que $f$ es continua en $a$. □

Una función definida entre dos espacios métricos es continua en un punto si, y sólo si, es secuencialmente continua en ese punto. Ya usamos este resultado al estudiar la proyección estereográfica; por completitud, lo enunciamos ahora para funciones complejas, indicando cómo probarlo (la demostración en el caso general es completamente análoga).

**Proposición 3.17.** *Una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es continua en $a \in \Omega$ si, y sólo si, $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(a)$ para toda sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$ que converja a $a$.*

*Demostración.* Basta tener en cuenta la Definición 3.12 y razonar como en la prueba de la Proposición 3.11. □

**Definición 3.18.** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Se dice que $f$ es* continua en el conjunto $\Omega$ *si $f$ es continua en $a$, para todo $a \in \Omega$.*

**Ejemplo 3.19.** *La función $f(z) = \bar{z}$ es continua en $\mathbb{C}$.*

*Resolución.* Se desprende del Ejemplo 3.7 que $f$ es continua en cualquier $a \in \mathbb{C}$.

Alternativamente, podemos argumentar como sigue. Sea $a = \alpha + i\beta$ un punto arbitrario de $\mathbb{C}$, y pongamos $z = x + iy$. Por la Proposición 3.16, $f(x+iy) = f(z) = \bar{z} = x - iy$ es continua en $(\alpha, \beta)$ si, y sólo si, $(\Re f)(x,y) = x$ e $(\Im f)(x,y) = -y$ son continuas en $(\alpha, \beta)$. Como $u, v$ son polinomios de dos variables, son continuos, así que $f$ también lo es. La arbitrariedad de $a \in \mathbb{C}$ completa la demostración.

Usando la caracterización secuencial de la continuidad (Proposición 3.17), el razonamiento sería el siguiente. Fijemos un punto arbitrario $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, y sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$ tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = a$. Si $z_n = x_n + iy_n$ $(n \in \mathbb{N})$, se sigue que $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = \beta$. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} \bar{z}_n = \lim_{n\to\infty} (x_n - iy_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) - i\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) = \alpha - i\beta = \bar{a} = f(a),$$

como necesitábamos probar. □

**Proposición 3.20** (Álgebra de funciones complejas continuas)**.** *Sean $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funciones continuas en $a \in \Omega$. Se cumple:*

$(i)$ *$cf$ es continua en $a$ $(c \in \mathbb{C})$;*

$(ii)$ *$f \pm g$ es continua en $a$;*

$(iii)$ *$fg$ es continua en $a$;*

$(iv)$ *si $g(a) \neq 0$, entonces $f/g$ es continua en $a$.*

*Demostración.* Es análoga a la del caso real, conocido de cursos anteriores. A modo de ejemplo probaremos el apartado (iii), dejando los restantes como ejercicio.

Sea $a \in \Omega$, y sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$ tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = a$. Ya que $f$ y $g$ son continuas en $a$, la Proposición 3.17 garantiza que $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(a)$ y $\lim_{n\to\infty} g(z_n) = g(a)$. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} (fg)(z_n) = \lim_{n\to\infty} f(z_n)g(z_n) = f(a)g(a) = (fg)(a).$$

De nuevo por la Proposición 3.17, $fg$ es continua en $a$. □

**Corolario 3.21.** *Los polinomios son continuos en $\mathbb{C}$. Las funciones racionales son continuas en su dominio de definición.*

*Demostración.* Sea $p(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0$ $(z \in \mathbb{C})$ un polinomio de coeficientes complejos, y sea $a$ un punto arbitrario de $\mathbb{C}$; queremos probar que $p$ es continua en $a$. A tal fin, basta advertir que, por el Ejemplo 3.7, $p$ se compone de productos y sumas de funciones continuas en $a$, y aplicar la Proposición 3.20.

Por otro lado, una función racional $f(z) = p(z)/q(z)$ es cociente de dos polinomios, los cuales, como acabamos de ver, son funciones continuas en todo el plano. En virtud de la Proposición 3.20, $f$ será continua en todo punto $a$ tal que $q(a) \neq 0$, es decir, donde $f$ esté definida. □

**Ejemplo 3.22.** *La función $f(z) = z^2 - iz + 2$ es continua en $\mathbb{C}$. La función $f(z) = (1+z^2)^{-1}$ es continua en $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$.*

**Proposición 3.23** (Composición de funciones continuas)**.** *Sean $A, B$ subconjuntos de $\mathbb{C}$, $f$ continua en $A$ tal que $f(A) \subset B$, y $g$ continua en $B$. Entonces $g \circ f$ es continua en $A$.*

*Demostración.* Aplicamos la Proposición 3.17. Fijado $a \in A$, sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = a$. Como $f$ es continua en $a$, necesariamente $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(a)$; y como $g$ es continua en $f(a) \in B$, también se tiene

$$\lim_{n\to\infty}(g \circ f)(z_n) = \lim_{n\to\infty} g[f(z_n)] = g[f(a)] = (g \circ f)(a).$$

Puesto que $a \in A$ es arbitrario, se concluye que $g \circ f$ es continua en $A$. □

**Definición 3.24.** *Una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ está* acotada *si existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ $(z \in \Omega)$.*

Por reducción a la correspondiente propiedad en el caso real, se establece la siguiente:

**Proposición 3.25.** *Si una función compleja $f$ es continua en un compacto $S \subset \mathbb{C}$, entonces está acotada en $S$.*

## 3.3 Continuidad uniforme

**Definición 3.26.** *Una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es* uniformemente continua en $\Omega$ *si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $z, w \in \Omega$ y $|z - w| < \delta$ implican $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$.*

**Teorema 3.27** (Heine)**.** *Toda función continua en un compacto es uniformemente continua.*

**Proposición 3.28.** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Son equivalentes:*

*(i)* *$f$ es uniformemente continua en $\Omega$;*

*(ii)* *$\Re f$, $\Im f$ son uniformemente continuas en $\Omega$;*

*(iii)* *para cualesquiera sucesiones $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\Omega$ tales que $\lim_{n\to\infty}|z_n - w_n| = 0$, se tiene que $\lim_{n\to\infty}|f(z_n) - f(w_n)| = 0$.*

*Demostración.* Que (i) y (ii) son equivalentes se prueba utilizando las estimaciones ya conocidas entre $\Re f$, $\Im f$ y $|f|$.

Para probar que (i) implica (iii), sean $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en $\Omega$ tales que $\lim_{n\to\infty}|z_n - w_n| = 0$. Si $f$ es uniformemente continua en $\Omega$ entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $z, w \in \Omega$ y $|z - w| < \delta$ implican $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$. Para este $\delta$, existirá $N \in \mathbb{N}$ de modo que $|z_n - w_n| < \delta$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq N)$, así que $|f(z_n) - f(w_n)| < \varepsilon$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq N)$, como se requería.

Completaremos la demostración estableciendo la implicación contrarrecíproca. Si no se verifica (i) entonces existe $\varepsilon > 0$ y, para todo $n \in \mathbb{N}$, puntos $z_n, w_n \in \Omega$ tales que $|z_n - w_n| < 1/n$, pero $|f(z_n) - f(w_n)| \geq \varepsilon$. Así, hemos encontrado sucesiones $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\Omega$ para las que $\lim_{n\to\infty}|z_n - w_n| = 0$ pero no se cumple que $\lim_{n\to\infty}|f(z_n) - f(w_n)| = 0$, de manera que no se verifica (iii). □

## 3.4 Funciones multivaluadas

Vimos en el Tema 1 que un complejo $z \neq 0$ tiene $n$-raíces $n$-ésimas complejas distintas. Esto significa que el proceso de tomar la raíz $n$-ésima de un número complejo no define una función compleja, porque asigna a un mismo número complejo $z$ un conjunto de $n$ números. Similarmente ocurre con el proceso de encontrar el argumento de un complejo $z$: como el símbolo $\arg z$ representa un conjunto infinito de valores, tampoco define una función compleja. Este tipo de operaciones sobre $\mathbb{C}$ son ejemplos de *funciones multivaluadas*. La terminología es poco afortunada, porque una «función multivaluada» no es realmente una función: recordemos que ésta se define como una regla que a cada elemento de un conjunto le asigna una única imagen de otro conjunto. No obstante, se trata de una terminología estándar en análisis complejo, y por ello la adoptaremos en lo que sigue.

### 3.4.1 Ramas, saltos de rama, puntos de ramificación

En la práctica, a menudo, necesitamos una forma consistente de elegir una única raíz de un número complejo, o uno solo de sus argumentos. Es decir, estamos interesados en calcular sólo un valor de una función multivaluada. Si se hace esta elección teniendo presente el concepto de continuidad, obtenemos una función denominada *rama* de la función multivaluada en cuestión.

**Definición 3.29.** *Una* rama *de una función multivaluada $f$ es una función $f_0$ que es continua en algún dominio y que asigna exactamente uno de los múltiples valores de $f$ a cada punto de ese dominio.*

El requisito de que una rama sea continua implica que su dominio es diferente del dominio de la función multivaluada. Por ejemplo, la función multivaluada $f(z) = z^{1/2}$ que a cada $z$ le asigna el conjunto de las dos raíces cuadradas de $z$ está definida para cada $z \neq 0$. Aunque la función raíz cuadrada principal $F(z) = z^{1/2}$ asigna exactamente un valor de $f$ a cada $z$, no es una rama de $f$. La razón es que la raíz cuadrada principal no es continua en su dominio; en particular, el Ejemplo 3.15 muestra que no es continua en $a = -1$ con un razonamiento que puede ser fácilmente modificado para probar que $F$ es discontinua en cada punto del semieje real negativo. Por consiguiente, para obtener una rama de $f(z) = z^{1/2}$ que coincida con la función raíz cuadrada principal debemos restringir su dominio, excluyendo también todos los puntos del semieje real negativo:

$$f_0(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}, \quad -\pi < \theta < \pi. \tag{2}$$

La función $f_0$ así definida se denomina *rama principal* de la función multivaluada $f(z) = z^{1/2}$, porque el valor de $\theta$ representa el argumento principal de $z$ para cada $z$ en el dominio de $f_0$. A continuación mostramos que $f_0$ es, en efecto, una rama de $f$.

**Ejemplo 3.30.** *Probar que la función $f_0$ definida por (2) es una rama de la función multivaluada $f(z) = z^{1/2}$.*

*Resolución.* El dominio de $f_0$ es el conjunto de los $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z| > 0$ y $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$. Sobre este conjunto, la función $f_0$ coincide con la función raíz cuadrada principal $F$, así que $f_0$ asigna a cada $z$ exactamente uno de los valores de $f(z) = z^{1/2}$. Resta demostrar que $f_0$ es continua en su dominio.

Para comprobarlo, tomemos un punto $z$ tal que $|z| > 0$ y $-\pi < \operatorname{Arg}(z) < \pi$. Si $z = x + iy$ y $x > 0$ entonces $z = re^{i\theta}$, donde $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y $\theta = \operatorname{arctg}(y/x)$, con $-\pi/2 < \operatorname{arctg}(y/x) < \pi/2$. Por tanto, se cumple que $-\pi < \theta < \pi$, y sustituyendo las expresiones de $r$ y $\theta$ en (2) obtenemos:

$$f_0(z) = \sqrt[4]{x^2+y^2}e^{i\operatorname{arctg}(y/x)/2} = \sqrt[4]{x^2+y^2}\cos\frac{\operatorname{arctg}(y/x)}{2} + i\sqrt[4]{x^2+y^2}\operatorname{sen}\frac{\operatorname{arctg}(y/x)}{2}.$$

Como las partes real e imaginaria de $f_0$ son funciones reales continuas para $x > 0$, inferimos de la Proposición 3.16 que $f_0$ es continua para $x > 0$. Un razonamiento similar vale en los puntos $z = x + iy$ con $y > 0$ usando $\theta = \operatorname{arcctg}(x/y)$, y en los puntos $z = x + iy$ con $y < 0$ usando $\theta = -\operatorname{arcctg}(x/y)$. En cada caso, la Proposición 3.16 permite inferir que $f_0$ es continua. Se concluye que la función $f_0$ definida en (2) es una rama de la función multivaluada $f(z) = z^{1/2}$. $\square$

Aunque $f(z) = z^{1/2}$ está definida para todo complejo $z \neq 0$, la rama principal $f_0$ está definida solamente en el dominio $|z| > 0$, $-\pi < \operatorname{Arg}(z) < \pi$. En general, un *salto de rama* para una rama $h$ de una función multivaluada $g$ es un arco de curva que queda excluido del dominio de $g$ de tal manera que $h$ es continua en los puntos restantes. Luego, el semieje real negativo junto con el cero es un salto de rama para la rama principal $f_0$, dada por (2), de la función multivaluada $f(z) = z^{1/2}$.

Otra rama diferente de $f$ con el mismo salto de rama es $f_1(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$, $\pi < \theta < 3\pi$. Estas ramas son distintas porque, por ejemplo, para $z = i$ tenemos $f_0(i) = (1+i)/\sqrt{2}$, pero $f_1(i) = -(1+i)/\sqrt{2}$. Nótese que poniendo $\phi = \theta - 2\pi$, la rama $f_1$ puede ser expresada en la forma

$$f_1(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} = \sqrt{r}e^{i(\phi+2\pi)/2} = \sqrt{r}e^{i\phi/2}e^{i\pi}, \quad -\pi < \phi < \pi.$$

Ya que $e^{i\pi} = -1$, esta expresión se reduce a $f_1(z) = -\sqrt{r}e^{i\phi/2}$, $-\pi < \phi < \pi$. Hemos probado así que $f_1 = -f_0$. Podemos pensar en estas dos ramas de $f(z) = z^{1/2}$ como las análogas de las raíces cuadradas positiva y negativa de un número real positivo.

Es posible definir otras ramas de $f(z) = z^{1/2}$ de manera similar a (2) usando como salto de rama cualquier rayo que parta del origen. Por ejemplo, $f_2(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$, $-3\pi/4 < \theta < 5\pi/4$, define una rama de $f(z) = z^{1/2}$; el salto de rama para $f_2$ es el rayo $\operatorname{Arg}(z) = -3\pi/4$ junto con el punto $z = 0$.

No es casualidad que $z = 0$ esté en los saltos de rama de $f_0$, $f_1$ y $f_2$: el punto $z = 0$ debe estar en los saltos de rama de cualquier rama de la función multivaluada $f(z) = z^{1/2}$, puesto que $f$ no está definida en ese punto. En general, un punto que está en los saltos de rama de todas las ramas de una función multivaluada $f$ se denomina *punto de ramificación* o *punto de rama* de $f$. Alternativamente, un punto de ramificación de $f$ es un punto $z_0$ con la siguiente propiedad: si recorremos cualquier circunferencia centrada en $z_0$ de radio suficientemente pequeño partiendo de un punto $z_1$ y $h$ es una rama arbitraria de $f$, entonces los valores de $h$ no retornan al valor que $h$ tomaba en $z_1$. Por ejemplo, consideremos cualquier rama de la función multivaluada $g(z) = \arg z$, y sea $\varepsilon > 0$, pequeño. Si tomamos $z_0 = 1$ y recorremos la circunferencia $|z - 1| = \varepsilon$ en dirección antihoraria partiendo del punto $z_1 = 1 - \varepsilon i$, entonces los valores de la rama se incrementan hasta el punto $1 + \varepsilon i$, pero luego decrecen hasta regresar al valor de la rama en $z_1$. Esto significa que el punto $z_0 = 1$ no es un punto de ramificación. Sin embargo, supongamos que repetimos el proceso con el punto $z_0 = 0$. Cuando recorremos la circunferencia $|z| = \varepsilon$ en sentido antihorario partiendo de $z_1 = -\varepsilon$, los valores de la rama aumentan a lo largo de todo el trayecto, de manera que cuando regresamos al punto de partida el valor de la rama ya no es el mismo, sino que ha aumentado en $2\pi$. Por consiguiente, $z_0 = 0$ es un punto de ramificación de $g(z) = \arg z$.

A continuación formalizaremos las ideas anteriores.

### 3.4.2 Ramas del argumento

**Definición 3.31.** *Sea $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Cualquier función $\theta : S \to \mathbb{R}$ tal que $\theta(z) \in \arg f(z)$ para todo $z \in S$ se llama* un argumento de $f$ en $S$. *Cuando $f$ es la identidad se dice simplemente que $\theta$ es* un argumento en $S$.

**Proposición 3.32.** *Sea $S$ un subconjunto conexo de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, y supongamos que existe un argumento continuo, $\varphi$, en $S$. Entonces cualquier otro argumento continuo $\phi$ en $S$ es de la forma $\phi = \varphi + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.*

*Demostración.* Sea $\phi : S \to \mathbb{R}$ otro argumento continuo en $S$. La función

$$z \mapsto \frac{\phi(z) - \varphi(z)}{2\pi}$$

es continua en $S$ y toma valores enteros. Como $S$ es conexo, esta función es necesariamente constante. □

**Proposición 3.33.** *Si $S$ es cualquier subconjunto de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ que contiene una circunferencia centrada en cero, entonces en $S$ no hay ningún argumento continuo. En particular, en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ no hay argumentos continuos.*

*Demostración.* Supongamos que $\varphi$ es un argumento continuo en $S$. Sea $C(0,\rho)$ una circunferencia contenida en $S$. La restricción de $\varphi$ a $C(0,\rho) \setminus \{-\rho\}$ es un argumento continuo. Como el argumento principal también es un argumento continuo en este conjunto, que es conexo, deducimos, por la Proposición 3.32, que algún entero $k$ es tal que $\operatorname{Arg} z = \varphi(z) + 2k\pi$ $(z \in C(0,\rho) \setminus \{-\rho\})$. Ya que $\varphi$ es continua en $C(0,\rho)$, la igualdad anterior implica que existe $\lim_{\substack{z \to -\rho \\ |z| = \rho}} \operatorname{Arg}(z)$; lo cual, a su vez, implica que

$$\pi = \lim_{\substack{\theta \to \pi \\ 0<\theta<\pi}} \theta = \lim_{\substack{\theta \to \pi \\ 0<\theta<\pi}} \operatorname{Arg}\left(\rho e^{i\theta}\right) = \lim_{\substack{\theta \to -\pi \\ -\pi<\theta<0}} \operatorname{Arg}\left(\rho e^{i\theta}\right) = \lim_{\substack{\theta \to -\pi \\ -\pi<\theta<0}} \theta = -\pi,$$

una contradicción. □

# 4 Derivabilidad y holomorfía

## 4.1 Derivabilidad

**Definición 4.1.** *Sean $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $a \in \Omega \cap \Omega'$. Se dice que $f$ es* derivable en *$a$ cuando existe el límite*

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \in \mathbb{C}, \tag{3}$$

*llamado* derivada de $f$ en el punto $a$. *La expresión (3) define una función $f'$ cuyo dominio es el conjunto de todos los puntos $a \in \Omega \cap \Omega'$ donde $f$ es derivable, denominada* función derivada de $f$. *Se dirá que $f$* es derivable en un conjunto *$S \subset \Omega \cap \Omega'$ si $f$ es derivable en todo punto $a \in S$.*

**Observación 4.2.** *Para futura referencia, registramos aquí algunos comentarios sobre la Definición 4.1.*

(*i*) *En el caso particular de que $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la definición dada coincide con la ya conocida para una función real de variable real.*

(*ii*) *Para funciones complejas de una variable real se tiene el siguiente resultado. Sea* $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, *de manera que* $f(t) = u(t) + iv(t)$, *donde* $u$ *y* $v$ *son funciones reales de la variable real* $t$. *Si* $a \in \Omega \cap \Omega' \subset \mathbb{R}$ *entonces*

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \frac{u(t) - u(a)}{t - a} + i\frac{v(t) - v(a)}{t - a} \quad (t \neq a),$$

*y deducimos que* $f$ *es derivable en* $a$ *si, y sólo si,* $u$ *y* $v$ *son derivables en* $a$, *en cuyo caso*

$$f'(a) = u'(a) + iv'(a).$$

(*iii*) *Recordemos que si* $\Omega \subset \mathbb{C}$, *el interior de* $\Omega$, $\Omega^\circ$, *está formado por todos los puntos de* $\Omega$ *que son centro de algún disco enteramente contenido en* $\Omega$, *y coincide con el mayor subconjunto abierto de* $\mathbb{C}$ *contenido en* $\Omega$. *Evidentemente,* $\Omega^\circ \subset \Omega \cap \Omega'$. *Puede parecer sorprendente que hablemos de la derivabilidad en puntos de* $\Omega \cap \Omega'$ *y no sólo en puntos de* $\Omega^\circ$, *como se hace con la diferenciabilidad de funciones de dos variables reales. La razón de considerar un conjunto abierto en este último contexto es tener asegurada la unicidad de la diferencial, y así lo haremos más adelante al relacionar la derivabilidad de una función compleja con su diferenciabilidad como función de dos variables reales.*

**Ejemplo 4.3.** *Usando la definición, hallar la función derivada de* $f(z) = z^2 - 5z$.

*Resolución.* Para $z, h \in \mathbb{C}$, $h \neq 0$, se tiene

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= (z+h)^2 - 5(z+h) - (z^2 - 5z) \\ &= (z^2 + 2zh + h^2) - 5z - 5h - z^2 + 5z \\ &= (2z-5)h + h^2 \end{aligned}$$

y

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0}(2z - 5 + h) = 2z - 5.$$

□

**Proposición 4.4.** *Si* $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *es derivable en* $a \in \Omega \cap \Omega'$, *entonces* $f$ *es continua en* $a$.

*Demostración.* Existen los límites

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a), \qquad \lim_{z\to a}(z - a) = 0.$$

Por la Proposición 3.8(iii):

$$\lim_{z\to a}[f(z) - f(a)] = \lim_{z\to a}\left[\frac{f(z) - f(a)}{z - a}(z - a)\right] = \lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \lim_{z\to a}(z - a) = f'(a) \cdot 0 = 0,$$

probando que $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$. □

El recíproco de la Proposición 4.4 es falso:

**Ejemplo 4.5.** *Probar que la función $f(z) = x + i4y$ $(z = x + iy \in \mathbb{C})$ es continua, pero no es derivable en ningún punto.*

*Resolución.* Las partes real e imaginaria de $f$ son polinomios en las variables $(x, y)$; luego, son continuas. Por la Proposición 3.16, $f$ es continua.

Pongamos $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \neq 0$. Entonces

$$f(z+\Delta z) - f(z) = (x+\Delta x) + i4(y+\Delta y) - x - i4y = \Delta x + i4\Delta y,$$

así que

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta x + i4\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Si hacemos $\Delta z \to 0$ a lo largo del eje $OX$ $(\Delta y = 0)$:

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta x}{\Delta x} \to 1.$$

Si hacemos $\Delta z \to 0$ a lo largo del eje $OY$ $(\Delta x = 0)$:

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{i4\Delta y}{i\Delta y} \to 4.$$

Consecuentemente, el límite

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

no existe. □

**Proposición 4.6** (Reglas de derivación)**.** *Sean $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, y sea $a \in \Omega \cap \Omega'$. Supongamos que $f$ y $g$ son derivables en $a$. Se verifica:*

(*i*) *$f \pm g$ es derivable en $a$, y $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$;*

(*ii*) *si $c \in \mathbb{C}$ entonces $cf$ es derivable en $a$, y $(cf)'(a) = cf'(a)$;*

(*iii*) *$fg$ es derivable en $a$, y $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;*

(*iv*) *si $g(a) \neq 0$ entonces $f/g$ es derivable en $a$, y*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

*Demostración.* Es similar a la de las reglas correspondientes para funciones reales de variable real. Probaremos (iv), dejando las restantes demostraciones como ejercicio.

Como $g$ es derivable en $a$, es continua en este punto (Proposición 4.4). Y como $g(a) \neq 0$, por continuidad existe $r > 0$ tal que $g$ no se anula en $D(a, r)$. Luego, para $z \in D^*(a, r)$ podemos escribir:

$$\frac{(f/g)(z) - (f/g)(a)}{z - a} = \frac{1}{g(z)g(a)} \frac{[f(z)g(a) - f(a)g(a)] + [f(a)g(a) - f(a)g(z)]}{z - a}$$

$$= \frac{1}{g(z)g(a)} \left[ \frac{f(z)-f(a)}{z-a} g(a) - \frac{g(z)-g(a)}{z-a} f(a) \right].$$

Ahora basta tomar límites cuando $z \to a$ y tener en cuenta, de nuevo, que $g$ es continua en $a$. □

**Proposición 4.7** (Regla de la cadena)**.** *Sean $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $g : B \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que $f(A) \subset B$. Supongamos que $f$ es derivable en $a \in A \cap A'$ y $g$ es derivable en $f(a) \in B \cap B'$, y consideremos la función compuesta $h = g \circ f : A \to \mathbb{C}$. Entonces $h$ es derivable en $a$ y*

$$h'(a) = g'[f(a)]f'(a).$$

*Demostración.* Antes de proceder con la prueba, conviene advertir que la hipótesis $f(a) \in B'$ no se impone, sino que es consecuencia de la caracterización secuencial de los puntos de acumulación (véase el recordatorio previo a la Proposición 3.11) y de la continuidad secuencial de $f$ (Proposiciones 4.4 y 3.17).

Pongamos $b = f(a)$ y consideremos la aplicación $\varphi : B \to \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi(w) = \begin{cases} \dfrac{g(w)-g(b)}{w-b}, & w \in B \setminus \{b\} \\ g'(b), & w = b. \end{cases}$$

Claramente, $g(w) - g(b) = \varphi(w)(w-b)$ $(w \in B)$. Haciendo $w = f(z)$ para todo $z \in A \setminus \{a\}$ encontramos que

$$\frac{h(z)-h(a)}{z-a} = \frac{g[f(z)] - g[f(a)]}{z-a} = \varphi[f(z)] \frac{f(z)-f(a)}{z-a}.$$

Puesto que $f$ es continua en $a$ (Proposición 4.4) y $\varphi$ es continua en $b = f(a)$ (porque $g$ es derivable en ese punto), se tiene que $\varphi \circ f$ es continua en $a$ (Proposición 3.23), y se concluye que

$$h'(a) = \lim_{z \to a} \frac{h(z)-h(a)}{z-a} = \lim_{z \to a} \varphi[f(z)] \lim_{z \to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \varphi[f(a)]f'(a) = g'[f(a)]f'(a),$$

como se requería. □

**Ejemplo 4.8.** *Derivar las siguientes funciones:*

$(i)$ $f(z) = 1$;

$(ii)$ $f_n(z) = z^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

*Resolución.* Las derivadas van a existir en todo $z \in \mathbb{C}$.

$(i)$ Se tiene:

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{h} = 0.$$

$(ii)$ Afirmamos que $(z^n)' = nz^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Lo probaremos por inducción sobre $n$, apoyándonos en la regla de derivación de un producto.

Si $n = 1$, entonces

$$(z)' = \lim_{h \to 0} \frac{(z+h)-z}{h} = 1.$$

Si $n = 2$, entonces

$$(z^2)' = (z \cdot z)' = (z)' \cdot z + z \cdot (z)' = 1 \cdot z + z \cdot 1 = 2z.$$

Supongamos la propiedad cierta para $n$: $(z^n)' = nz^{n-1}$. Y probémosla para $n+1$:

$$(z^{n+1})' = (z^n \cdot z)' = (z^n)' \cdot z + z^n \cdot (z)' = nz^{n-1} \cdot z + z^n \cdot 1 = nz^n + z^n = (n+1)z^n.$$

Para una resolución alternativa, véase el Ejercicio 6.

□

**Ejemplo 4.9.** *Derivar las siguientes funciones:*

$(i)$ $f(z) = 3z^4 - 5z^3 + 2z$;

$(ii)$ $f(z) = \dfrac{z^2}{4z+1}$ $(z \neq -1/4)$;

$(iii)$ $f(z) = (iz^2 + 3z)^5$.

*Resolución.* Nos apoyaremos en el Ejemplo 4.8 y en las reglas de derivación (Proposición 4.6).

$(i)$ Para todo $z \in \mathbb{C}$: $f'(z) = 3 \cdot 4z^3 - 5 \cdot 3z^2 + 2 = 12z^3 - 15z^2 + 2$.

$(ii)$ Para todo $z \neq -1/4$: $f'(z) = \dfrac{2z(4z+1) - 4z^2}{(4z+1)^2} = \dfrac{4z^2 + 2z}{(4z+1)^2}$.

$(iii)$ Usando, además, la regla de la cadena, para todo $z \in \mathbb{C}$: $f'(z) = 5(iz^2 + 3z)^4(2iz + 3)$.

□

**Proposición 4.10** (Regla de L'Hôpital)**.** *Si $f, g$ son derivables en $a$, y $f(a) = g(a) = 0$ pero $g'(a) \neq 0$, entonces*

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

*Más en general, si $g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(n-1)}(a) = 0$ y $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$, pero $g^{(n)}(a) \neq 0$, entonces*

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

*Demostración.* Usando que $f(a) = g(a) = 0$, dividiendo numerador y denominador por $z - a$, y teniendo en cuenta que las funciones $f$ y $g$ son derivables en $a$, obtenemos:

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{g(z) - g(a)} = \lim_{z \to a} \frac{\dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}}{\dfrac{g(z) - g(a)}{z - a}} = \frac{\lim_{z \to a} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}}{\lim_{z \to a} \dfrac{g(z) - g(a)}{z - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

□

**Ejemplo 4.11.** *Calcular:*

$$\lim_{z\to 1+i\sqrt{3}} \frac{z^2-2z+4}{z-1-i\sqrt{3}}.$$

*Demostración.* Para $z \in \mathbb{C}$, pongamos $f(z) = z^2 - 2z + 4$, $g(z) = z - 1 - i\sqrt{3}$. Se tiene:

$$\begin{aligned} &f(1+i\sqrt{3}) = (-2+i2\sqrt{3}) - 2(1+i\sqrt{3}) + 4 = 0, \\ &g(1+i\sqrt{3}) = 0. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} &f'(z) = 2z - 2, \qquad f'(1+i\sqrt{3}) = i2\sqrt{3}, \\ &g'(z) = 1. \end{aligned}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{z\to 1+i\sqrt{3}} \frac{z^2-2z+4}{z-1-i\sqrt{3}} = i2\sqrt{3}.$$

Para una resolución alternativa, véase el Ejercicio 4(ii). □

## 4.2 Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$, se cumple que $\Omega^\circ \subset \Omega \cap \Omega'$. Por tanto, dados un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, una función compleja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ y un punto $a \in \Omega$, tiene sentido considerar tanto la derivabilidad de $f$ en $a$ en sentido complejo, como la diferenciabilidad de $f$ en $a$ en sentido real, es decir, contemplando $f$ como una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

En la sección anterior se ha comprobado que, desde el punto de vista formal, la derivada de una función compleja de variable compleja sigue las mismas reglas que la correspondiente derivada de una función real de variable real, y lo único que cambia es la variable utilizada. Cabría pensar que, tal como ocurre con la continuidad, el hecho de que las funciones parte real y parte imaginaria de una función compleja sean derivables parcialmente implicará que la función compleja también sea derivable. O incluso que, tal como ocurre con la diferenciabilidad, el hecho de que las funciones parte real y parte imaginaria de una función compleja admitan derivadas parciales continuas implicará que la función sea derivable en sentido complejo. Sin embargo, esto no ocurre, como muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.12.** *Consideremos la función $f(z) = \bar{z}$, es decir, $f(x+iy) = x - iy$. Probar que $(\Re f)(x,y)$ e $(\Im f)(x,y)$ son funciones derivables respecto de sus dos variables, pero no existe $f'(z)$.*

*Resolución.* Se tiene:

$$u(x,y) = (\Re f)(x,y) = x, \qquad v(x,y) = (\Im f)(x,y) = -y.$$

Claramente, tanto $u$ como $v$ son funciones derivables respecto de sus dos variables:

$$\begin{aligned} &u_x(x,y) = 1, \qquad u_y(x,y) = 0 \\ &v_x(x,y) = 0, \qquad v_y(x,y) = -1. \end{aligned}$$

Al intentar calcular la derivada de $f$ en $a = \alpha + i\beta$ mediante la definición, encontramos que

$$f'(a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \frac{(x-iy)-(\alpha-i\beta)}{(x+iy)-(\alpha+i\beta)} = \lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \frac{(x-\alpha)-i(y-\beta)}{(x-\alpha)+i(y-\beta)}.$$

Si este límite existiese, los límites iterados deberían existir y ser iguales:

$$\lim_{x\to\alpha}\lim_{y\to\beta}\frac{(x-\alpha)-i(y-\beta)}{(x-\alpha)+i(y-\beta)}=\lim_{y\to\beta}\lim_{x\to\alpha}\frac{(x-\alpha)-i(y-\beta)}{(x-\alpha)+i(y-\beta)}.$$

Sin embargo, el límite del primer miembro es

$$\lim_{x\to\alpha}\lim_{y\to\beta}\frac{(x-\alpha)-i(y-\beta)}{(x-\alpha)+i(y-\beta)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{x-\alpha}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}1=1,$$

mientras que el del segundo miembro vale

$$\lim_{y\to\beta}\lim_{x\to\alpha}\frac{(x-\alpha)-i(y-\beta)}{(x-\alpha)+i(y-\beta)}=\lim_{y\to\beta}\frac{-i(y-\beta)}{i(y-\beta)}=\lim_{y\to\beta}(-1)=-1.$$

Así pues, no existe $f'(a)$. □

Tal como habíamos anunciado, el Ejemplo 4.12 muestra que la derivabilidad de $u$ y $v$ no garantiza la derivabilidad de $f=u+iv$ como función compleja. Además de este requisito, es fundamental que se cumpla uno adicional: las condiciones de Cauchy-Riemann (Teorema 4.13). La función del Ejemplo 4.12 no satisface dichas condiciones.

Recordemos de cursos anteriores que, si $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ es abierto, se dice que una función $f:\Omega\to\mathbb{R}^m$, $f(x,y)=(f_1(x,y),\dots,f_m(x,y))$ es diferenciable (en sentido real) en el punto $a\in\Omega$, si existe una aplicación lineal $\mathscr{L}:\Omega\to\mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{z\to a}\frac{\|f(z)-f(a)-\mathscr{L}(z-a)\|_m}{\|z-a\|_2}=0,$$

donde $\|\cdot\|_n$ es cualquier norma en $\mathbb{R}^n$, $n=2,m$. En tal caso, las componentes de $f$, $f_i:\Omega\to\mathbb{R}$ $(i=1,\dots,m)$, admiten derivadas parciales respecto de $x$ e $y$, y la matriz que representa a $\mathscr{L}$ en las bases usuales de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^m$ es la matriz jacobiana de $f$ en el punto $a=(\alpha,\beta)$, es decir,

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(\alpha,\beta) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(\alpha,\beta)\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(\alpha,\beta) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(\alpha,\beta)\\ \vdots & \vdots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x}(\alpha,\beta) & \dfrac{\partial f_m}{\partial y}(\alpha,\beta)\end{pmatrix}.$$

Se demuestra que $f$ es diferenciable en $a$ si, y sólo si, todas sus componentes $f_i:\Omega\to\mathbb{R}$ $(i=1,\dots,m)$ son diferenciables en $a$.

**Teorema 4.13.** *Sean $\Omega\subset\mathbb{C}$ un conjunto abierto, $f:\Omega\to\mathbb{C}$, y $a=\alpha+i\beta\in\Omega$. Los enunciados siguientes son equivalentes:*

$(i)$ *$f$ es derivable (en sentido complejo) en $a$.*

$(ii)$ *Las funciones $u(x,y)=\Re f(x+iy)$, $v(x,y)=\Im f(x+iy)$ son diferenciables (en sentido real) en $(\alpha,\beta)$, y satisfacen las* condiciones de Cauchy-Riemann *en ese punto:*

$$u_x(\alpha,\beta)=v_y(\alpha,\beta),\qquad u_y(\alpha,\beta)=-v_x(\alpha,\beta).$$

*Además, en tal caso se tiene:*

$$f'(a) = u_x(\alpha,\beta) + iv_x(\alpha,\beta).$$

*Demostración.* Por definición, $f$ es derivable en $a$ si, y sólo si, existe $f'(a) = \lambda + i\mu \in \mathbb{C}$ verificando

$$\lim_{z\to a} \frac{|f(z) - f(a) - (\lambda + i\mu)(z-a)|}{|z-a|} = 0.$$

Pongamos $z = x + iy$. Teniendo en cuenta la igualdad

$$\begin{aligned}(\lambda + i\mu)(z-a) &= (\lambda + i\mu)[(x+iy) - (\alpha + i\beta)] = [\lambda(x-\alpha) - \mu(y-\beta)] + i[\mu(x-\alpha) + \lambda(y-\beta)] \\ &= \left[\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \end{pmatrix}\right]^\top\end{aligned}$$

(aquí, y en lo que sigue, el superíndice $^\top$ denota transposición), junto con el hecho de que el módulo de un complejo coincide con la norma euclídea $\|\cdot\|_2$ de su vector de posición en el plano complejo, el límite anterior se expresa en la forma:

$$\begin{aligned}&\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \frac{\|(u(x,y),v(x,y)) - (u(\alpha,\beta),v(\alpha,\beta)) - (\lambda(x-\alpha) - \mu(y-\beta), \mu(x-\alpha) + \lambda(y-\beta))\|_2}{\|(x,y) - (\alpha,\beta)\|_2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \frac{\left\|(u(x,y),v(x,y)) - (u(\alpha,\beta),v(\alpha,\beta)) - \left[\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \end{pmatrix}\right]^\top\right\|_2}{\|(x,y) - (\alpha,\beta)\|_2} = 0.\end{aligned}$$

Esta condición significa que la aplicación $(x,y) \mapsto (u(x,y),v(x,y))$ de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ es diferenciable en el punto $(\alpha,\beta)$ (o, equivalentemente, que las aplicaciones $(x,y) \mapsto u(x,y)$ y $(x,y) \mapsto v(x,y)$ de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ son diferenciables en dicho punto), y su diferencial es la aplicación lineal dada por

$$(x,y) \mapsto \left[\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]^\top.$$

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$$

es la matriz jacobiana de la aplicación $(x,y) \mapsto (u(x,y),v(x,y))$ en $(\alpha,\beta)$:

$$\begin{aligned} u_x(\alpha,\beta) &= \lambda, & u_y(\alpha,\beta) &= -\mu, \\ v_x(\alpha,\beta) &= \mu, & v_y(\alpha,\beta) &= \lambda. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$f'(a) = f'(\alpha + i\beta) = \lambda + i\mu = u_x(\alpha,\beta) + iv_x(\alpha,\beta).$$

□

Téngase en cuenta que las dos condiciones del Teorema 4.13(ii) son independientes: el Ejercicio 8 muestra una función que es diferenciable real en todo punto del plano pero no satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann excepto en el origen, mientras que el Ejercicio 9 proporciona una función que satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el origen sin ser diferenciable real en él. A tenor del Teorema 4.13, la primera es derivable compleja en cero (pero no en ningún otro punto), y la segunda, no.

**Corolario 4.14.** *Sean $\Omega$ un abierto en $\mathbb{C}$, $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$, y $a \in \Omega$. Supongamos que $u$ y $v$ tienen derivadas parciales continuas en $a$. Entonces $f$ es derivable en $a$ si, y sólo si, $u$ y $v$ verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $a$.*

*Demostración.* Toda función que admita derivadas parciales continuas en un punto es diferenciable en ese punto. □

**Corolario 4.15.** *Sean $\Omega$ un abierto en $\mathbb{C}$ y $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$ una función derivable en $a \in \Omega$. Se tiene:*

$$\begin{aligned} f'(a) &= u_x(a) + iv_x(a) = u_x(a) - iu_y(a) \\ &= v_y(a) + iv_x(a) = v_y(a) - iu_y(a). \end{aligned}$$

**Observación 4.16.** *Si $f$ es derivable compleja en $a$, entonces:*

$(i)$ *La derivada de $f$ en $a$ se puede calcular mediante derivación parcial respecto de una cualquiera de las variables reales:*

$$\begin{aligned} f'(a) &= u_x(a) + iv_x(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \\ &= v_y(a) - iu_y(a) = -i[u_y(a) + iv_y(a)] = -i\frac{\partial f}{\partial y}(a). \end{aligned}$$

$(ii)$ *Las condiciones de Cauchy-Riemann se resumen en una única ecuación:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0.$$

$(iii)$ *El determinante jacobiano de $f$ en $a$ coincide con $|f'(a)|^2$.*

**Ejemplo 4.17.**

$(i)$ *$f(x+iy) = x$ y $g(x+iy) = y$ no son derivables en ningún punto;*

$(ii)$ *$f(x+iy) = (x+iy)\left(x^2+y^2\right)$ sólo es derivable en cero;*

$(iii)$ *$f(x+iy) = 2xy + i\left(y^2 - x^2\right)$ es derivable en todo $\mathbb{C}$;*

$(iv)$ *$f(x+iy) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ es derivable en todo $\mathbb{C}$, y $f'(z) = f(z)$ $(z \in \mathbb{C})$.*

*Resolución.* Como todas las funciones involucradas son de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$, en virtud del Corolario 4.14 bastará verificar el (in)cumplimiento de las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

$(i)$ En todo punto de $\mathbb{C}$, se tiene que $\partial f/\partial x + i\partial f/\partial y = 1 \neq 0$ y $\partial g/\partial x + i\partial g/\partial y = i \neq 0$. La Observación 4.16(ii) muestra que $f$ y $g$ no son derivables en ningún punto.

$(ii)$ Las partes real e imaginaria de $f$ son $u(x,y) = x\left(x^2+y^2\right) = x^3+xy^2$ y $v(x,y) = y\left(x^2+y^2\right) = x^2y+y^3$. Obligando a que

$$u_x(x,y) = 3x^2+y^2 = x^2+3y^2 = v_y(x,y), \qquad u_y(x,y) = 2xy = -2xy = -v_x(x,y),$$

necesariamente ha de tenerse $x = \pm y$ y $xy = 0$, sistema cuya única solución es $x = y = 0$. Por tanto, $f$ sólo es derivable en el origen.

$(iii)$ Ahora $u(x,y) = 2xy$ y $v(x,y) = y^2-x^2$, con

$$u_x(x,y) = 2y = v_y(x,y), \qquad u_y(x,y) = 2x = -v_x(x,y).$$

Por tanto, $f$ es derivable en todo $\mathbb{C}$.

$(iv)$ En este caso, $u(x,y) = e^x \cos y$ y $v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$, para las que se cumple

$$u_x(x,y) = e^x \cos y = v_y(x,y), \qquad u_y(x,y) = -e^x \operatorname{sen} y = -v_x(x,y).$$

Luego, $f$ es derivable en todo $\mathbb{C}$, con

$$f'(x+iy) = u_x(x,y)+iv_x(x,y) = (e^x \cos y)+i(e^x \operatorname{sen} y) = e^x(\cos y+i\operatorname{sen} y) = f(x+iy).$$

□

## 4.3 Holomorfía

**Definición 4.18.** *Una función compleja $f$ es* holomorfa en un punto *$a$ si $f$ es derivable en $a$ y en todo punto de algún entorno de $a$.*

**Definición 4.19.** *Sea $\Omega$ un abierto no vacío de $\mathbb{C}$. Se dice que una función $f:\Omega\to\mathbb{C}$ es* holomorfa en $\Omega$ *si $f$ es derivable en todo punto de $\Omega$. Denotaremos $\mathscr{H}(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones holomorfas en $\Omega$. Las funciones holomorfas en todo el plano complejo se llaman* funciones enteras.

**Observación 4.20.** $(i)$ *Los conceptos de derivabilidad y holomorfía en un punto no son equivalentes. La holomorfía en un punto exige derivabilidad en todo un entorno de ese punto.*

$(ii)$ *Una función compleja $f(z)$ es* analítica en un punto *$a$ si admite un desarrollo en serie de potencias de $z-a$ que es convergente en un entorno de $a$. Veremos en este tema que toda función analítica en un punto es holomorfa en ese punto y, más adelante en el curso, que el recíproco también es cierto; de aquí que sea frecuente manejar indistintamente los términos «función analítica» y «función holomorfa». El término «función regular» también se usa como sinónimo de los anteriores.*

**Ejemplo 4.21.** $(i)$ *La función $f(x+iy) = 2x^2+y+i(y^2-x)$ no es holomorfa en ningún punto de $\mathbb{C}$.*

$(ii)$ *La función $f(x+iy) = x^2-y^2+x+i(2xy+y)$ es entera.*

*Resolución.*

$(i)$ Para que $f$ sea holomorfa en un punto debe ser derivable en ese punto, y para ello debe satisfacer las condiciones de Cauchy-Riemann. Sean $u(x,y) = 2x^2 + y$, $v(x,y) = y^2 - x$. Imponiendo que se verifican estas condiciones:

$$u_x(x,y) = 4x = 2y = v_y(x,y), \qquad u_y(x,y) = 1 = -v_x(x,y).$$

El cumplimiento de la primera de ellas obliga a que $y = 2x$, de modo que $f$ sólo es derivable sobre los puntos de esta recta. No es holomorfa en ningún punto, ya que dicha recta no contiene ningún abierto.

$(ii)$ En este caso, las condiciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en todo el plano:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x^2 - y^2, & v(x,y) &= 2xy + y, \\ u_x(x,y) &= 2x = v_y(x,y), & u_y(x,y) &= -2y = -v_x(x,y). \end{aligned}$$

□

El Ejemplo 4.22 y la Proposición 4.24 son consecuencia de la Definición 4.19 y las reglas de derivación (Proposición 4.6).

**Ejemplo 4.22.** $(i)$ *Los polinomios, es decir, las funciones de la forma*

$$p(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n \quad (z \in \mathbb{C}),$$

*con $c_k \in \mathbb{C}$ $(k = 0, \ldots, n)$, son funciones enteras. La función derivada de $p$ viene dada por*

$$p'(z) = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + \cdots + n c_n z^{n-1} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

$(ii)$ *Las funciones racionales, es decir, las funciones de la forma*

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

*donde $p(z)$ y $q(z)$ son polinomios, son holomorfas en su dominio de definición $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : q(z) \neq 0\}$. La función derivada de $R$ viene dada por*

$$R'(z) = \frac{p'(z)q(z) - p(z)q'(z)}{q^2(z)} \quad (z \in \Omega).$$

**Observación 4.23.** *En notación compleja, la función del Ejemplo 4.21(ii) es $f(z) = z^2 + z$. Compárese con el Ejemplo 4.22(i).*

Recordemos que un *álgebra* sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial $V$ sobre $\mathbb{K}$, equipado adicionalmente con una multiplicación $\cdot : V \times V \to V$ que satisface, para cualesquiera $u, v, w \in V$ y todo $\lambda \in \mathbb{K}$, las siguientes propiedades:

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w; \qquad (v + w) \cdot u = v \cdot u + w \cdot u; \qquad u \cdot (\lambda v) = (\lambda u) \cdot v = \lambda (u \cdot v).$$

**Proposición 4.24.** *El conjunto $\mathscr{H}(\Omega)$ de las funciones holomorfas en un abierto $\Omega$, con las operaciones suma y producto de funciones definidas punto a punto, es un álgebra.*

**Proposición 4.25.** *Una función holomorfa en un dominio (abierto y conexo) cuya derivada es nula en todo punto es constante.*

*Demostración.* Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo. Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $f'(z) = 0$ $(z \in \Omega)$. Fijado $z_0 \in \Omega$, definimos

$$A = \{z \in \Omega : f(z) = f(z_0)\}.$$

Nótese que $A \neq \emptyset$, pues $z_0 \in A$. Además, $A$ es un cerrado relativo de $\Omega$, porque $f$ es continua. Afirmamos que $A$ es también abierto. En efecto, sea $a \in A$. Como $\Omega$ es abierto, existe $r > 0$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$. Tomamos $b \in D(a,r)$ y definimos $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ poniendo $\varphi(t) = f[(1-t)a + tb]$ $(t \in [0,1])$. Al ser $f$ es derivable, con $f'(z) = 0$ $(z \in \Omega)$, la regla de la cadena (Proposición 4.7) asegura que $\varphi$ es derivable y que

$$\varphi'(t) = f'[(1-t)a + tb](b-a) = 0 \quad (t \in [0,1]).$$

Por ser $\varphi$ una función compleja de variable real, se tiene

$$\varphi'(t) = (\Re\varphi)'(t) + i(\Im\varphi)'(t) = 0 \quad (t \in [0,1])$$

(Observación 4.2), lo que obliga a que

$$(\Re\varphi)'(t) = (\Im\varphi)'(t) = 0 \quad (t \in [0,1]).$$

Puesto que $\Re\varphi$, $\Im\varphi$ son funciones reales de variable real definidas en $[0,1]$, se sigue que son constantes. Luego, $\varphi$ es constante, y por lo tanto $\varphi(0) = f(a) = f(b) = \varphi(1)$. En particular, $f(b) = f(z_0)$, de modo que $b \in A$.

De la arbitrariedad de $b$ y $a$ se concluye que $D(a,r) \subset \Omega$, y que $A$ es abierto. Como $\Omega$ es conexo, no es posible descomponerlo como unión disjunta de abiertos relativos no vacíos. Encontramos así que, necesariamente, $\Omega \setminus A = \emptyset$, lo que permite concluir que $\Omega = A$, y de aquí que $f$ es constante en $\Omega$. □

**Corolario 4.26.** *Si dos funciones holomorfas tienen la misma derivada sobre un dominio $\Omega$ y coinciden en un punto de $\Omega$, entonces son idénticas.*

*Demostración.* En efecto: su diferencia es una función constante, y puesto que ambas coinciden en un punto, esa constante debe ser cero. □

La siguiente proposición pone de manifiesto que la holomorfía es más restrictiva que la derivabilidad real.

**Proposición 4.27.** *Sean $\Omega$ un dominio de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Son equivalentes:*

$(i)$ $\Re f$ *es constante en* $\Omega$*;*

$(ii)$ $\Im f$ *es constante en* $\Omega$*;*

$(iii)$ $\overline{f} \in \mathscr{H}(\Omega)$*;*

(*iv*) *$f$ es constante en $\Omega$;*

(*v*) *$|f|$ es constante en $\Omega$.*

*Demostración.* Sean $f = u + iv$, de modo que $u = \Re f$, $v = \Im f$. Es claro que la condición $(iv)$ implica todas las demás, por lo que sólo resta demostrar las implicaciones recíprocas.

Veamos, primeramente, que (i) implica (iv). Por el Corolario 4.15, se tiene que $f'(z) = f'(x+iy) = u_x(x,y) - iu_y(x,y)$ para todo $z \in \Omega$. Puesto que $u = \Re f$ es constante en $\Omega$, necesariamente $u_x(x,y) = u_y(x,y) = 0$, probando que $f'(z) = 0$ $(z \in \Omega)$. La Proposición 4.25 ya conduce a (iv).

Para demostrar que (ii) implica (iv), observemos que si $\Re(if) = -\Im f$ es constante entonces, por lo que acabamos de probar, $if$ es constante, forzando a que $f$ también lo sea.

Supongamos ahora que se verifica (iii). Ya que $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $\overline{f} \in \mathscr{H}(\Omega)$, la Proposición 4.24 implica que $(f+\overline{f})/2 = \Re f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Ahora bien, $\Im(\Re f) = 0$ es constante, y como (ii) implica (iv), $\Re f$ es constante. Nos hemos situado en la hipótesis (i) y ya hemos probado que (i) implica (iv), así que $f$ es constante.

Estableceremos, finalmente, que (v) implica (iv). Si $|f(z)| = \alpha$ $(z \in \Omega)$, con $\alpha$ constante, entonces $f(z)\overline{f(z)} = \alpha^2$ $(z \in \Omega)$. En caso de que $\alpha = 0$, necesariamente $f = 0$ y hemos terminado. En caso de que $\alpha \neq 0$, $f$ no se anula en ningún punto de $\Omega$; de este modo, la función $\overline{f} = \alpha^2/f(z)$ está en $\mathscr{H}(\Omega)$, es decir, satisface (iii), lo que obliga a que $f$ sea constante. □

## 4.4 Funciones armónicas conjugadas

Supongamos que $f = u + iv$ es derivable en un abierto $G \subset \mathbb{C}$. Entonces (Teorema 4.13), $u, v$ admiten derivadas parciales de primer orden en $G$, que satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.$$

Si, además, $u, v \in C^2(G)$, entonces

$$u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy}, \qquad v_{xx} = -u_{yx} = -u_{xy} = -v_{yy}. \tag{4}$$

**Definición 4.28.** *La expresión $u_{xx} + u_{yy}$ se representa por $\Delta u$ y se llama* laplaciano de *$u$. La relación $\Delta u = 0$ se conoce como* ecuación de Laplace. *Una función $u \in C^2(G)$ es* armónica en *$G$ si $\Delta u = 0$ en $G$.*

Veremos más adelante que, de hecho, las partes real e imaginaria de una función $f \in \mathscr{H}(G)$ son de clase $C^\infty(G)$, así que, en virtud de (4), podemos afirmar que las partes real e imaginaria de una función holomorfa son armónicas.

**Definición 4.29.** *Dada una función armónica $u \in C^2(G)$, se dice que $v \in C^2(G)$ es* armónica conjugada de *$u$ si $f = u + iv$ es holomorfa en $G$.*

**Teorema 4.30.** *Sea $G$ un dominio simplemente conexo, en particular $\mathbb{C}$ ó $D(a,r)$ para ciertos $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$. Si $u \in C^2(G)$ es armónica en $G$, entonces $u$ admite una función armónica conjugada $v \in C^2(G)$. Además, todas las posibles funciones armónicas conjugadas de $u$ en $G$ difieren en una constante.*

*Demostración.* Supongamos que $G$ es simplemente conexo. Tomando $u$ como dato, hemos de resolver en $v$ las ecuaciones $v_x = P$, $v_y = Q$, donde $P = -u_y$, $Q = u_x$. Como $u$ es armónica, la forma diferencial $\omega = P\,dx + Q\,dy$ es cerrada: $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$. Y como $G$ es simplemente conexo, sabemos de cursos anteriores que, en tal caso, $(P,Q)$ es un campo vectorial gradiente en $G$, esto es, existe $v \in C^1(G)$ tal que $(-u_y, u_x) = (P,Q) = \overline{\nabla} v = (v_x, v_y)$. De las relaciones $v_x = -u_y$, $v_y = u_x$ y la hipótesis $u \in C^2(G)$, se deduce que $f = u + iv \in \mathscr{H}(G)$ y que $v \in C^2(G)$ es armónica en $G$.

Para completar la prueba, sean $v_1, v_2$ dos armónicas conjugadas de $u$ en $G$, de modo que $f_1 = u + iv_1$ y $f_2 = u + iv_2$ son holomorfas en $G$. Entonces, la función $i(f_2 - f_1) = v_1 - v_2$ es real y holomorfa en $G$. En virtud de la Proposición 4.27, $v_1 - v_2$ es constante. □

**Ejemplo 4.31.** *Comprobar que $u(x,y) = e^x \cos y$ es armónica en $\mathbb{R}^2$, y hallar una armónica conjugada.*

*Resolución.* Para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, se tiene:

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= e^x \cos y, & u_y(x,y) &= -e^x \operatorname{sen} y, \\ u_{xx}(x,y) &= e^x \cos y & u_{yy}(x,y) &= -e^x \cos y. \end{aligned}$$

Por tanto, $u_{xx} + u_{yy} = 0$, probando que $u = u(x,y)$ es armónica en $\mathbb{R}^2$. Para encontrar una armónica conjugada $v = v(x,y)$, imponemos que $v$ satisfaga las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} v_x(x,y) &= -u_y(x,y) = e^x \operatorname{sen} y \\ v_y(x,y) &= u_x(x,y) = e^x \cos y. \end{aligned}$$

Integramos la primera ecuación respecto de $x$: $v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y + h(y)$. Ahora, derivamos esta expresión respecto de $y$ y la igualamos a la segunda ecuación: $v_y = e^x \cos y + h'(y) = e^x \cos y$. Se infiere que $h'(y) = 0$, de donde $h(y) = C$, siendo $C$ una constante arbitraria, y concluimos que $v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y + C$. Como nos piden únicamente una armónica conjugada podemos elegir $C = 0$, lo que proporciona $v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$. Compárese con el Ejemplo 4.17(iv). □

**Ejemplo 4.32.** *Hallar todas las funciones enteras cuya parte real es $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$.*

*Resolución.* El problema se reduce a comprobar que $u = u(x,y)$ es una función armónica en $\mathbb{R}^2$ y determinar sus armónicas conjugadas. En efecto, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, se tiene:

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= 3x^2 - 3y^2, & u_y(x,y) &= -6xy, \\ u_{xx}(x,y) &= 6x & u_{yy}(x,y) &= -6x. \end{aligned}$$

Por tanto, $u_{xx} + u_{yy} = 0$, probando que $u = u(x,y)$ es armónica en $\mathbb{R}^2$. Para determinar sus armónicas conjugadas $v = v(x,y)$, imponemos que $v$ satisfaga las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} v_x(x,y) &= -u_y(x,y) = 6xy \\ v_y(x,y) &= u_x(x,y) = 3x^2 - 3y^2. \end{aligned}$$

Integramos la primera ecuación respecto de $x$: $v(x,y) = 3x^2 y + h(y)$. Ahora, derivamos esta expresión respecto de $y$ y la igualamos a la segunda ecuación: $v_y = 3x^2 + h'(y) = 3x^2 - 3y^2$. Se infiere que $h'(y) = -3y^2$, y de aquí que $h(y) = -y^3 + C$, siendo $C$ una constante arbitraria. Concluimos que $v(x,y) = 3x^2 y - y^3 + C$.

Las funciones enteras pedidas serán

$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3 + C), \tag{5}$$

donde $C$ es cualquier constante real. Por simple inspección, o bien haciendo las sustituciones

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z-\bar{z}}{2i},$$

advertimos que $f(z) = z^3 + iC$. Alternativamente, para obtener $f$ como función de $z$ se puede aplicar el método de Milne-Thomson, consistente en hacer $x = z$ e $y = 0$ en (5), con idéntico resultado. □

**Observación 4.33.** *Es posible calcular la armónica conjugada siguiendo el mismo procedimiento de los Ejemplos 4.31 y 4.32, pero comenzando por integrar la segunda ecuación respecto de y en vez de la primera respecto de x, si aquella integral resultara más sencilla de calcular que esta. En tal caso, la primitiva contendrá, en principio, una función arbitraria de x, que habrá que determinar por derivación e igualación con la primera de las ecuaciones del sistema.*

# 5 Sucesiones y series funcionales

## 5.1 Sucesiones funcionales

Una *sucesión funcional* o *sucesión de funciones* es una sucesión cuyos términos son funciones. Formalmente, se trata de una aplicación que a cada número natural le asigna una función, en nuestro caso, compleja.

Consideremos una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $f_n : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$.

**Definición 5.1.** *Se dice que* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente *en un punto* $a \in A$ *si la sucesión de números complejos* $\{f_n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ *converge. El* campo de convergencia puntual *de la sucesión* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es el conjunto*

$$C = \left\{z \in A : \{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty} \text{ converge}\right\},$$

*y su* límite puntual *es la función* $f : C \to \mathbb{C}$*, definida por*

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z).$$

**Definición 5.2.** *Se dice que* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente *a una función* $f$ *en un conjunto* $B \subset A$ *si*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(z) - f(z)| : z \in B\} = 0,$$

*es decir, si para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $n \in \mathbb{N}$ *y* $n \geq N$*, implican* $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ $(z \in B)$.

**Teorema 5.3** (Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme)**.** *Una sucesión de funciones* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge uniformemente en* $B$ *si, y sólo si, verifica la condición de Cauchy uniformemente en* $B$*, esto es, si para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $p, q \in \mathbb{N}$ *y* $p, q \geq N$ *implican*

$$\sup\left\{\left|f_p(z) - f_q(z)\right| : z \in B\right\} < \varepsilon. \tag{6}$$

*Demostración.* Supongamos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $B$ a una función $f$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $p \in \mathbb{N}$, $p \geq N$ implican

$$\sup\{|f_p(z) - f(z)| : z \in B\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por tanto, para $p, q \in \mathbb{N}$ y $p, q \geq N$ se cumple

$$\left|f_p(z) - f_q(z)\right| \leq |f_p(z) - f(z)| + \left|f_q(z) - f(z)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (z \in B),$$

de donde sigue (6), como necesitábamos probar.

Recíprocamente, supongamos que dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que (6) se verifica siempre que $p, q \in \mathbb{N}$ y $p, q \geq N$. Entonces, para cada $z \in B$, la sucesión de números complejos $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ satisface la condición de Cauchy:

$$\left|f_p(z) - f_q(z)\right| \leq \sup\left\{\left|f_p(w) - f_q(w)\right| : w \in B\right\} < \varepsilon \quad (p, q \in \mathbb{N},\ p, q \geq N). \tag{7}$$

De la completitud de $\mathbb{C}$ se infiere que $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ converge para cada $z \in B$. Definimos $f : B \to \mathbb{C}$ por

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) \quad (z \in B).$$

Ahora, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a $f$ en $B$. En efecto, fijando $z \in B$ y $p \geq N$ en (7) y tomando límites para $q \to \infty$ resulta

$$|f_p(z) - f(z)| \leq \varepsilon.$$

La arbitrariedad de $z \in B$ permite concluir que

$$\sup\{|f_p(z) - f(z)| : z \in B\} \leq \varepsilon \quad (p \in \mathbb{N},\ p \geq N),$$

completando la prueba. □

**Proposición 5.4.** *El límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones continuas es también una función continua.*

*Demostración.* Sean $f_n, f : B \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, con $f_n$ continua $(n \in \mathbb{N})$, tales que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a $f$ en $B$. Fijado $z \in B$, se pretende probar que $f$ es continua en $z$.

Dado $\varepsilon > 0$, la convergencia uniforme permite encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f(z) - f_N(z)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |f_N(w) - f(w)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (w \in B).$$

Como $f_N$ es continua en $z$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f_N(z) - f_N(w)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (w \in B,\ |z - w| < \delta).$$

Consecuentemente:

$$|f(z) - f(w)| \leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(w)| + |f_N(w) - f(w)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad (w \in B,\ |z - w| < \delta).$$

Se concluye que $f$ es continua en $z$. □

## 5.2 Series funcionales

Dada una sucesión funcional $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, es posible formar a partir de ella otra sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ cuyo término $n$-ésimo se obtiene sumando consecutivamente los de la sucesión dada:

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \quad (n \in \mathbb{N}).$$

**Definición 5.5.** *La sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ se llama* serie de término general $f_n$*, y se representa por $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.*

Como las series de funciones son sucesiones funcionales, cabe aplicarles las anteriores definiciones de convergencia puntual, campo de convergencia puntual y convergencia uniforme. Además, se comprueba inmediatamente:

**Proposición 5.6.** *Condición necesaria para que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converja puntualmente (respectivamente, uniformemente) en un conjunto $A$ es que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converja puntualmente (respectivamente, uniformemente) a cero en $A$.*

**Definición 5.7.** *Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$* converge absolutamente *en un punto $a \in A$ si converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(a)|$. El* campo de convergencia absoluta *de la serie es el conjunto*

$$\left\{ z \in A : \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)| \text{ converge} \right\}.$$

Al igual que ocurre con las series de números complejos, la convergencia absoluta de una serie funcional implica su convergencia, pero el recíproco es falso, en general. A continuación estableceremos algunos criterios de convergencia.

**Teorema 5.8** (Criterio $M$ de Weierstrass)**.** *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones complejas definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$. Supongamos que existe una sucesión $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales positivos tal que:*

$(i)$ $|f_n(z)| \leq M_n$ $(z \in A,\ n \in \mathbb{N})$.

$(ii)$ *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ es convergente.*

*Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absoluta y uniformemente en $A$.*

*Demostración.* Por el criterio de comparación para series de términos positivos, (i) y (ii) implican que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ converge para $z \in A$. A fin de probar la convergencia uniforme en $A$, veamos que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ satisface la condición de Cauchy uniformemente en $A$.

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, cumple la condición de Cauchy: dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $p, q \in \mathbb{N}$ y $q > p \geq N$ implican

$$\sum_{k=p+1}^{q} M_k < \varepsilon.$$

Luego, para $q > p \geq N$ y todo $z \in A$ se verifica

$$\left|\sum_{k=1}^{q} f_k(z) - \sum_{k=1}^{p} f_k(z)\right| = \left|\sum_{k=p+1}^{q} f_k(z)\right| \leq \sum_{k=p+1}^{q} |f_k(z)| \leq \sum_{k=p+1}^{q} M_k < \varepsilon.$$

□

**Teorema 5.9** (Criterio de Dirichlet)**.** *Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones complejas definidas en un conjunto $A$. Supongamos que:*

$(i)$ *la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ tiene sumas parciales uniformemente acotadas en $A$;*

$(ii)$ *$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona y converge a cero.*

*Entonces la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ converge uniformemente en $A$.*

*Demostración.* Pongamos $F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. De la fórmula de sumación por partes de Abel para series numéricas se deduce que

$$\sum_{k=1}^{q} a_{p+k} f_{p+k}(z) = \sum_{k=1}^{q} F_{p+k}(z)\left(a_{p+k} - a_{p+k+1}\right) + F_{p+q}(z) a_{p+q+1} - F_p(z) a_{p+1} \quad (z \in A,\ p, q \in \mathbb{N}). \tag{8}$$

Asumamos que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente (y, por tanto, de términos positivos), y sea $M > 0$ tal que $|F_n(z)| \leq M$ ($z \in A$, $n \in \mathbb{N}$). Tomando valores absolutos en (8), resulta:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{q} a_{p+k} f_{p+k}(z)\right| &\leq M \sum_{k=1}^{q}\left(a_{p+k} - a_{p+k+1}\right) + M a_{p+q+1} + M a_{p+1} \\ &= M\left(a_{p+1} - a_{p+q+1}\right) + M a_{p+q+1} + M a_{p+1} = 2M a_{p+1} = 2M|a_{p+1}| \quad (z \in A,\ p, q \in \mathbb{N}).\end{aligned}$$

Similarmente, en caso de que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ fuese creciente (y, por tanto, de términos negativos), obtendríamos

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{q} a_{p+k} f_{p+k}(z)\right| &\leq M \sum_{k=1}^{q}\left(a_{p+k+1} - a_{p+k}\right) - M a_{p+q+1} - M a_{p+1} \\ &= M\left(a_{p+q+1} - a_{p+1}\right) - M a_{p+q+1} - M a_{p+1} = -2M a_{p+1} = 2M|a_{p+1}| \quad (z \in A,\ p, q \in \mathbb{N}).\end{aligned}$$

Ya que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a cero, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $p \in \mathbb{N}$ y $p \geq N$ implican $|a_p| < \varepsilon/2M$. Luego,

$$\left|\sum_{k=1}^{p+q} a_k f_k(z) - \sum_{k=1}^{p} a_k f_k(z)\right| = \left|\sum_{k=1}^{q} a_{p+k} f_{p+k}(z)\right| \leq 2M|a_{p+1}| < \varepsilon \quad (z \in A,\ p, q \in \mathbb{N},\ p \geq N).$$

Consecuentemente, la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ verifica la condición de Cauchy para la convergencia uniforme en $A$, y por lo tanto (Teorema 5.3) converge uniformemente en $A$. □

**Teorema 5.10** (Criterio de Abel)**.** *Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones complejas definidas en un conjunto $A$. Supongamos que:*

$(i)$ *para cada* $z \in A$, $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión monótona de números reales, y la sucesión funcional* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *está uniformemente acotada en* $A$*;*

$(ii)$ *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

*Entonces la serie funcional* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ *converge uniformemente en* $A$*.*

*Demostración.* Pongamos $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $(n \in \mathbb{N})$. Intercambiando los papeles de $a_k$ y $f_k$ en la igualdad (8) resulta:

$$\sum_{k=1}^{q} a_{p+k} f_{p+k}(z) = \sum_{k=1}^{q} A_{p+k} \left[ f_{p+k}(z) - f_{p+k+1}(z) \right] + A_{p+q} f_{p+q+1}(z) - A_p f_{p+1}(z) \quad (z \in A,\ p,q \in \mathbb{N}).$$

Pongamos ahora $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Teniendo en cuenta que

$$\sum_{k=1}^{q} \left[ f_{p+k}(z) - f_{p+k+1}(z) \right] = f_{p+1}(z) - f_{p+q+1}(z) \quad (z \in A,\ p,q \in \mathbb{N}),$$

podemos escribir:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{q} a_{p+k} f_{p+k}(z) \\ &\quad = \sum_{k=1}^{q} \left( A_{p+k} - A \right) \left[ f_{p+k}(z) - f_{p+k+1}(z) \right] + \left( A_{p+q} - A \right) f_{p+q+1}(z) - \left( A_p - A \right) f_{p+1}(z) \quad (z \in A,\ p,q \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Sea $M > 0$ tal que $|f_n(z)| \leq M$ $(z \in A,\ n \in \mathbb{N})$. Y dado $\varepsilon > 0$, sea también $N \in \mathbb{N}$ tal que $|A_p - A| < \varepsilon/4M$ siempre que $p \in \mathbb{N}$ y $p \geq N$. Tomando valores absolutos en la igualdad anterior encontramos que

$$\left| \sum_{k=1}^{q} a_{p+k} f_{p+k}(z) \right| < \frac{\varepsilon}{4M} \sum_{k=1}^{q} \left| f_{p+k}(z) - f_{p+k+1}(z) \right| + \frac{\varepsilon}{2} \quad (z \in A,\ p,q \in \mathbb{N},\ p \geq N).$$

Como para cada $z \in A$ la sucesión $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona, las diferencias $f_{p+k}(z) - f_{p+k+1}(z)$ $(z \in A,\ p,k \in \mathbb{N})$ son todas positivas o todas negativas, así que

$$\sum_{k=1}^{q} \left| f_{p+k}(z) - f_{p+k+1}(z) \right| = \left| \sum_{k=1}^{q} \left[ f_{p+k}(z) - f_{p+k+1}(z) \right] \right| = \left| f_{p+1}(z) - f_{p+q+1}(z) \right| \leq 2M \quad (z \in A,\ p,q \in \mathbb{N}).$$

Sigue que

$$\left| \sum_{k=1}^{p+q} a_k f_k(z) - \sum_{k=1}^{p} a_k f_k(z) \right| = \left| \sum_{k=1}^{q} a_{p+k} f_{p+k}(z) \right| < \frac{\varepsilon}{4M} 2M + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (z \in A,\ p,q \in \mathbb{N},\ p \geq N).$$

Se concluye que la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ verifica la condición de Cauchy para la convergencia uniforme en $A$, y con ello (Teorema 5.3) que dicha serie converge en $A$. □

### 5.3 Series de potencias: analiticidad

En lo que sigue denotaremos $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

**Definición 5.11.** *Dados una sucesión de números complejos* $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ *y un número* $a \in \mathbb{C}$*, se llama* serie de potencias centrada en *a a la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$*, definida por la sucesión funcional*

$$f_0(z) = c_0,$$
$$f_n(z) = c_n(z-a)^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

*La sucesión* $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ *y el número complejo* $a$ *se denominan* sucesión de coeficientes *y* centro *de la serie, respectivamente.*

**Proposición 5.12** (Lema de Abel)**.** *Sea* $\rho > 0$ *tal que la sucesión* $\{c_n\rho^n\}_{n=0}^{\infty}$ *está acotada. Entonces, la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *converge absolutamente en el disco* $D(a,\rho)$*, y uniformemente en compactos* $K \subset D(a,\rho)$*.*

*Demostración.* Consideremos un compacto $K \subset D(a,\rho)$, y sea $r = \max\{|z-a| : z \in K\} < \rho$. Puesto que $\{c_n\rho^n\}_{n=0}^{\infty}$ está acotada, existe $M > 0$ tal que $|c_n\rho^n| \le M$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Consecuentemente,

$$|c_n(z-a)^n| = |c_n|\,|z-a|^n \le |c_n|\,r^n = |c_n\rho^n|\,\frac{r^n}{\rho^n} \le M\left(\frac{r}{\rho}\right)^n \quad (z \in K,\ n \in \mathbb{N}_0).$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty}(r/\rho)^n$ es geométrica de razón menor que 1, y por lo tanto converge. El criterio $M$ de Weierstrass (Teorema 5.8) asegura ahora que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ converge absoluta y uniformemente en $K$. Como la serie converge absolutamente en cualquier compacto contenido en $D(a,\rho)$, converge absolutamente en todo el disco. □

Introducimos el conjunto

$$A = \{\rho \ge 0 : \{c_n\rho^n\}_{n=0}^{\infty} \text{ está acotada}\}, \tag{9}$$

y definimos $R = \sup A \in [0,+\infty]$. Se pueden presentar los siguientes casos:

- $R = 0$. Entonces $A = \{0\}$, así que si $z \ne a$ la sucesión $\{c_n(z-a)^n\}_{n=0}^{\infty}$ no está acotada y, en particular, no converge a cero; por tanto, la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ no converge. En este caso se dice que que la serie de potencias es *trivial*, pues converge únicamente para $z = a$.

- $0 < R < +\infty$. Sean $K \subset D(a,R)$ compacto y $r = \max\{|z-a| : z \in K\} < R$. Por definición de supremo, existe $\rho \in A$ tal que $r < \rho \le R$. Aplicando el lema de Abel (Lema 5.12) con este $\rho$ deducimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ converge absoluta y uniformemente en $K$. Como $K$ es un compacto arbitrario contenido en $D(a,R)$, concluimos que la serie converge absolutamente en $D(a,R)$ y uniformemente en compactos contenidos en dicho disco. Si $|z-a| > R$, entonces la sucesión $\{c_n(z-a)^n\}_{n=0}^{\infty}$ no está acotada y, por tanto, la serie no converge. Nada puede afirmarse, en general, del comportamiento de la serie en la frontera del disco $D(a,R)$.

- $R = +\infty$. Ahora el argumento anterior vale para cualquier compacto $K \subset \mathbb{C}$, de modo que la serie converge absolutamente en $\mathbb{C}$ y uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$.

**Definición 5.13.** *El número R recibe el nombre de* radio de convergencia *de la serie. Además, si la serie de potencias no es trivial, llamaremos* dominio, disco o círculo de convergencia *de la serie al disco abierto* $D(a,R)$ *(recuérdese el convenio* $D(a,+\infty) = \mathbb{C}$*).*

Nótese que el dominio de convergencia está caracterizado por la propiedad de que dentro de él la serie converge absolutamente, mientras que fuera de él no converge. También se observa que el radio de convergencia sólo depende de la sucesión $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ de coeficientes de la serie, y no del centro de ésta. Los siguientes criterios, que se deducen de los correspondientes para series numéricas, permiten calcularlo en muchos casos.

**Teorema 5.14** (Criterio del cociente o de D'Alembert)**.** *Sea $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión de coeficientes de una serie de potencias. Supongamos que los términos de esta sucesión son distintos de cero desde uno en adelante, y que existe*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = L \in [0, +\infty].$$

*Entonces el radio de convergencia de la serie es $R = 1/L$, con los convenios siguientes: $R = 0$ si $L = +\infty$, y $R = +\infty$ si $L = 0$.*

*Demostración.* Sea $a$ el centro de la serie, y fijemos $z \in \mathbb{C}$. Si $0 < R < +\infty$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|\,|z-a|^{n+1}}{|c_n|\,|z-a|^n} = L|z-a|, \tag{10}$$

y el criterio del cociente para series numéricas asegura que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ converge absolutamente cuando $L|z-a| < 1$, esto es, cuando $|z-a| < 1/L$, pero no converge cuando $L|z-a| > 1$, esto es, cuando $|z-a| > 1/L$. Atendiendo a la observación precedente, el radio de convergencia de la serie es $R = 1/L$.

Si $L = 0$ entonces (10) vale cero, que es menor que 1, y por el mismo criterio para series numéricas deducimos que la serie converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$, de modo que $R = +\infty$. Finalmente, si $L = +\infty$ y $z \neq a$ entonces (10) vale $+\infty$, que es mayor que 1, de modo que la serie no converge y, por tanto, $R = 0$. □

**Teorema 5.15** (Criterio de la raíz o de Cauchy)**.** *Sea $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión de coeficientes de una serie de potencias. Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L \in [0, +\infty]$ entonces el radio de convergencia de la serie es $R = 1/L$, con los mismos convenios anteriores.*

*Demostración.* Es análoga a la del criterio de D'Alembert. □

Estos criterios son bastante restrictivos: ninguno de ellos permite estudiar, por ejemplo, la convergencia de una serie de potencias cuyos coeficientes sean $c_{2n-1} = 1/2^n$, $c_{2n} = 1/3^n$ $(n \in \mathbb{N})$. En efecto, si intentamos aplicar el criterio del cociente obtenemos dos subsucesiones, según que el numerador sea par o impar, convergentes a cero y a $+\infty$, respectivamente:

$$\frac{c_{2n}}{c_{2n-1}} = \frac{1/3^n}{1/2^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty,$$
$$\frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} = \frac{1/2^{n+1}}{1/3^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n \to \infty \quad \text{cuando } n \to \infty;$$

mientras que si intentamos aplicar el criterio de la raíz, obtenemos de nuevo dos subsucesiones, convergentes a $1/\sqrt{2}$ y a $1/\sqrt{3}$, formadas por los términos impares y pares, respectivamente:

$$\sqrt[2n-1]{|c_{2n-1}|} = \frac{1}{2^{n/(2n-1)}} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{cuando } n \to \infty, \qquad \sqrt[2n]{|c_{2n}|} = \frac{1}{3^{n/(2n)}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \to \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Por tanto, en ninguno de los dos casos existe el límite de la sucesión que proporcionaría el inverso del radio de convergencia. El Teorema 5.16 da una fórmula para calcularlo en términos del límite superior, en vez del límite, de la raíz $n$-ésima del módulo de la sucesión de coeficientes.

Recuérdese que si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales, se define el límite superior de dicha sucesión, $\limsup_{n\to\infty} a_n$, como el límite de la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$. La sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente y por lo tanto siempre converge: a un límite finito si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada superiormente, ó a $+\infty$ en caso contrario. Dualmente, el límite inferior de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se denota $\liminf_{n\to\infty} a_n$ y se define como el límite de la sucesión $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $d_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$. La sucesión $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente y por lo tanto siempre converge: a un límite finito si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada inferiormente, ó a $-\infty$ en caso contrario.

Así pues, a diferencia del límite de una sucesión, que puede o no existir, sus límites superior e inferior siempre existen (finitos o infinitos); la sucesión es convergente si, y sólo si, los límites superior e inferior coinciden, y en tal caso ese valor común es el valor del límite. A la hora de calcular el límite superior (respectivamente, inferior) de una sucesión, es útil tener en cuenta que éste es el supremo (respectivamente, ínfimo) de los límites de todas las subsucesiones convergentes de la sucesión dada.

**Teorema 5.16** (Fórmula de Cauchy-Hadamard)**.** *El radio de convergencia $R$ de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ viene dado por*

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}, \tag{11}$$

*con los convenios usuales.*

*Demostración.* Sean $A$ como en (9) y $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \in [0,+\infty]$.

Supongamos primeramente que $L = +\infty$, es decir, que $\left\{\sqrt[n]{c_n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ no está acotada. Afirmamos que $\{c_n\rho^n\}_{n=0}^{\infty}$ no está acotada para ningún $\rho > 0$. De lo contrario, existirían $\rho > 0$ y $M > 1$ tales que $|c_n|\rho^n \leq M$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Así,

$$\sqrt[n]{|c_n|} \leq \frac{\sqrt[n]{M}}{\rho} \leq \frac{M}{\rho} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

y $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}_{n=0}^{\infty}$ estaría acotada, en contra de la hipótesis. Por tanto, $A = \{0\}$ y $R = 0$.

Supongamos ahora que $L \in [0,+\infty)$. Vamos a probar las implicaciones:

$$\rho L < 1 \Rightarrow \rho \in A \Rightarrow \rho L \leq 1 \quad (\rho \geq 0).$$

Supuesto probadas, si $L = 0$ cualquier $\rho \geq 0$ es tal que $\rho L < 1$; luego, $[0,+\infty) \subset A$, y $R = +\infty$. Y si $0 < L < +\infty$ entonces $[0,1/L) \subset A \subset [0,1/L]$, obligando a que $R = 1/L$ y completando la prueba.

Establezcamos, pues, la primera implicación. Sean $\rho \geq 0$ y $b_n = \sup\{\sqrt[n]{|c_k|} : k \geq n\}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Por definición de límite superior es $L = \lim_{n\to\infty} b_n$. Asumamos que $\rho L < 1$; entonces existe $N \in \mathbb{N}_0$ tal que $\rho b_N < 1$, de donde $\rho\sqrt[n]{|c_n|} < 1$, o bien $\rho^n|c_n| < 1$, siempre que $n \geq N$. Consecuentemente, la sucesión $\{c_n\rho^n\}_{n=0}^{\infty}$ está acotada, y $\rho \in A$.

Demostremos ahora la segunda implicación. Supongamos que $\rho \in A$ y, sin pérdida de generalidad, que $\rho > 0$. Entonces $\{c_n\rho^n\}_{n=0}^{\infty}$ está acotada, esto es, existe una constante $M > 1$ de modo que $|c_n|\rho^n \leq M$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Extrayendo raíces de orden $n$ encontramos que $\sqrt[n]{|c_n|} \leq \sqrt[n]{M}/\rho$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Fijemos $q \in \mathbb{N}_0$, arbitrario; la desigualdad anterior es cierta para cada $n \in \mathbb{N}_0$, en particular para todo $n \geq q$, con lo cual

$$b_q = \sup\{\sqrt[n]{|c_n|} : n \geq q\} \leq \frac{\sqrt[q]{M}}{\rho},$$

donde hemos usado que para $M > 1$ la sucesión $\{\sqrt[n]{M}\}_{n=0}^{\infty}$ es decreciente. Así pues, $\rho b_q \leq \sqrt[q]{M}$ $(q \in \mathbb{N}_0)$; sin más que tomar límites cuando $q \to \infty$ ya concluimos que $\rho L \leq 1$. □

**Ejemplo 5.17.** *La discusión que precede al Teorema 5.16 y la fórmula (11) muestran que el radio de convergencia de cualquier serie de potencias cuya sucesión de coeficientes venga dada por $c_{2n-1} = 1/2^n$, $c_{2n} = 1/3^n$ $(n \in \mathbb{N})$, es $R = \sqrt{2}$.*

**Observación 5.18.** *Recordemos el siguiente hecho conocido del cálculo elemental: para toda sucesión de números positivos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, se verifican las estimaciones*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

*Así pues, si existe*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

*las cuatro cantidades coinciden y*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

*Por consiguiente, cuando tiene sentido y existe el límite del cociente de un término al anterior de la sucesión de coeficientes de una serie de potencias, recuperamos el criterio del cociente (Teorema 5.14) a partir de la fórmula de Cauchy-Hadamard (11):*

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|}}.$$

**Ejemplo 5.19.** *Calcular el radio de convergencia de la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} [1 + (-1)^n]^n z^n.$$

*Resolución.* Se tiene que

$$1 + (-1)^n = \begin{cases} 2, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar;} \end{cases}$$

luego,

$$\limsup_{n\to\infty} [1 + (-1)^n] = 2.$$

De acuerdo con la fórmula de Cauchy-Hadamard (11), el radio de convergencia de la serie dada es:

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|1 + (-1)^n|^n}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} [1 + (-1)^n]} = \frac{1}{2}.$$

También se puede estudiar la convergencia de esta serie teniendo en cuenta que

$$\sum_{n=0}^{\infty} [1 + (-1)^n]^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n} z^{2n}.$$

Haciendo el cambio de variable $w = z^2$ obtenemos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^n w^n,$$

a la que aplicamos el criterio del cociente (Teorema 5.14), o el de la raíz (Teorema 5.15):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}}{4^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n} = 4,$$

resultando que el disco de convergencia de la serie transformada es $|w| < 1/4$. Deshaciendo el cambio de variable, concluimos nuevamente que el radio de convergencia de la serie original es $R = 1/2$. $\square$

Al derivar término a término una serie de potencias obtenemos otra serie de potencias con el mismo radio de convergencia que la de partida (Teorema 5.21). Para probar este resultado nos apoyaremos en el siguiente:

**Lema 5.20.** *Las series de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad y \qquad \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$$

*tienen igual radio de convergencia.*

*Demostración.* Las series $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$ y

$$(z-a)\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^n$$

convergen para los mismos $z \in \mathbb{C}$ y, por tanto, tienen igual radio de convergencia. La fórmula de Cauchy-Hadamard (11) garantiza que el radio de convergencia de esta última serie viene dado en función de

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\,|c_n|}.$$

Para probar el lema basta con justificar la igualdad

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\,|c_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

A tal fin, pongamos

$$b_n = \sup\{\sqrt[k]{|c_k|} : k \geq n\}, \qquad \beta_n = \sup\{\sqrt[k]{k\,|c_k|} : k \geq n\}.$$

Teniendo en cuenta que la sucesión $\{\sqrt[n]{n}\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente desde un término en adelante, resulta que

$$b_n \leq \beta_n \leq b_n \sqrt[n]{n} \quad (n \in \mathbb{N},\ n \text{ grande});$$

y puesto que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, concluimos que $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \lim_{n\to\infty} b_n$, como se pretendía.

Para las propiedades de la sucesión $\{\sqrt[n]{n}\}_{n=1}^{\infty}$ utilizadas en esta demostración, véase el Ejercicio 18. $\square$

**Teorema 5.21** (Derivación de una serie de potencias)**.** *Sean $a \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ una serie de potencias no trivial, $\Omega$ su dominio de convergencia, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ la función suma de la serie:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad (z \in \Omega).$$

*Entonces $f$ es indefinidamente derivable en $\Omega$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, su derivada $k$-ésima se obtiene derivando la serie término a término $k$ veces:*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(z-a)^{n-k} \quad (z \in \Omega).$$

*En particular, $f^{(k)}(a) = k!c_k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ ó, lo que es lo mismo,*

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

*Demostración.* No se pierde generalidad suponiendo que $a = 0$; de lo contrario, bastaría considerar la función

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (z \in \Omega)$$

que satisface $f(z) = g(z-a)$, de modo que $f$ es derivable si $g$ lo es y las derivadas de $f$ en $a$ son las derivadas de $g$ en cero.

Sea, pues, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ $(z \in \Omega)$. Fijado $b \in \Omega$, pongamos

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - f(b)}{z-b} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{z^n - b^n}{z-b} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(z) \quad (z \in \Omega \setminus \{b\}),$$

donde $p_n(z) = c_n \sum_{j=1}^{n} z^{n-j} b^{j-1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Para ver que $f$ es derivable en $b$, necesitamos demostrar que $\varphi$ tiene límite en este punto.

Ya que $\Omega$ es un abierto, algún $\delta > 0$ es tal que $\overline{D}(b,\delta) \subset \Omega$. Si $z \in \overline{D}(b,\delta)$, se cumple que $|z| \leq |b| + \delta$ y, en particular, $|b| \leq |b| + \delta$, con lo cual

$$|p_n(z)| \leq n\,|c_n|\,(|b|+\delta)^{n-1} \quad \left(z \in \overline{D}(b,\delta),\, n \in \mathbb{N}\right). \tag{12}$$

Pretendemos aplicar el criterio $M$ de Weierstrass (Teorema 5.8) a la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$; para ello, veamos que la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_n|\,(|b|+\delta)^{n-1} \tag{13}$$

es convergente. Por el Lema 5.20, $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n w^{n-1}$ tiene el mismo radio de convergencia que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$, y esta última serie converge en $\Omega$. El disco $\overline{D}(b,\delta)$ está contenido en $\Omega$ y en él hay puntos de módulo igual a $|b|+\delta$ (por ejemplo, $w_0 = b + \delta b/|b|$ si $b \neq 0$, y $w_0 = \delta$ si $b = 0$). Como las series de potencias convergen absolutamente en su dominio de convergencia, se infiere que (13) converge. Ahora, la estimación (12) y el criterio de Weierstrass entrañan la convergencia uniforme de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ en el disco $\overline{D}(b,\delta)$, asegurando que la función suma de dicha serie es continua en ese disco (Proposición 5.4). Luego, podemos escribir:

$$\lim_{z\to b}\varphi(z)=\lim_{z\to b}\sum_{n=1}^{\infty}p_n(z)=\sum_{n=1}^{\infty}p_n(b)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nb^{n-1}.$$

Hemos probado así que $f$ es derivable en $b$, con

$$f'(b)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nb^{n-1}.$$

Puesto que $b\in\Omega$ es arbitrario, se concluye que

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nz^{n-1}\qquad(z\in\Omega).$$

Procediendo por inducción se comprueba que $f$ tiene derivadas de todos los órdenes en $\Omega$, con

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)c_nz^{n-k}\qquad(z\in\Omega).$$

Haciendo aquí $z=0$ resulta finalmente

$$c_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\qquad(k\in\mathbb{N}_0),$$

lo que completa la demostración. □

**Ejemplo 5.22.** *Estudiar la convergencia de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}(z-i)^{n-1},\tag{14}$$

*y calcular su suma.*

*Resolución.* La serie (14) resulta de derivar término a término la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n}(z-i)^{n},\tag{15}$$

que es geométrica de razón $(z-i)/5$ y, por tanto, converge absolutamente si $|z-i|<5$. Se puede entonces asegurar lo mismo para la serie derivada, con lo que el disco de convergencia de (14) es $D(i,5)$. Para obtener la suma de (14) se puede utilizar de nuevo la serie (15): al ser una serie geométrica de razón $(z-i)/5$, se sabe que su suma coincide en $D(i,5)$ con la función

$$f(z)=\frac{1}{1-\dfrac{z-i}{5}}=\frac{5}{5+i-z},$$

de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}(z-i)^{n-1}=f'(z)=\frac{5}{(5+i-z)^2}\qquad(z\in D(i,5)).$$

□

**Definición 5.23.** *Sea $f$ una función indefinidamente derivable en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, y sea $a \in \Omega$. La serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

*se llama* serie de Taylor de $f$ en el punto $a$. *Una serie de Taylor en el punto $a = 0$ se denomina* serie de Maclaurin.

**Corolario 5.24.** *Las únicas series de potencias no triviales son series de Taylor (de su función suma).*

El resultado anterior conduce a la definición de función analítica.

**Definición 5.25.** *Sea $\Omega$ un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Se dice que una función compleja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es* analítica en *$\Omega$ cuando localmente admite una representación como la función suma de una serie de potencias; es decir, si para cada $b \in \Omega$ existen un disco abierto $D(b, \rho_b) \subset \Omega$ y una serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(b)}(z-b)^n, \tag{16}$$

*cuyo dominio de convergencia contiene a $D(b, \rho_b)$, tales que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(b)}(z-b)^n \quad (z \in D(b, \rho_b)).$$

En virtud del Teorema 5.21, una función analítica $f$ en un abierto $\Omega$ es indefinidamente derivable en $\Omega$ y todas sus derivadas son también analíticas. Además, los coeficientes de la serie (16) vienen dados por

$$c_n^{(b)} = \frac{f^{(n)}(b)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Equivalentemente, una función $f$ es analítica en un abierto $\Omega$ si es indefinidamente derivable en dicho abierto y para cada $b \in \Omega$, la serie de Taylor de $f$ en $b$ converge y su suma es igual a $f$ en algún disco abierto centrado en $b$ y contenido en $\Omega$.

**Corolario 5.26.** *Toda función analítica en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ es holomorfa en $\Omega$.*

Veremos en el próximo tema que el recíproco de este corolario también se cumple.

**Ejemplo 5.27.** *Obtener una serie de Maclaurin que coincida con la función*

$$f(z) = \frac{3}{1-2z}$$

*en algún disco del plano complejo, y estudiar su dominio de convergencia.*

*Resolución.* La función $f$ es el triple de la suma de los términos de una progresión geométrica de razón $2z$ y, por tanto,

$$f(z) = 3\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n = 3\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n.$$

Esta serie converge si $|2z| < 1$, es decir, si $|z| < 1/2$. Su dominio de convergencia es el disco $D(0, 1/2)$. □

**Ejemplo 5.28.** *Obtener una representación de la función*

$$f(z) = \frac{2z+1}{1-z}$$

*en serie de Maclaurin, y estudiar su dominio de convergencia.*

*Resolución.* De nuevo con el auxilio de la serie geométrica, encontramos que $f$ admite el desarrollo

$$f(z) = -2 + \frac{3}{1-z} = -2 + 3\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + 3\sum_{n=1}^{\infty} z^n,$$

cuyo dominio de convergencia es el disco unidad abierto. □

Concluimos esta sección con un resultado de gran utilidad para calcular la suma de una serie de potencias en puntos de la frontera de su disco de convergencia.

**Proposición 5.29** (Continuidad radial)**.** *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia* $0 < R < +\infty$. *Sea* $f : D(0,R) \to \mathbb{C}$ *la función suma de la serie, y supongamos que ésta es convergente en un punto* $z_0$ *de la frontera del disco* $D(0,R)$. *Entonces se verifica que*

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ 0<r<1}} f(rz_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n.$$

*Demostración.* La sucesión funcional $r \mapsto r^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ está uniformemente acotada en $[0,1]$, y para cada $r \in [0,1]$, la sucesión numérica $\{r^n\}_{n=0}^{\infty}$ es monótona decreciente. Además, la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ converge, por hipótesis. El criterio de Abel (Teorema 5.10) asegura entonces que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (rz_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n z_0^n$ converge uniformemente para $r \in [0,1]$. Por tanto, su suma es una función continua en dicho intervalo (Proposición 5.4) y, en particular, es continua en $r = 1$, es decir,

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ 0<r<1}} f(rz_0) = \lim_{\substack{r\to 1\\ 0<r<1}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (rz_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n,$$

como necesitábamos demostrar. □

# 6 Funciones complejas elementales

## 6.1 Exponencial compleja

**Definición 6.1.** *Se llama* exponencial compleja *a la función*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad (z \in \mathbb{C}).$$

El criterio del cociente permite probar que, en efecto, la serie anterior converge para todo $z \in \mathbb{C}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

**Proposición 6.2.** *Se tiene:*

$(i)$ $\exp'(z) = \exp(z)$ $(z \in \mathbb{C})$. *En particular, la exponencial compleja es una función entera.*

$(ii)$ $\exp(0) = 1$.

$(iii)$ *Para* $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x)$ *coincide con la exponencial real; esto es, la exponencial compleja extiende a la exponencial real, lo que justifica la notación* $\exp(z) = e^z$.

$(iv)$ *Las propiedades (i) y (ii) caracterizan a la función exponencial: si* $\varphi \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ *es tal que* $\varphi'(z) = \varphi(z)$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$ *y* $\varphi(0) = 1$, *entonces* $\varphi(z) = \exp(z)$ $(z \in \mathbb{C})$.

$(v)$ Fórmula de adición*:* $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ $(z, w \in \mathbb{C})$.

$(vi)$ $[\exp(z)]^{-1} = \exp(-z)$ $(z \in \mathbb{C})$.

$(vii)$ Fórmula de Euler*: si* $t \in \mathbb{R}$, *se cumple que* $\exp(it) = \cos t + i \operatorname{sen} t = e^{it}$. *En particular,*

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

$(viii)$ *Si* $z = \Re z + i\Im z \in \mathbb{C}$, *entonces*

$$\exp(z) = e^{\Re z}(\cos \Im z + i \operatorname{sen} \Im z).$$

*Por tanto,*

$$|\exp(z)| = e^{\Re z}, \quad \Im z \in \arg[\exp(z)] \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

$(ix)$ *La exponencial compleja carece de ceros.*

$(x)$ *La exponencial compleja es una función periódica de periodo* $2\pi i$*: para* $z, w \in \mathbb{C}$, *se tiene que* $\exp(z) = \exp(w)$ *si, y sólo si,* $z - w \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

$(xi)$ *La exponencial compleja es una función analítica en todo el plano.*

*Demostración.*

$(i)$ Puesto que la exponencial está definida como una serie de potencias convergente, para derivar la función basta con derivar la serie término a término (Teorema 5.21):

$$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \exp(z) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

$(ii)$ Haciendo $z = 0$ en la serie que define a la exponencial se anulan todos los términos menos el primero, que vale 1.

$(iii)$ Recuérdese que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$(iv)$ Fijado $a \in \mathbb{C}$, pongamos $h(z) = \varphi(a-z)\exp(z)$ $(z \in \mathbb{C})$. Entonces

$$\begin{aligned} h'(z) &= -\varphi'(a-z)\exp(z) + \varphi(a-z)\exp'(z) \\ &= -\varphi(a-z)\exp(z) + \varphi(a-z)\exp(z) = 0 \quad (z \in \mathbb{C}), \end{aligned}$$

así que $h$ es constante en $\mathbb{C}$ (Proposición 4.25). Se sigue que $h(0) = h(a)$, esto es, que $\varphi(a) = \exp(a)$. La arbitrariedad de $a \in \mathbb{C}$ completa la prueba.

$(v)$ Sea $a \in \mathbb{C}$, y pongamos $h(z) = \exp(a-z)\exp(z)$ $(z \in \mathbb{C})$. Como $h'(z) = 0$ $(z \in \mathbb{C})$, $h$ es constante, y $h(0) = h(z)$ $(z \in \mathbb{C})$; esto es, $\exp(a) = \exp(a-z)\exp(z)$ $(z \in \mathbb{C})$. Ahora, dados $z, w \in \mathbb{C}$, sin más que sustituir $a = z + w$ se obtiene que $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$.

$(vi)$ Por la fórmula de adición,

$$\exp(z)\exp(-z) = \exp(0) = 1.$$

$(vii)$ De la definición de la exponencial compleja se desprende que

$$\begin{aligned} \exp(it) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(it)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(it)^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k!}(it)^k \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[ \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k} + i \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1} \right] \\ &= \cos t + i \operatorname{sen} t = e^{it} \quad (t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

$(viii)$ Se tiene:

$$\exp(z) = \exp(\Re z + i\Im z) = e^{\Re z} \exp(i\Im z) = e^{\Re z}(\cos \Im z + i \operatorname{sen} \Im z) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

$(ix)$ En efecto: $|\exp(z)| = e^{\Re z} > 0$ $(z \in \mathbb{C})$.

$(x)$ Se verifica:

$$\begin{aligned} \exp(z + 2k\pi i) &= e^{\Re(z+2k\pi i)}[\cos \Im(z + 2k\pi i) + i \operatorname{sen} \Im(z + 2k\pi i)] \\ &= e^{\Re z}[\cos(\Im z + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(\Im z + 2k\pi)] \\ &= e^{\Re z}(\cos \Im z + i \operatorname{sen} \Im z) = \exp(z) \quad (z \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Recíprocamente, si $z, w \in \mathbb{C}$ y $\exp(z) = \exp(w)$ entonces, por la fórmula de adición,

$$e^{\Re(z-w)} e^{i\Im(z-w)} = \exp(z-w) = 1,$$

así que $\Re z - \Re w = \Re(z-w) = 0$ e $\Im z - \Im w = \Im(z-w) = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. En consecuencia:

$$z = \Re z + i\Im z = \Re w + i(\Im w + 2k\pi) = w + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$(xi)$ Dados $z, a \in \mathbb{C}$, la fórmula de adición implica que $\exp(z) = \exp(a)\exp(z-a)$; luego,

$$\exp(z) = \exp(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!}(z-a)^n \quad (z, a \in \mathbb{C}).$$

□

## 6.2 Logaritmo complejo

Fijado $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, buscamos soluciones de la ecuación $e^w = z$ en $\mathbb{C}$. Como

$$e^w = e^{\Re w} (\cos \Im w + i \operatorname{sen} \Im w),$$

para que $e^w = z$ es necesario y suficiente, por un lado, que $e^{\Re w} = |z|$, o bien $\Re w = \ln|z|$; y, por otro, que $\Im w \in \arg z$, y esto se cumple si, y sólo si, $\Im w = \operatorname{Arg} z + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

**Definición 6.3.** *Para* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*, se define* el logaritmo de $z$ *como el conjunto*

$$\begin{aligned} \log z &= \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\} \\ &= \ln|z| + i \arg z \\ &= \{\ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

*Cualquiera de los elementos de este conjunto se llama* un logaritmo de $z$*. El* logaritmo principal de $z$*,* $\operatorname{Log} z$*, es el obtenido haciendo* $k = 0$*:*

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

Nótese que todos los logaritmos de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ son de la forma $\operatorname{Log} z + 2k\pi i$ $(k \in \mathbb{Z})$. Además, para $z \in (0, +\infty)$ el logaritmo principal de $z$, $\operatorname{Log} z$, y el logaritmo natural de $z$, $\ln z$, coinciden.

**Ejemplo 6.4.** *Resolver la ecuación* $e^w = 1 + i$*.*

*Resolución.* De acuerdo con la discusión precedente, la solución viene dada por

$$\begin{aligned} w = \log(1+i) &= \{\ln|1+i| + i[\operatorname{Arg}(1+i) + 2k\pi] : k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \left\{\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) : k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\frac{\ln 2}{2} + i\frac{(8k+1)\pi}{4} : k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 6.5.** *Calcular* $\log(-2)$ *y* $\operatorname{Log}(-2)$*.*

*Resolución.* Se tiene:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Log}(-2) = \ln|-2| + i\operatorname{Arg}(-2) = \ln 2 + i\pi, \\ &\log(-2) = \{\operatorname{Log}(-2) + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\} = \{\ln 2 + i(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

□

### 6.2.1 Propiedades algebraicas y analíticas

**Proposición 6.6.** *Dados $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, se cumple:*

$(i)$ $\log(zw) = \log z + \log w$;

$(ii)$ $\log(z/w) = \log z - \log w$.

*Demostración.*

$(i)$ En virtud de la Definición 6.3,

$$\begin{aligned}\log(zw) &= \ln|zw| + i\arg(zw) = \ln|z| + \ln|w| + i(\arg z + \arg w) \\ &= (\ln|z| + i\arg z) + (\ln|w| + i\arg w) = \log z + \log w.\end{aligned}$$

$(ii)$ Es completamente análoga a la anterior; se usa ahora la propiedad de que $\arg(z/w) = \arg z - \arg w$.

□

Las igualdades de la Proposición 6.6, válidas en sentido conjuntista, no tienen por qué verificarse para un logaritmo particular, como muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 6.7.** *Sean $z = -1 + i\sqrt{3}$, $w = -\sqrt{3} + i$. Probar que* $\operatorname{Log}(zw) \neq \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w$.

*Resolución.* En efecto:

$$\begin{aligned}&\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log}\left[(-1+i\sqrt{3})(-\sqrt{3}+i)\right] = \operatorname{Log}(-4i) = \ln 4 - i\frac{\pi}{2} = 2\ln 2 - i\frac{\pi}{2}, \\ &\operatorname{Log} z = \operatorname{Log}(-1+i\sqrt{3}) = \ln 2 + i\frac{2\pi}{3}, \qquad \operatorname{Log} w = \operatorname{Log}(-\sqrt{3}+i) = \ln 2 + i\frac{5\pi}{6}, \\ &\operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w = \left(\ln 2 + i\frac{2\pi}{3}\right) + \left(\ln 2 + i\frac{5\pi}{6}\right) = 2\ln 2 + i\frac{3\pi}{2}, \\ &\operatorname{Log}(zw) = 2\ln 2 - i\frac{\pi}{2} \neq 2\ln 2 + i\frac{3\pi}{2} = \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w.\end{aligned}$$

□

**Definición 6.8.** *Sea $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Cualquier función $g : A \to \mathbb{C}$ tal que $g(z) \in \log f(z)$ para todo $z \in A$ se llama* un logaritmo de $f$ en $A$. *Cuando $f$ es la identidad, se dice simplemente que $g$ es* un logaritmo en $A$.

**Proposición 6.9.** *Sean $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a \in A \cap A'$, y $g : A \to \mathbb{C}$ un logaritmo de $f$ en $A$. Supongamos además que $f$ es derivable en $a$, y que $g$ es continua en $a$. Entonces $g$ es derivable en $a$, y*

$$g'(a) = \frac{f'(a)}{f(a)}.$$

*Consecuentemente, si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto, $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, $0 \notin f(\Omega)$, y $g : \Omega \to \mathbb{C}$ es continua en $\Omega$ y tal que $e^{g(z)} = f(z)$ $(z \in \Omega)$, entonces $g \in \mathscr{H}(\Omega)$, con*

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} \quad (z \in \Omega).$$

*Demostración.* Llamemos $b = g(a)$, y consideremos la aplicación

$$\varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{e^z - e^b}{z-b}, & z \neq b \\ e^b, & z = b. \end{cases}$$

Claramente, $\varphi$ es continua en $b$. Además,

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \frac{e^{g(z)} - e^{g(a)}}{z-a} = \varphi[g(z)]\,\frac{g(z)-g(a)}{z-a} \quad (z \in A \setminus \{a\}).$$

Puesto que, por hipótesis, $g$ es continua en $a$, y $\varphi$ es continua en $b = g(a)$, resulta que $\varphi[g(z)]$ es continua en $a$ y $\varphi[g(a)] = e^b \neq 0$. Por continuidad, existe $\delta > 0$ de forma que $\varphi[g(z)] \neq 0$ para todo $z \in D(a,\delta) \cap A$. Despejando de la expresión anterior encontramos que

$$\frac{g(z)-g(a)}{z-a} = \frac{1}{\varphi[g(z)]}\,\frac{f(z)-f(a)}{z-a} \quad (z \in D(a,\delta) \cap A \setminus \{a\}).$$

Como $\lim_{z\to a} \varphi[g(z)] = e^b = f(a)$, obtenemos finalmente:

$$g'(a) = \lim_{z\to a} \frac{g(z)-g(a)}{z-a} = \frac{f'(a)}{f(a)}.$$

□

**Corolario 6.10.** *El logaritmo principal* $\operatorname{Log} z$ *es una función holomorfa en* $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$*, y su derivada viene dada por* $\operatorname{Log}'(z) = 1/z$ *para todo* $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

*Demostración.* Basta aplicar la Proposición 6.9 a las funciones $f(z) = z$, $g(z) = \operatorname{Log} z$. Puesto que el logaritmo principal es continuo en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ y $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$, el logaritmo principal es holomorfo en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, y su derivada viene dada por

$$\operatorname{Log}'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]).$$

□

**Ejemplo 6.11.** *Encontrar las derivadas de las siguientes funciones en un dominio adecuado:*

$(i)$ $z \operatorname{Log} z$;

$(ii)$ $\operatorname{Log}(z+1)$.

*Resolución.*

$(i)$ Podemos aplicar la regla para derivación de un producto (Proposición 4.6(iii)) en el dominio donde $z$ y $\operatorname{Log} z$ son ambas holomorfas, esto es, en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Así pues,

$$(z \operatorname{Log} z)' = (z') \cdot \operatorname{Log} z + z \cdot (\operatorname{Log} z)' = 1 \cdot \operatorname{Log} z + z \cdot \frac{1}{z} = 1 + \operatorname{Log} z \quad (z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]).$$

$(ii)$ Ahora, $\operatorname{Log}(z+1)$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus(-\infty,-1]$. Por tanto,

$$[\operatorname{Log}(z+1)]' = \frac{(z+1)'}{z+1} = \frac{1}{z+1} \quad (z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,-1]).$$

□

### 6.2.2 Ramas del logaritmo

En la terminología de la sección 3.4, la rama principal del logaritmo complejo es la función

$$f_0(z) = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z \quad (|z|>0,\ -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi).$$

Su salto de rama es el semieje real negativo $(-\infty,0]$, y el punto $z=0$ es un punto de ramificación. Hemos probado que $f_0$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$, y su derivada en este dominio viene dada por $f_0'(z) = 1/z$.

Se obtienen otras ramas del logaritmo complejo tomando otros argumentos distintos del principal, en intervalos abiertos de amplitud $2\pi$; por ejemplo,

$$f_1(z) = \ln|z| + i\theta \quad \left(|z|>0,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\right)$$

es otra rama diferente de la anterior, con salto en el semieje imaginario negativo $i(-\infty,0]$. Cualquier rama

$$f_k(z) = \ln|z| + i\theta \quad (|z|>0,\ \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi)$$

de $\log z$ es holomorfa en su dominio, con derivada

$$f_k'(z) = \frac{1}{z} \quad (|z|>0,\ \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi).$$

## 6.3 Potencias complejas

Dados $a>0$ y $b\in\mathbb{R}$, la potencia de base $a$ y exponente $b$ se define como $a^b = e^{b\ln a}$. Ahora, si $a,b\in\mathbb{C}$ con $a\neq 0$, sabemos que hay infinitos logaritmos de $a$, a saber, $\operatorname{Log} a + 2k\pi i$ $(k\in\mathbb{Z})$.

**Definición 6.12.** *Sean $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ y $b\in\mathbb{C}$. Cualquier número complejo de la forma $e^{b(\operatorname{Log} a + 2k\pi i)} = e^{b[\ln|a| + i(\operatorname{Arg} a + 2k\pi)]}$ $(k\in\mathbb{Z})$ se denomina* una potencia de base $a$ y exponente $b$*; representaremos por*

$$[a^b] = e^{b\log a} = \{e^{bw} : w \in \log a\}$$

*el conjunto de todas ellas. La potencia correspondiente a $k=0$ se denominará* valor principal de la potencia de base $a$ y exponente $b$*, y se representará $a^b = e^{b\operatorname{Log} a}$.*

En el caso particular de que $b = n\in\mathbb{Z}$, encontramos que

$$\begin{aligned}
[a^n] &= \left\{e^{n[\ln|a| + i(\operatorname{Arg} a + 2k\pi)]} : k\in\mathbb{Z}\right\} = \left\{e^{\ln|a|^n} e^{in(\operatorname{Arg} a + 2k\pi)} : k\in\mathbb{Z}\right\} \\
&= \left\{|a|^n e^{in\operatorname{Arg} a} e^{i2kn\pi} : k\in\mathbb{Z}\right\} = \left\{|a|^n e^{in\operatorname{Arg} a}\right\} = \{a^n\}.
\end{aligned}$$

Es decir, $[a^n]$ es univaluada, y este valor coincide con su valor principal y con nuestra definición original de $a^n$.

En el caso particular de que $b = 1/n$ ($n \in \mathbb{N}$), se tiene:

$$\begin{aligned}
[a^{1/n}] &= \left\{ e^{[\ln|a|+i(\operatorname{Arg} a+2k\pi)]/n} : k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ e^{\ln|a|^{1/n}} e^{i(\operatorname{Arg} a+2k\pi)/n} : k \in \mathbb{Z} \right\} \\
&= \left\{ e^{\ln|a|^{1/n}} e^{i(\operatorname{Arg} a+2k\pi)/n} : k = 0,1,\ldots,n-1 \right\} \\
&= \left\{ \sqrt[n]{|a|} \left( \cos \frac{\operatorname{Arg} a+2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\operatorname{Arg} a+2k\pi}{n} \right) : k = 0,1,\ldots,n-1 \right\}.
\end{aligned}$$

Es decir, $[a^{1/n}]$ es el conjunto de todas las raíces $n$-ésimas de $a$. Además,

$$a^{1/n} = e^{(\operatorname{Log} a)/n} = e^{\ln|a|^{1/n}+i(\operatorname{Arg} a)/n} = \sqrt[n]{|a|} \left( \cos \frac{\operatorname{Arg} a}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\operatorname{Arg} a}{n} \right)$$

es el valor principal de la raíz $n$-ésima de $a$, consistentemente con nuestra definición previa de este valor.

**Ejemplo 6.13.** *Calcular las siguientes potencias y especificar su valor principal:*

$(i)$ $[(1+i)^i]$;

$(ii)$ $[(2i)^{1-i}]$.

*Resolución.*

$(i)$ Se tiene:

$$\begin{aligned}
[(1+i)^i] &= \left\{ e^{i(\ln|1+i|+i[\operatorname{Arg}(1+i)+2k\pi])} : k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ e^{i\ln|1+i|-[\operatorname{Arg}(1+i)+2k\pi]} : k \in \mathbb{Z} \right\} \\
&= \left\{ e^{-\pi/4+2k\pi} e^{i\ln\sqrt{2}} : k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ e^{(8k-1)\pi/4} e^{i(\ln 2)/2} : k \in \mathbb{Z} \right\}.
\end{aligned}$$

El valor principal de $[(1+i)^i]$ es $(1+i)^i = e^{-\pi/4+i(\ln 2)/2}$.

$(ii)$ Ahora:

$$[(2i)^{1-i}] = \left\{ e^{(1-i)(\ln|2i|+i[\operatorname{Arg} 2i+2k\pi])} : k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ ie^{(\ln 2+\pi/2+2k\pi)} e^{-i\ln 2} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

El valor principal de $[(2i)^{1-i}]$ es $(2i)^{1-i} = ie^{(\ln 2+\pi/2)-i\ln 2}$.

□

La definición precedente da lugar a las siguientes:

**Definición 6.14.** *Sean $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ y $b \in \mathbb{C}$. La* función exponencial compleja de base *$a$ es la función univaluada dada por*

$$\exp_a(z) = a^z = e^{z\operatorname{Log} a} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

*La* función potencia compleja de exponente *$b$ es la función multivaluada dada por*

$$[z^b] = e^{b\log z} \quad (z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}).$$

*El* valor principal *$z^b$ de $[z^b]$ se obtiene tomando el valor principal del logaritmo en su definición.*

### 6.3.1 Propiedades algebraicas y analíticas

**Proposición 6.15.** *Para $z, w, a, b \in \mathbb{C}$, con $z, w \neq 0$, y $n \in \mathbb{Z}$, se verifica:*

($i$) $[(zw)^a] = [z^a][w^a]$;

($ii$) $z^{a+b} = z^a z^b$;

($iii$) $z^{a-b} = z^a / z^b$;

($iv$) $(z^b)^n = z^{nb}$.

*Demostración.*

($i$) En efecto, en virtud de la Proposición 6.6(i) y de la fórmula de adición para la exponencial (Proposición 6.2(v)), podemos operar con conjuntos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}[(zw)^a] &= e^{a\log(zw)} = e^{a(\log z + \log w)} \\ &= e^{a\log z + a\log w} = e^{a\log z} e^{a\log w} = [z^a]\,[w^a].\end{aligned}$$

($ii$) Usando de nuevo la fórmula de adición para la exponencial:

$$z^{a+b} = e^{(a+b)\operatorname{Log} z} = e^{a\operatorname{Log} z + b\operatorname{Log} z} = e^{a\operatorname{Log} z} e^{b\operatorname{Log} z} = z^a z^b.$$

($iii$) Basta advertir que

$$z^{-b} = e^{-b\operatorname{Log} z} = (e^{b\operatorname{Log} z})^{-1} = (z^b)^{-1}$$

(Proposición 6.2(vi)), y aplicar (ii):

$$z^{a-b} = z^a z^{-b} = z^a (z^b)^{-1} = \frac{z^a}{z^b}.$$

($iv$) Para $n \in \mathbb{N}$ la igualdad sigue de (ii), por inducción finita. Si $n = 0$, es trivial:

$$(z^b)^0 = 1 = z^{0 \cdot b}.$$

Tomando $a = 0$ en (iii) se deduce que

$$(z^b)^{-1} = z^{-b}.$$

Finalmente, combinando esta igualdad con (ii) concluimos:

$$(z^b)^{-n} = (z^b)^{-1} \overset{(n)}{\cdots} (z^b)^{-1} = z^{-b} \overset{(n)}{\cdots} z^{-b} = z^{-nb} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

□

En general, las propiedades de la Proposición 6.15 no se sostienen si reemplazamos los valores principales por las funciones multivaluadas correspondientes; es más, algunas propiedades de las potencias reales no se trasladan siquiera a los valores principales de las potencias complejas. El Ejemplo 6.16 y el Ejercicio 26 son ilustrativos a este respecto.

**Ejemplo 6.16.** *Probar, mediante contraejemplos, que las igualdades*

$(i)$ $(zw)^a = z^a w^a$;

$(ii)$ $[z^{a+b}] = [z^a]\,[z^b]$,

*no son, en general, ciertas.*

*Resolución.*

$(i)$ Pongamos $z = w = -1$, $a = 1/2$. Se tiene

$$(zw)^a = 1^{1/2} = 1$$

pero

$$z^a = w^a = (-1)^{1/2} = i,$$

así que

$$(zw)^a = 1 \neq -1 = z^a w^a.$$

$(ii)$ Pongamos $z = -1$, $a = 1/2 = -b$. Ahora

$$[z^{a+b}] = [(-1)^0] = \{1\}$$

pero

$$[z^a] = [(-1)^{1/2}] = \{i, -i\}, \quad [z^b] = [(-1)^{-1/2}] = \{i, -i\},$$

así que

$$[z^a]\,[z^b] = \{1, -1\}.$$

Consecuentemente,

$$[z^{a+b}] = \{1\} \neq \{1, -1\} = [z^a]\,[z^b].$$

□

**Proposición 6.17.** *Sean $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $b \in \mathbb{C}$.*

$(i)$ *El valor principal, $a^z$, de la función exponencial compleja de base $a$ es una función entera, con derivada*

$$(a^z)' = a^z \operatorname{Log} a \quad (z \in \mathbb{C}).$$

$(ii)$ *El valor principal, $z^b$, de la función potencia compleja de exponente $b$ es holomorfo donde lo es el valor principal del logaritmo, es decir, en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, y su derivada vale*

$$(z^b)' = bz^{b-1} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])\,.$$

*Por tanto, la regla de derivación de potencias (cf. Ejemplo 4.8) se cumple para el valor principal de una potencia compleja en el dominio especificado.*

*Demostración.* Aplicando la regla de la cadena (Proposición 4.7), obtenemos que

$$(a^z)' = (e^{z\operatorname{Log} a})' = (z\operatorname{Log} a)'\, e^{z\operatorname{Log} a} = (\operatorname{Log} a)\, e^{z\operatorname{Log} a} = a^z \operatorname{Log} a \quad (z \in \mathbb{C})$$

y

$$(z^b)' = (e^{b\operatorname{Log} z})' = (b\operatorname{Log} z)'\, e^{b\operatorname{Log} z} = \frac{b}{z}\, e^{b\operatorname{Log} z} = \frac{bz^b}{z} = bz^{b-1} \quad (z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]).$$

□

**Ejemplo 6.18.** *Encontrar la derivada de $z^i$ en el punto $z = 1+i$.*

*Resolución.* Ya que $z = 1+i \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$, se tiene

$$(z^i)' = iz^{i-1};$$

así,

$$(z^i)'\big|_{z=1+i} = i\, z^{i-1}\big|_{z=1+i} = i(1+i)^{i-1},$$

expresión que puede ser reescrita como

$$i(1+i)^{i-1} = i(1+i)^i \frac{1}{1+i} = \frac{1+i}{2}(1+i)^i$$

(Proposición 6.15(iii)). Por otra parte, $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, y

$$(1+i)^i = e^{-\pi/4+i(\ln 2)/2}$$

(Ejemplo 6.13). Se concluye que

$$(z^i)'\big|_{z=1+i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{i\pi/4}\, e^{-\pi/4+i(\ln 2)/2} = \frac{1}{\sqrt{2}e^{\pi/4}} e^{i[\pi/4+(\ln 2)/2]}.$$

□

### 6.3.2 Ramas de la función potencial

Dado $b \in \mathbb{C}$, la rama principal de la función potencial $[z^b]$ es

$$f_0(z) = e^{b(\ln|z|+i\operatorname{Arg} z)} \quad (|z|>0,\ -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi). \tag{17}$$

Su salto de rama es el semieje real negativo $(-\infty,0]$, y $z=0$ es un punto de ramificación.

Se pueden definir otras ramas de $[z^b]$ mediante la fórmula (17), tomando argumentos de $z$ en diferentes intervalos abiertos de amplitud $2\pi$. Por ejemplo,

$$f_1(z) = e^{b(\ln|z|+i\theta)} \quad (|z| > 0,\ -\pi/4 < \theta < 7\pi/4)$$

representa otra rama de $[z^b]$, cuyo salto de rama es el rayo $\operatorname{Arg} z = -\pi/4$ junto con el punto de ramificación $z = 0$. Cualquier rama

$$f_k(z) = e^{b(\ln|z|+i\theta)} \quad (|z| > 0,\ \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi)$$

de $[z^b]$ es holomorfa en su dominio, con derivada

$$f_k'(z) = bz^{b-1} \quad (|z| > 0,\ \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi).$$

## 6.4 Funciones trigonométricas complejas

### 6.4.1 Seno y coseno complejos

Sea $t \in \mathbb{R}$. En la fórmula de Euler

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$$

reemplazamos $t$ por $-t$, obteniendo

$$e^{-it} = \cos t - i \operatorname{sen} t.$$

Por tanto,

$$e^{it} + e^{-it} = 2\cos t$$

implica

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad (t \in \mathbb{R}), \tag{18}$$

mientras que

$$e^{it} - e^{-it} = 2i \operatorname{sen} t$$

implica

$$\operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{19}$$

Las dos ecuaciones anteriores se denominan *ecuaciones de Euler*. Como tienen sentido para argumentos complejos, definimos las funciones coseno y seno complejos, respectivamente, por:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

**Proposición 6.19.** *Las funciones seno y coseno complejas tienen las siguientes propiedades:*

$(i)$ *Extienden al seno y coseno reales.*

$(ii)$ *Satisfacen la* identidad trigonométrica fundamental*:* $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$ $(z \in \mathbb{C})$.

$(iii)$ *Cumplen que* $\cos(-z) = \cos z$ *y* $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$ $(z \in \mathbb{C})$.

($iv$) *Verifican las siguientes* fórmulas de adición*:*

$$\cos(z \pm w) = \cos z\, \cos w \mp \operatorname{sen} z\, \operatorname{sen} w \quad (z, w \in \mathbb{C}),$$
$$\operatorname{sen}(z \pm w) = \operatorname{sen} z\, \cos w \pm \cos z\, \operatorname{sen} w \quad (z, w \in \mathbb{C}).$$

($v$) *Son enteras y analíticas en $\mathbb{C}$, con:*

$$\cos' z = -\operatorname{sen} z, \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad (z \in \mathbb{C}),$$
$$\operatorname{sen}' z = \cos z, \qquad \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

($vi$) *Guardan la siguiente relación con las funciones hiperbólicas reales:*

$$\cos ix = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{sen} ix = \frac{e^{-x} - e^x}{2i} = i \operatorname{sh} x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

($vii$) *Para todo $z = x + iy$,*

$$\cos z = \cos x\, \operatorname{ch} y - i \operatorname{sen} x\, \operatorname{sh} y;$$
$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x\, \operatorname{ch} y + i \cos x\, \operatorname{sh} y.$$

($viii$) *No están acotadas en $\mathbb{C}$, aunque sí lo están en bandas horizontales de anchura acotada.*

($ix$) *No tienen más ceros que los reales:*

$$\cos z = 0 \quad \textit{si, y sólo si,} \quad z = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$
$$\operatorname{sen} z = 0 \quad \textit{si, y sólo si,} \quad z = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

*Demostración.* Las propiedades (i) a (vi) se comprueban mediante cálculo directo, haciendo uso de las propiedades de la exponencial.

($vii$) Por (iv) y (vi), fijado $z = x + iy$ podemos escribir:

$$\cos z = \cos x \cos iy - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} iy = \cos x\, \operatorname{ch} y - i \operatorname{sen} x\, \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cos iy + \cos x \operatorname{sen} iy = \operatorname{sen} x\, \operatorname{ch} y + i \cos x\, \operatorname{sh} y.$$

($viii$) Ya que $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$, se tiene:

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x\, \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sen}^2 x\, \operatorname{sh}^2 y = \cos^2 x\,(1 + \operatorname{sh}^2 y) + \operatorname{sen}^2 x\, \operatorname{sh}^2 y = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y. \tag{20}$$

Análogamente:

$$|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x\, \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x\, \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{sen}^2 x\,(1 + \operatorname{sh}^2 y) + \cos^2 x\, \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sh}^2 y. \tag{21}$$

Como $\operatorname{sh}^2 y$ no está acotado, se sigue que el seno y coseno complejos tampoco lo están. Ahora bien, si nos restringimos a bandas complejas de anchura acotada, esto es, si acotamos la variable $y$, entonces $\operatorname{sh} y$ está acotado, y lo mismo ocurrirá con $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$.

$(ix)$ Sea $z = x + iy$. Atendiendo a (20), $|\cos z|^2 = 0$ si, y sólo si, $\cos x = 0$ y $\operatorname{sh} y = 0$. Pero esto último ocurre si, y sólo si, $y = 0$. Por tanto, los ceros de $\cos z$ son reales y coinciden con los de $\cos x$: $z = x = \pi/2 + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. El razonamiento para $\operatorname{sen} z$ es análogo a partir de (21).

□

### 6.4.2 Tangente compleja

Por analogía con la tangente real, definimos

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}).$$

Puesto que $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ son funciones enteras, la tangente compleja $\operatorname{tg} z$ es holomorfa en su dominio de definición, $\{z \in \mathbb{C} : \cos z \neq 0\} = \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Otras propiedades de la tangente también se deducen sin dificultad de las propiedades del seno y el coseno; a modo de ejemplo, probaremos la *fórmula de adición*.

**Proposición 6.20.** *Sean $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, con $z \pm w \in \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Se verifica:*

$$\operatorname{tg}(z \pm w) = \frac{\operatorname{tg} z \pm \operatorname{tg} w}{1 \mp \operatorname{tg} z \operatorname{tg} w}.$$

*Demostración.* En efecto, la Proposición 6.19(iv) permite escribir:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(z \pm w) &= \frac{\operatorname{sen}(z \pm w)}{\cos(z \pm w)} = \frac{\operatorname{sen} z \cos w \pm \operatorname{sen} w \cos z}{\cos z \cos w \mp \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} z \cos w \pm \operatorname{sen} w \cos z}{\cos z \cos w}}{\dfrac{\cos z \cos w \mp \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w}{\cos z \cos w}} \\
&= \frac{\dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \pm \dfrac{\operatorname{sen} w}{\cos w}}{1 \mp \dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \dfrac{\operatorname{sen} w}{\cos w}} = \frac{\operatorname{tg} z \pm \operatorname{tg} w}{1 \mp \operatorname{tg} z \operatorname{tg} w}.
\end{aligned}$$

□

## 7 Ejercicios resueltos

1. Expresar en términos de $z = x + iy$:

$$f(x,y) = 2x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

*Resolución.* Sustituyendo

$$x = \Re z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \Im z = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad x^2 + y^2 = |z|^2 = z\bar{z}$$

obtenemos

$$f(x,y) = f(\Re z, \Im z) = 2\,\frac{z+\bar{z}}{2} + i\,\frac{z-\bar{z}}{2i} + \frac{\bar{z}}{z\bar{z}},$$

y, de aquí,

$$f(z) = (z+\bar{z}) + \left(\frac{z}{2} - \frac{\bar{z}}{2}\right) + \frac{1}{z} = \frac{3z}{2} + \frac{\bar{z}}{2} + \frac{1}{z} = \frac{3z+\bar{z}}{2} + \frac{1}{z} = \frac{3z^2+|z|^2+2}{2z}.$$

$\square$

2. Usando la definición, probar que para todo $a \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\lim_{z\to a} |z| = |a|.$$

*Resolución.* Dado $\varepsilon > 0$, debemos encontrar $\delta > 0$ tal que $0 < |z-a| < \delta$ implique $||z|-|a|| < \varepsilon$. Ahora bien, como

$$||z|-|a|| \leq |z-a|,$$

basta tomar $\delta = \varepsilon$. $\square$

3. Usando la definición, probar que

$$\lim_{z\to i}(z^2+2z) = 2i-1.$$

*Resolución.* Dado $\varepsilon > 0$, debemos encontrar $\delta > 0$ tal que $0 < |z-i| < \delta$ implique $|(z^2+2z)-(2i-1)| < \varepsilon$. A tal fin, estimamos

$$\begin{aligned} |(z^2+2z)-(2i-1)| &= |z^2+2z-2i+1| = |z^2+1+2(z-i)| \\ &= |z^2-i^2+2(z-i)| = |(z-i)(z+i)+2(z-i)| \\ &= |z-i|\,|z+i+2|, \end{aligned}$$

con

$$|z+i+2| = |(z-i)+2(1+i)| \leq |z-i| + 2|1+i| = |z-i| + 2\sqrt{2}.$$

Por tanto, asumiendo $0 < |z-i| < \delta < 1$ encontramos que

$$\begin{aligned} |(z^2+2z)-(2i-1)| &\leq |z-i|(|z-i|+2\sqrt{2}) \\ &= |z-i|^2 + 2\sqrt{2}|z-i| \\ &< \delta^2 + 2\sqrt{2}\delta \qquad (22) \\ &< \delta(1+2\sqrt{2}) < \varepsilon, \qquad (23) \end{aligned}$$

siempre que $\delta < \varepsilon/(1+2\sqrt{2})$ (en el paso de (22) a (23) hemos usado que $\delta < 1$ entraña $\delta^2 < \delta$).

Alternativamente, llegados a (22) podríamos resolver la ecuación cuadrática $\delta^2 + 2\sqrt{2}\delta = \varepsilon$:

$$\delta^2 + 2\sqrt{2}\delta - \varepsilon = 0,$$

$$\delta = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{8+4\varepsilon}}{2} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{2+\varepsilon},$$

y tomar la determinación positiva de la raíz: $\delta = \sqrt{2+\varepsilon} - \sqrt{2} > 0$. □

4. Calcular:

   $(i)$ $\lim_{z\to i} \dfrac{(3+i)z^4 - z^2 + 2z}{z+1}$;

   $(ii)$ $\lim_{z\to 1+i\sqrt{3}} \dfrac{z^2 - 2z + 4}{z - 1 - i\sqrt{3}}$.

   *Resolución.* Atendiendo a la Observación 3.9, se tiene:

   $(i)$ $\lim_{z\to i} z^2 = i^2 = -1$,
   $\lim_{z\to i} z^4 = i^4 = 1$,
   $\lim_{z\to i}[(3+i)z^4 - z^2 + 2z] = 3 + i + 1 + 2i = 4 + 3i$,
   $\lim_{z\to i}(z+1) = 1 + i \neq 0$.
   Por tanto:
   $$\lim_{z\to i} \frac{(3+i)z^4 - z^2 + 2z}{z+1} = \frac{4+3i}{1+i} = \frac{(4+3i)(1-i)}{2} = \frac{7-i}{2}.$$

   $(ii)$ Procediendo como en el apartado anterior:
   $\lim_{z\to 1+i\sqrt{3}} z^2 = (1+i\sqrt{3})^2 = -2 + i2\sqrt{3}$,
   $\lim_{z\to 1+i\sqrt{3}}(z^2 - 2z + 4) = 0$,
   $\lim_{z\to 1+i\sqrt{3}}(z - 1 - i\sqrt{3}) = 0$.
   Nos hallamos ante una aparente indeterminación:
   $$\lim_{z\to 1+i\sqrt{3}} \frac{z^2 - 2z + 4}{z - 1 - i\sqrt{3}} = \frac{0}{0}.$$
   Ahora bien, hemos visto que $1 + i\sqrt{3}$ es raíz de $z^2 - 2z + 4$; la otra raíz será $1 - i\sqrt{3}$. Luego,
   $$\lim_{z\to 1+i\sqrt{3}} \frac{z^2 - 2z + 4}{z - 1 - i\sqrt{3}} = \lim_{z\to 1+i\sqrt{3}} \frac{(z - 1 + i\sqrt{3})(z - 1 - i\sqrt{3})}{z - 1 - i\sqrt{3}} = \lim_{z\to 1+i\sqrt{3}} (z - 1 + i\sqrt{3}) = i2\sqrt{3}.$$
   □

5. Calcular
   $$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z} + iz^2}{\sqrt{|z|}}.$$

   *Resolución.* La función dada es el cociente de un polinomio en $z$ y $\bar{z}$ por la función $\sqrt{|z|}$. El Ejemplo 3.7, el Ejercicio 2 y la Proposición 3.8 sugieren calcular el límite evaluando la función en $z = 0$, pero al hacerlo obtenemos:
   $$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z} + iz^2}{\sqrt{|z|}} = \frac{0}{0}.$$

Intentaremos solventar esta indeterminación poniendo $z = x + iy$ y descomponiendo la función en sus partes real e imaginaria:

$$\frac{\overline{z}+iz^2}{\sqrt{|z|}} = \frac{(x-iy)+i(x+iy)^2}{\sqrt{|x+iy|}} = \frac{(x-iy)+i\left(x^2-y^2+i2xy\right)}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} = \frac{x-2xy}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} + i\frac{x^2-y^2-y}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}.$$

Si existe el límite de las partes real e imaginaria entonces, por la Proposición 3.5, existe el de la propia función, y se cumple:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}+iz^2}{\sqrt{|z|}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2xy}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} + i \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2-y}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}.$$

Los dos límites dobles se resuelven cambiando a coordenadas polares, $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2xy}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta - 2r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}{\sqrt[4]{r^2}} = \lim_{r\to 0} \sqrt{r}(\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,2\theta) = 0,$$

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^2-y^2-y}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt[4]{r^2}} = \lim_{r\to 0} \sqrt{r}(r\cos 2\theta - \mathrm{sen}\,\theta) = 0,$$

de donde

$$\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}+iz^2}{\sqrt{|z|}} = 0 + i\cdot 0 = 0.$$

□

6. Sea $n \in \mathbb{N}$.

   $(i)$ Comprobar que para cualesquiera $z, a \in \mathbb{C}$ se verifica

$$(z^{n-1} + az^{n-2} + \ldots + a^{n-2}z + a^{n-1})(z-a) = z^n - a^n.$$

   $(ii)$ Usar (i) para demostrar que $(z^n)' = nz^{n-1}$.

*Resolución.*

   $(i)$ Se trata de un cálculo directo.

   $(ii)$ Fijemos $a \in \mathbb{C}$. Para $z \in \mathbb{C}\setminus\{a\}$, se tiene

$$\frac{z^n - a^n}{z-a} = z^{n-1} + az^{n-2} + \ldots + a^{n-2}z + a^{n-1},$$

   así que, por la Observación 3.9,

$$(z^n)'\big|_{z=a} = \lim_{z\to a} \frac{z^n-a^n}{z-a} = \lim_{z\to a} \left(z^{n-1} + az^{n-2} + \ldots + a^{n-2}z + a^{n-1}\right) = a^{n-1} + \overset{(n)}{\ldots} + a^{n-1} = na^{n-1}.$$

□

7. Hallar

$$\lim_{z\to 2+i} \frac{z^2-4z+5}{z^3-z-10i}.$$

*Resolución.* Para $z \in \mathbb{C}$, pongamos $f(z) = z^2 - 4z + 5$, $g(z) = z^3 - z - 10i$. Se tiene:

$$f(2+i) = (2+i)^2 - 4(2+i) + 5 = (4+4i-1) - 8 - 4i + 5 = 0,$$
$$g(2+i) = (2+i)^3 - (2+i) - 10i = (8+12i-6-i) - 2 - i - 10i = 0.$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} f'(z) &= 2z - 4, & f'(2+i) &= 4 + 2i - 4 = 2i, \\ g'(z) &= 3z^2 - 1, & g'(2+i) &= 3(2+i)^2 - 1 = (12+12i-3) - 1 = 8 + 12i \neq 0. \end{aligned}$$

En virtud de la regla de L'Hôpital (Proposición 4.10),

$$\lim_{z \to 2+i} \frac{z^2 - 4z + 5}{z^3 - z - 10i} = \frac{2i}{8+12i} = \frac{i(4-6i)}{|4+6i|^2} = \frac{3}{26} + \frac{i}{13}.$$

□

8. Verificar que la función $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ es diferenciable real en todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$, pero no satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann a menos que $z = 0$. ¿Es $f$ derivable compleja en $z = 0$? ¿Y en un punto $z \neq 0$?

*Resolución.* La función es diferenciable real porque admite derivadas parciales continuas en cualquier punto del plano. En efecto, $u(x,y) = (\Re f)(x,y) = x^2 + y^2$ y $v(x,y) = (\Im f)(x,y) = 0$, así que $u_x(x,y) = 2x$, $u_y(x,y) = 2y$, y $v_x(x,y) = v_y(x,y) = 0$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Además,

$$2x = u_x(x,y) = v_y(x,y) = 0, \qquad 2y = u_y(x,y) = -v_x(x,y) = 0$$

si, y sólo si, $(x,y) = (0,0)$. Sigue del Teorema 4.13 que $f$ únicamente es derivable compleja en el origen. □

9. Probar que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el origen, pero no es diferenciable real en ese punto. ¿Es $f(z)$ derivable compleja en $z = 0$?

*Resolución.* Las partes real e imaginaria de $f$ son, respectivamente, $u(x,y) = f(x,y)$ y $v(x,y) = 0$. Calculemos sus derivadas parciales en el origen:

$$\begin{aligned} u_x(0,0) &= \lim_{h \to 0} \frac{u(h,0) - u(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0, \\ u_y(0,0) &= \lim_{h \to 0} \frac{u(0,h) - u(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0, \\ v_x(0,0) &= v_y(0,0) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $(0,0)$:

$$u_x(0,0) = 0 = v_y(0,0), \quad u_y(0,0) = 0 = -v_x(0,0).$$

Si $f$ fuese diferenciable real en dicho punto, se debería tener

$$\begin{aligned}
&\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\|\,(u(h_1,h_2)-u(0,0)-u_x(0,0)h_1-u_y(0,0)h_2, v(h_1,h_2)-v(0,0)-v_x(0,0)h_1-v_y(0,0)h_2)\,\|_2}{\|(h_1,h_2)\|_2}\\
&\qquad = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\|\,(u(h_1,h_2),0)\,\|_2}{\|(h_1,h_2)\|_2} = 0,
\end{aligned}$$

donde $\|\cdot\|_2$ denota la norma euclídea de $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, este límite no existe, pues cambiando a polares se aprecia que depende de la dirección por la que nos acerquemos a cero:

$$\begin{aligned}
\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\|\,(u(h_1,h_2),0)\,\|_2}{\|(h_1,h_2)\|_2} &= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\dfrac{|h_1h_2|}{(h_1^2+h_2^2)^{1/2}}}{(h_1^2+h_2^2)^{1/2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_1h_2|}{h_1^2+h_2^2}\\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^2|\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta|}{r^2} = \lim_{r\to 0}|\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta| = |\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta|.
\end{aligned}$$

Así pues, $f$ no es diferenciable real en el origen. El Teorema 4.13 impide que $f$ sea derivable compleja en ese punto. □

10. Se considera la función

$$f(z) = f(x+iy) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0)\\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Estudiar en qué puntos del plano es diferenciable real, en cuáles se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann, y en cuáles es derivable compleja, calculando su derivada en los puntos donde exista.

*Resolución.* Nos apoyaremos en el Teorema 4.13. Pongamos

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0), \end{cases} \qquad v(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Para $(x,y)\neq(0,0)$,

$$\begin{aligned}
u_x(x,y) &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad u_y(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},\\
v_x(x,y) &= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad v_y(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Como las derivadas parciales existen y son continuas en todo punto salvo, quizá, en el origen, $f$ es diferenciable real en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Además, en estos puntos se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = v_y(x,y), \qquad u_y(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -v_x(x,y).$$

Luego, $f$ es derivable compleja en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sin embargo, $f$ no es siquiera diferenciable real en $(0,0)$, ya que no existen las derivadas parciales $u_x$ y $v_y$ en dicho punto:

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(h,0)-u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}, \qquad \lim_{h\to 0} \frac{v(0,h)-v(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(-\frac{1}{h^2}\right).$$

Consecuentemente, $f$ tampoco es derivable compleja en el origen. En los puntos donde $f$ es derivable, es decir, en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, su derivada vale

$$f'(x,y) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Obsérvese que, en notación compleja,

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z} \quad \text{y} \quad f'(z) = -\frac{1}{z^2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

□

11. (Ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares).

 $(i)$ Sean $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$. Probar las igualdades:

$$u_r = u_x \cos\theta + u_y \operatorname{sen}\theta, \qquad u_\theta = -u_x r \operatorname{sen}\theta + u_y r\cos\theta, \tag{24}$$

$$v_r = v_x \cos\theta + v_y \operatorname{sen}\theta, \qquad v_\theta = -v_x r \operatorname{sen}\theta + v_y r\cos\theta. \tag{25}$$

 Deducir de ellas las *ecuaciones de Cauchy-Riemann en polares*:

$$ru_r = v_\theta, \quad rv_r = -u_\theta. \tag{26}$$

 $(ii)$ Supóngase que la función $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ es derivable en un punto $z$ cuya coordenadas polares son $(r,\theta)$. Probar que la derivada de $f$ en $(r,\theta)$ es

$$f'(z) = (\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)(u_r + iv_r) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r).$$

*Resolución.*

 $(i)$ Las ecuaciones (24) y (25) se obtienen sin más que tener en cuenta que $u = u(x,y) = u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ y $v = v(x,y) = v(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, y derivar parcialmente aplicando la regla de la cadena.

 Para deducir las ecuaciones (26), basta con multiplicar la primera ecuación de (24) y de (25) por $r$ y sustituir en ellas las condiciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Recíprocamente, veamos que, en abiertos que no contienen al origen ($r \neq 0$), las ecuaciones (26) conducen a las ecuaciones de Cauchy-Riemann en cartesianas. A tal fin, despejaremos $u_x, u_y$, de las dos ecuaciones (24), y $v_x, v_y$ de las dos ecuaciones (25).

Para despejar $u_x$, multiplicamos por $r\cos\theta$ los dos miembros de la primera ecuación en (24), por $\operatorname{sen}\theta$ los dos miembros de la segunda ecuación en (24), y restamos miembro a miembro las ecuaciones resultantes, obteniendo sucesivamente:

$$\begin{aligned}
ru_r\cos\theta &= ru_x\cos^2\theta + ru_y\operatorname{sen}\theta\cos\theta,\\
u_\theta\operatorname{sen}\theta &= -ru_x\operatorname{sen}^2\theta + ru_y\operatorname{sen}\theta\cos\theta,\\
ru_r\cos\theta - u_\theta\operatorname{sen}\theta &= ru_x.
\end{aligned}$$

Despejamos ya $u_x$ de esta última ecuación, teniendo en cuenta (26):

$$u_x = \frac{1}{r}(ru_r\cos\theta - u_\theta\operatorname{sen}\theta) = \frac{1}{r}(ru_r\cos\theta + rv_r\operatorname{sen}\theta) = u_r\cos\theta + v_r\operatorname{sen}\theta. \tag{27}$$

Operando de forma similar con las ecuaciones (25), llegamos a

$$\begin{aligned}
rv_r\cos\theta &= rv_x\cos^2\theta + rv_y\operatorname{sen}\theta\cos\theta,\\
v_\theta\operatorname{sen}\theta &= -rv_x\operatorname{sen}^2\theta + rv_y\operatorname{sen}\theta\cos\theta,\\
rv_r\cos\theta - v_\theta\operatorname{sen}\theta &= rv_x,
\end{aligned}$$

y, de nuevo por (26),

$$v_x = \frac{1}{r}(rv_r\cos\theta - v_\theta\operatorname{sen}\theta) = \frac{1}{r}(rv_r\cos\theta - ru_r\operatorname{sen}\theta) = v_r\cos\theta - u_r\operatorname{sen}\theta. \tag{28}$$

Si ahora multiplicamos por $r\operatorname{sen}\theta$ los dos miembros de la primera ecuación en (24), por $\cos\theta$ los dos miembros de la segunda ecuación en (24), y sumamos miembro a miembro las ecuaciones resultantes, encontramos que

$$\begin{aligned}
ru_r\operatorname{sen}\theta &= ru_x\operatorname{sen}\theta\cos\theta + ru_y\operatorname{sen}^2\theta,\\
u_\theta\cos\theta &= -ru_x\operatorname{sen}\theta\cos\theta + ru_y\cos^2\theta,\\
ru_r\operatorname{sen}\theta + u_\theta\cos\theta &= ru_y.
\end{aligned}$$

Despejando $u_y$ de esta última ecuación y sustituyendo la segunda de las relaciones (26):

$$u_y = \frac{1}{r}(ru_r\operatorname{sen}\theta + u_\theta\cos\theta) = \frac{1}{r}(ru_r\operatorname{sen}\theta - rv_r\cos\theta) = u_r\operatorname{sen}\theta - v_r\cos\theta. \tag{29}$$

El mismo procedimiento aplicado a las ecuaciones (25) conduce a

$$\begin{aligned}
rv_r\operatorname{sen}\theta &= rv_x\operatorname{sen}\theta\cos\theta + rv_y\operatorname{sen}^2\theta,\\
v_\theta\cos\theta &= -rv_x\operatorname{sen}\theta\cos\theta + rv_y\cos^2\theta,\\
rv_r\operatorname{sen}\theta + v_\theta\cos\theta &= rv_y,
\end{aligned}$$

de donde, nuevamente por (26),

$$v_y = \frac{1}{r}\left(rv_r \operatorname{sen}\theta + v_\theta \cos\theta\right) = \frac{1}{r}\left(rv_r \operatorname{sen}\theta + ru_r\cos\theta\right) = v_r \operatorname{sen}\theta + u_r\cos\theta. \tag{30}$$

Las ecuaciones (27) y (30) muestran que $u_x = v_y$, mientras que de (28) y (29) se desprende que $u_y = -v_x$.

$(ii)$ Es sabido que $f'(z) = f'(x+iy) = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$ (Teorema 4.13). Insertando aquí las expresiones para $u_x$ y $v_x$ calculadas en (27) y (28), respectivamente, se concluye que

$$\begin{aligned} f'(z) &= (u_r\cos\theta + v_r\operatorname{sen}\theta) + i\,(v_r\cos\theta - u_r\operatorname{sen}\theta) = u_r(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta) + v_r(\operatorname{sen}\theta + i\cos\theta) \\ &= u_r(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta) + iv_r(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta) = (\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)(u_r + iv_r) \\ &= e^{-i\theta}(u_r + iv_r). \end{aligned}$$

$\square$

12. Determinar los puntos del plano complejo en los cuales es derivable la función $f(z) = |z|\Re\bar{z}$. ¿Es $f$ holomorfa en esos puntos?

*Resolución.* Haciendo $z = x+iy$ vemos que $f(z) = x\sqrt{x^2+y^2}$. Por tanto,

$$u(x,y) = (\Re f)(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}, \qquad v(x,y) = (\Im f)(x,y) = 0.$$

Para $(x,y) \neq (0,0)$:

$$u_x(x,y) = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad u_y(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad v_x(x,y) = 0, \quad v_y(x,y) = 0.$$

Entonces $u_x(x,y) \neq 0$ implica $u_x(x,y) \neq v_y(x,y)$, de modo que $f$ no es derivable en $z = x+iy$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Analicemos si $f$ es derivable en $z = 0$. Se tiene:

$$\begin{aligned} u_x(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{u(h,0)-u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0}|h| = 0, \\ u_y(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{u(0,h)-u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

Luego, las funciones $u_x, u_y, v_x, v_y$ son:

$$u_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$u_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$v_x(x,y) = v_y(x,y) = 0 \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

Pasando a coordenadas polares se comprueba fácilmente que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u_x(x,y) = 0 = u_x(0,0), \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} u_y(x,y) = 0 = u_y(0,0).$$

Es decir, se cumplen las condiciones del Corolario 4.14. En consecuencia, $f$ es derivable únicamente en $z=0$, con

$$f'(0) = u_x(0,0) + iv_x(0,0) = 0 + i\cdot 0 = 0.$$

Sin embargo, $f$ no es holomorfa en $z=0$, ya que no es derivable en ningún entorno de ese punto. □

13. Sea $D \subset \mathbb{C}$ un abierto que no contiene al origen.

    $(i)$ Para $u \in C^2(D)$, deducir la *ecuación de Laplace en polares*
$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0. \tag{31}$$

    $(ii)$ Supóngase que $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ es holomorfa en $D$. Usar las ecuaciones de Cauchy-Riemann en polares (26) para demostrar que $u(r,\theta)$ satisface (31) en $D$.

    $(iii)$ Comprobar que $u(r,\theta) = r^3\cos 3\theta$ es armónica en $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.

    *Resolución.*

    $(i)$ Por (24), sabemos que $u_r = u_x\cos\theta + u_y\operatorname{sen}\theta$. Derivando esta expresión respecto de $r$ y aplicando el teorema de Schwarz sobre la igualdad de las derivadas cruzadas:

$$\begin{aligned}
u_{rr} &= (u_x)_r\cos\theta + u_x(\cos\theta)_r + (u_y)_r\operatorname{sen}\theta + u_y(\operatorname{sen}\theta)_r\\
&= (u_{xx}x_r + u_{xy}y_r)\cos\theta + (u_{yx}x_r + u_{yy}y_r)\operatorname{sen}\theta\\
&= (u_{xx}\cos\theta + u_{xy}\operatorname{sen}\theta)\cos\theta + (u_{yx}\cos\theta + u_{yy}\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta\\
&= u_{xx}\cos^2\theta + 2u_{xy}\cos\theta\operatorname{sen}\theta + u_{yy}\operatorname{sen}^2\theta.
\end{aligned}$$

    También por (24), $u_\theta = -u_x r\operatorname{sen}\theta + u_y r\cos\theta$. Derivando aquí respecto de $\theta$ y aplicando, de nuevo, el teorema de Schwarz:

$$\begin{aligned}
u_{\theta\theta} &= -(u_x)_\theta r\operatorname{sen}\theta - u_x(r\operatorname{sen}\theta)_\theta + (u_y)_\theta r\cos\theta + u_y(r\cos\theta)_\theta\\
&= -(u_{xx}x_\theta + u_{xy}y_\theta)r\operatorname{sen}\theta - u_x r\cos\theta + (u_{yx}x_\theta + u_{yy}y_\theta)r\cos\theta - u_y r\operatorname{sen}\theta\\
&= -(-u_{xx}r\operatorname{sen}\theta + u_{xy}r\cos\theta)r\operatorname{sen}\theta - u_x r\cos\theta + (-u_{yx}r\operatorname{sen}\theta + u_{yy}r\cos\theta)r\cos\theta - u_y r\operatorname{sen}\theta\\
&= u_{xx}r^2\operatorname{sen}^2\theta - 2u_{xy}r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + u_{yy}r^2\cos^2\theta - u_x r\cos\theta - u_y r\operatorname{sen}\theta.
\end{aligned}$$

    Luego,

$$\begin{aligned}
u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} \;&=\; (u_{xx}\cos^2\theta + 2u_{xy}\cos\theta\operatorname{sen}\theta + u_{yy}\operatorname{sen}^2\theta) + \frac{1}{r}(u_x\cos\theta + u_y\operatorname{sen}\theta)\\
&\quad + \frac{1}{r^2}(u_{xx}r^2\operatorname{sen}^2\theta - 2u_{xy}r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + u_{yy}r^2\cos^2\theta - u_x r\cos\theta - u_y r\operatorname{sen}\theta)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (u_{xx}+u_{yy})(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)\\
&= u_{xx}+u_{yy}.
\end{aligned}
$$

$(ii)$ En virtud de la primera ecuación de (26) y el teorema de Schwarz:

$$ru_{rr}+u_r=(ru_r)_r=v_{\theta r}=v_{r\theta}.$$

Multiplicando por $r$ los extremos de esta cadena de igualdades y aplicando la segunda ecuación de (26):

$$r^2u_{rr}+ru_r=rv_{r\theta}=(rv_r)_\theta=-u_{\theta\theta}.$$

Consecuentemente, $u$ satisface (31) en $D$.

$(iii)$ Se tiene:

$$
\begin{aligned}
u_r &= 3r^2\cos 3\theta, & u_\theta &= -3r^3\operatorname{sen}3\theta,\\
u_{rr} &= 6r\cos 3\theta, & u_{\theta\theta} &= -9r^3\cos 3\theta.
\end{aligned}
$$

Por tanto:

$$r^2u_{rr}+ru_r+u_{\theta\theta}=6r^3\cos 3\theta+3r^3\cos 3\theta-9r^3\cos 3\theta=0,$$

de manera que $u$ es armónica en $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.

□

14. $(i)$ Verificar que $u(x,y)=x^3-3xy^2-5y$ es armónica en $\mathbb{R}^2$.

$(ii)$ Encontrar todas sus armónicas conjugadas.

*Resolución.*

$(i)$ Claramente, $u\in C^2(\mathbb{R}^2)$. Además, para cualquier $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, se tiene:

$$
\begin{aligned}
u_x(x,y) &= 3x^2-3y^2, & u_y(x,y) &= -6xy-5,\\
u_{xx}(x,y) &= 6x & u_{yy}(x,y) &= -6x.
\end{aligned}
$$

Luego, $u_{xx}+u_{yy}=0$, probando que $u=u(x,y)$ es armónica en $\mathbb{R}^2$.

$(ii)$ La armónica conjugada $v=v(x,y)$ de $u$ debe satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$
\begin{aligned}
v_x(x,y) &= -u_y(x,y)=6xy+5\\
v_y(x,y) &= u_x(x,y)=3x^2-3y^2.
\end{aligned}
$$

Integramos la primera ecuación respecto de $x$: $v(x,y)=3x^2y+5x+h(y)$. Ahora, derivamos esta expresión respecto de $y$ y la igualamos a la segunda ecuación: $v_y(x,y)=3x^2+h'(y)=3x^2-3y^2$. Se infiere que $h'(y)=-3y^2$, de donde $h(y)=-y^3+C$, siendo $C$ una constante arbitraria. Concluimos que $v(x,y)=3x^2y+5x-y^3+C$.

□

15. Comprobar que la función $u(x,y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$ es armónica en $\mathbb{R}^2$, y determinar su armónica conjugada $v$ para expresar $f = u + iv$ como función holomorfa de $z$ en $\mathbb{C}$.

*Resolución.* Es claro que $u \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$. Además, para cualquier $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$u_x(x,y) = 6xy + 4x, \quad u_y(x,y) = 3x^2 - 3y^2 - 4y, \qquad u_{xx}(x,y) = 6y + 4, \quad u_{yy}(x,y) = -6y - 4,$$

así que $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ en $\mathbb{R}^2$ y, por lo tanto, $u$ es armónica en todo el plano.

Si la función $f = u + iv$ ha de ser holomorfa, se han de cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. De la primera ecuación deducimos:

$$v(x,y) = \int u_x\,dy = \int (6xy + 4x)\,dy = 3xy^2 + 4xy + h(x);$$

de la segunda

$$3x^2 - 3y^2 - 4y = -[3y^2 + 4y + h'(x)],$$

así que $h'(x) = -3x^2$ y $h(x) = -x^3 + C$, siendo $C$ una constante arbitraria. Luego, $v(x,y) = 3xy^2 + 4xy - x^3 + C$, y la función entera pedida es

$$f(x+iy) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2 + i(3xy^2 + 4xy - x^3 + C).$$

Para expresar $f$ en términos de $z$ usamos el método de Milne-Thomson, consistente en hacer $y = 0$ y $x = z$ en la fórmula anterior, lo que proporciona $f(x) = 2x^2 + i(-x^3 + C)$ y finalmente $f(z) = 2z^2 - iz^3 + iC$, o bien

$$f(z) = 2z^2 - iz^3 + K \quad (K \in \mathbb{C}).$$

□

16. Probar el *criterio de Leibniz para la convergencia uniforme*: sea $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ tales que para todo $z \in A$, la sucesión $\{g_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona y converge uniformente a cero en $A$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}g_n$ converge uniformemente en $A$.

*Resolución.* Pongamos $f_n = f_n(z) = (-1)^{n+1}$ $(z \in A,\ n \in \mathbb{N})$. Entonces $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones constantes. Sus sumas parciales $F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ $(n \in \mathbb{N})$ toman sólo los valores 0 ó 1 y, por tanto, verifican

$$|F_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} f_k\right| \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Aplicando (8) a las sucesiones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ (esta última evaluada en cada $z \in A$), podemos escribir:

$$\sum_{k=1}^{q}(-1)^{p+k+1}g_{p+k}(z) = \sum_{k=1}^{q} F_{p+k}\left[g_{p+k}(z) - g_{p+k+1}(z)\right] + F_{p+q}g_{p+q+1}(z) - F_p g_{p+1}(z) \quad (z \in A,\ p,q \in \mathbb{N}).$$

Tomando aquí valores absolutos, obtenemos:

$$\left|\sum_{k=1}^{q}(-1)^{p+k+1}g_{p+k}(z)\right| \leq \sum_{k=1}^{q}\left|g_{p+k}(z)-g_{p+k+1}(z)\right|+\left|g_{p+q+1}(z)\right|+|g_{p+1}(z)| \quad (z\in A,\ p,q\in\mathbb{N}).$$

Como, para cada $z\in A$, los números $g_{p+k}(z)-g_{p+k+1}(z)$ $(p,k\in\mathbb{N})$ son todos positivos o todos negativos, resulta que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{q}\left|g_{p+k}(z)-g_{p+k+1}(z)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{q}\left[g_{p+k}(z)-g_{p+k+1}(z)\right]\right|\\ &= \left|g_{p+1}(z)-g_{p+q+1}(z)\right|\\ &\leq \left|g_{p+q+1}(z)\right|+|g_{p+1}(z)| \quad (z\in A,\ p,q\in\mathbb{N});\end{aligned}$$

así pues,

$$\left|\sum_{k=1}^{q}(-1)^{p+k+1}g_{p+k}(z)\right| \leq 2\left|g_{p+q+1}(z)\right|+2\,|g_{p+1}(z)| \quad (z\in A,\ p,q\in\mathbb{N}).$$

Ya que $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a cero, dado $\varepsilon>0$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $p\in\mathbb{N}$ y $p\geq N$ implican $|g_p(z)|<\varepsilon/4$ para todo $z\in A$. Consecuentemente,

$$\left|\sum_{k=1}^{p+q}(-1)^{k+1}g_k(z)-\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}g_k(z)\right| = \left|\sum_{k=1}^{q}(-1)^{p+k+1}g_{p+k}(z)\right| < 2\frac{\varepsilon}{4}+2\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon \quad (z\in A,\ p,q\in\mathbb{N},\ p\geq N).$$

Se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}g_n$ verifica la condición de Cauchy para la convergencia uniforme en $A$, luego (Teorema 5.3) converge uniformemente en $A$. □

17. Calcular el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}z^n.$$

*Resolución.* Aplicamos el criterio del cociente (Teorema 5.14):

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}}{\dfrac{(2n)!}{n!n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1} = 2\cdot 2 = 4.\end{aligned}$$

Por tanto, el radio de convergencia de la serie es $R=1/4$. □

18. Probar que la sucesión $\{\sqrt[n]{n}\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente (al menos desde un término en adelante), y converge a 1.

*Resolución.* Demostrar que la sucesión dada es decreciente equivale a ver que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple

$$(n+1)^{1/(n+1)} \leq n^{1/n},$$

o bien (elevando a $n(n+1)$ los dos miembros de la desigualdad), que

$$(n+1)^n \leq n^{n+1} = n^n \cdot n.$$

Dividiendo por $n^n$ ambos miembros de esta expresión, podemos reescribirla en la forma

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq n.$$

De cursos anteriores sabemos que la sucesión

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

es monótona creciente y tiene por límite el número $e = 2.71\ldots$. Consecuentemente, vale la desigualdad

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e < n \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 3),$$

que prueba la monotonía buscada.

Ahora, la sucesión $\{\sqrt[n]{n}\}_{n=3}^{\infty}$ es monótona decreciente y está acotada inferiormente por 1; por lo tanto, converge a un límite, $L$. Para hallar el valor de $L$, teniendo en cuenta que $\lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1$, escribimos:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} 2^{1/n} \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (2n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} [(2n)^{1/2n}]^2 = L^2.$$

De aquí, $L = 0$ ó $L = 1$. La primera solución debe ser descartada, por lo que necesariamente $L = 1$, como se pretendía. □

19. Calcular el radio de convergencia de las series de potencias:

  $(i)$ $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2}$;

  $(ii)$ $\sum_{n=0}^{\infty} (-2i)^n z^{n^3}$.

*Resolución.*

$(i)$ Los coeficientes de esta serie son:

$$c_k = \begin{cases} n!, & k = n^2 \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases} \quad (k, n \in \mathbb{N}_0).$$

Para aplicar la fórmula de Cauchy-Hadamard (Teorema 5.16) necesitamos calcular

$$\limsup_{k\to\infty} |c_k|^{1/k},$$

que será el máximo de los límites de todas las subsucesiones convergentes de la sucesión $\left\{|c_k|^{1/k}\right\}_{n=0}^{\infty}$, a saber,

$$\lim_{n\to\infty}(n!)^{1/n^2}.$$

Evaluamos este límite mediante la conocida fórmula de Stirling y teniendo en cuenta el Ejercicio 18:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(n!)^{1/n^2} &= \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]^{1/n^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}(2\pi)^{1/(2n^2)}\lim_{n\to\infty}n^{1/(2n^2)}\lim_{n\to\infty}n^{1/n}\lim_{n\to\infty}e^{-1/n}\\ &= \lim_{n\to\infty}n^{1/(2n^2)} = \lim_{n\to\infty}(n^{1/n})^{1/(2n)} = 1.\end{aligned}$$

Se concluye que $R = 1$.

$(ii)$ Los coeficientes de esta serie son:

$$c_k = \begin{cases}(-2i)^n, & k = n^3\\ 0, & k \neq n^3\end{cases} \quad (k, n \in \mathbb{N}_0).$$

Razonando como en (i), computamos:

$$\lim_{n\to\infty}|(-2i)^n|^{1/n^3} = \lim_{n\to\infty}|-2i|^{n/n^3} = \lim_{n\to\infty}2^{n/n^3} = \lim_{n\to\infty}2^{1/n^2} = 1.$$

Alternativamente, podríamos haber hecho $n = k^{1/3}$, con lo cual

$$\limsup_{k\to\infty}|c_k|^{1/k} = \lim_{k\to\infty}|(-2i)^{k^{1/3}}|^{1/k} = \lim_{k\to\infty}2^{k^{1/3}/k} = \lim_{k\to\infty}2^{k^{-2/3}} = \lim_{k\to\infty}2^{1/k^{2/3}} = 1.$$

En cualquier caso, $R = 1$.

□

20. Calcular el radio de convergencia y la suma de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)z^n.$$

*Resolución.* Recordemos que la serie geométrica de razón $z$ tiene radio de convergencia 1 y suma

$$\sum_{k=0}^{\infty}z^k = \frac{1}{1-z}.$$

Por el Teorema 5.21, esta serie se puede derivar término a término en el disco unidad abierto, obteniendo:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty}z^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty}kz^{k-1}.$$

Derivando de nuevo, resulta:

$$\begin{aligned}\frac{2}{(1-z)^3} &= \left[\frac{1}{(1-z)^2}\right]' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}\right)' \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2} = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nz^{n-1}.\end{aligned}$$

Finalmente, tras multiplicar por $z$, concluimos:

$$\frac{2z}{(1-z)^3} = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nz^n \quad (|z|<1).$$

La convergencia de la última serie se justifica por el hecho de que su radio de convergencia depende únicamente de la sucesión de coeficientes, y esta sucesión es la misma que la de la serie previa. □

21. Supongamos que el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ es 1 y que, además, $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ es monótona, con $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge en la frontera del disco unidad salvo, quizá, en $z=1$.

*Resolución.* Sea $|z|=1$, $z\neq 1$, y sea $\{S_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Como esta sucesión está acotada:

$$|S_n(z)| = \left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| = \left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leq \frac{1+|z|^{n+1}}{|1-z|} = \frac{2}{|1-z|},$$

se sigue del criterio particular de Dirichlet (para series numéricas) que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge para todo $z$ con $|z|=1$, $z\neq 1$.

Nótese que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n$ cumple los requisitos exigidos, pero diverge en $z=1$ (para ese valor se convierte en la serie armónica), lo que justifica la exclusión de dicho punto. Que el radio de convergencia de esta serie es 1 se puede comprobar mediante el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/(n+1)}{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1.$$

□

22. Desarrollar la función

$$f(z) = \frac{z}{2-z}$$

en una serie de potencias de $z-1$.

*Resolución.* La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$$

converge para $|z-1|<1$, y en tal caso su suma vale

$$\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n = \frac{1}{1-(z-1)} = \frac{1}{2-z}.$$

Por tanto, si $|z-1|<1$ podemos escribir:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{2-z} = z\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n = [(z-1)+1]\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n = \sum_{k=1}^{\infty}(z-1)^k + 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(z-1)^n \\ &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(z-1)^n. \end{aligned}$$

□

23. Hallar el radio de convergencia y la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}z^{3n}.$$

*Resolución.* Hacemos el cambio de variable $w=z^3$, comparamos la serie resultante con el desarrollo de la función exponencial, y deshacemos el cambio, obteniendo:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}z^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}w^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-w)^n}{n!} = -e^{-w} = -e^{-z^3}.$$

Puesto que la función exponencial es entera, el radio de convergencia de la serie dada es $R=+\infty$. También podemos obtenerlo aplicando el criterio del cociente (Teorema 5.14) a la serie transformada. En efecto,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{|(-1)^{n+2}|}{(n+1)!}}{\frac{|(-1)^{n+1}|}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

implica que el radio de convergencia de la serie modificada es $+\infty$; puesto que ésta converge para todo $w=z^3$, se infiere que la serie inicial converge para todo $z\in\mathbb{C}$ y, por lo tanto, su radio de convergencia también es $+\infty$. □

24. Para $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ y $n\in\mathbb{N}$, discutir las igualdades:

$(i)$ $\operatorname{Log} e^z = z$;

$(ii)$ $\exp(\operatorname{Log} z) = z$;

$(iii)$ $\operatorname{Log} z^{1/n} = (\operatorname{Log} z)/n$, donde $z^{1/n}$ denota la raíz $n$-ésima principal de $z$;

$(iv)$ $\operatorname{Log} z^n = n\operatorname{Log} z$.

*Resolución.*

$(i)$ Para resolver este apartado nos apoyaremos en la Proposición 6.2(viii). Recordemos que los logaritmos de $w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ se definen como todos los números complejos cuya exponencial es $w$ (Definición 6.3).

Evidentemente, $z$ es un logaritmo de $e^z$. Además, para que se dé la igualdad

$$\Re z + i \operatorname{Arg} e^z = \ln e^{\Re z} + i \operatorname{Arg} e^z = \ln |e^z| + i \operatorname{Arg} e^z = \operatorname{Log} e^z = z = \Re z + i \Im z,$$

es necesario y suficiente que $\Im z$ sea el argumento principal de $e^z$. Como $\Im z$ es un argumento de $e^z$, esto ocurre si, y sólo si, $-\pi < \Im z \le \pi$.

$(ii)$ Por definición de logaritmo, la igualdad $\exp(\operatorname{Log} z) = z$ se cumple sin más condiciones sobre $z$.

$(iii)$ Se tiene:

$$\operatorname{Log} z^{1/n} = \ln |z^{1/n}| + i \operatorname{Arg} z^{1/n} = \frac{\ln |z|}{n} + i \frac{\operatorname{Arg} z}{n},$$
$$\frac{\operatorname{Log} z}{n} = \frac{\ln |z|}{n} + i \frac{\operatorname{Arg} z}{n}.$$

Por tanto, la igualdad en (iii) también se verifica siempre.

$(iv)$ Ahora:

$$\operatorname{Log} z^n = \ln |z^n| + i \operatorname{Arg} z^n = n \ln |z| + i \operatorname{Arg} z^n,$$
$$n \operatorname{Log} z = n \ln |z| + in \operatorname{Arg} z.$$

La igualdad en (iv) equivale a que $\operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z$. Como $n \operatorname{Arg} z$ es un argumento de $z^n$, para que sea el argumento principal es necesario y suficiente que $-\pi < n \operatorname{Arg} z \le \pi$, es decir, que $-\pi/n < \operatorname{Arg} z \le \pi/n$.

$\square$

25. Se considera la función

$$f(z) = \log z + \frac{\pi}{2 \operatorname{sh} \pi z},$$

donde el seno hiperbólico complejo se define mediante la fórmula

$$\operatorname{sh} w = \frac{e^w - e^{-w}}{2} \quad (w \in \mathbb{C}).$$

$(i)$ Hallar los ceros de la función $\operatorname{sh} \pi z$.

$(ii)$ Justificar que $f$ es multivaluada y determinar su rama principal, $f_0$.

$(iii)$ Encontrar el dominio de holomorfía de $f_0$.

$(iv)$ Expresar $f(i/2)$ en forma binómica.

*Resolución.*

$(i)$ Como la exponencial compleja es periódica de periodo $2\pi i$ (Proposición 6.2(x)), la función

$$\operatorname{sh} \pi z = \frac{e^{\pi z} - e^{-\pi z}}{2}$$

se anula cuando $\pi z = -\pi z + 2k\pi i$ $(k \in \mathbb{Z})$, o bien $z = ik$ $(k \in \mathbb{Z})$.

(*ii*) La función $\log z = \ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)$ $(z \in \mathbb{C}\setminus\{0\},\ k \in \mathbb{Z})$ es multivaluada; por lo tanto, $f$ también lo es. La rama principal del logaritmo es $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$ $(|z| > 0,\ -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi)$. Atendiendo a (i), la rama principal de $f$ será entonces

$$f_0(z) = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z + \frac{\pi}{2\operatorname{sh}\pi z} \quad (-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi,\ z \notin i\mathbb{Z}).$$

(*iii*) La función $f_0$ será holomorfa donde lo sean el logaritmo y la recíproca del seno hiperbólico, esto es, en $\mathbb{C}\setminus\{(-\infty,0]\cup i\mathbb{Z}\}$.

(*iv*) Ya que

$$2\operatorname{sh}\frac{i\pi}{2} = e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2} = i - (-i) = 2i,$$

podemos escribir:

$$f\left(\frac{i}{2}\right) = \ln\left|\frac{i}{2}\right| + i\left(\operatorname{Arg}\frac{i}{2} + 2k\pi\right) + \frac{\pi}{2\operatorname{sh}(i\pi/2)} = -\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + \frac{\pi}{2i}$$
$$= -\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - i\frac{\pi}{2} = -\ln 2 + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

□

26. Sean $z, a, b \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$. Probar:

(*i*) $\operatorname{Log} z^a = a\operatorname{Log} z + 2k\pi i$ para algún $k \in \mathbb{Z}$;

(*ii*) $(z^a)^b = z^{ab}e^{2k\pi ib}$ para algún $k \in \mathbb{Z}$;

(*iii*) $\log e^z = \{z + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$;

Deducir que:

(*iv*) $(z^a)^b \neq z^{ab}$, a menos que $b \in \mathbb{Z}$;

(*v*) $\log z^a = a\log z$ si, y sólo si, $a = 1/n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

*Resolución.*

(*i*) Combinando la definición de logaritmo con la definición de valor principal de una potencia compleja, encontramos que

$$e^{\operatorname{Log} z^a} = z^a = e^{a\operatorname{Log} z}.$$

La periodicidad de la exponencial (Proposición 6.2(x)) obliga a que $\operatorname{Log} z^a = a\operatorname{Log} z + 2k\pi i$ $(k \in \mathbb{Z})$.

(*ii*) Usando (i),

$$(z^a)^b = e^{b\operatorname{Log} z^a} = e^{ab\operatorname{Log} z + 2k\pi ib} = e^{ab\operatorname{Log} z}e^{2k\pi ib} = z^{ab}e^{2k\pi ib} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

(*iii*) Se tiene que $w \in \log e^z$ si, y sólo si, $e^w = e^z$, y esto se da si, y y sólo si, $w = z + 2k\pi i$ $(k \in \mathbb{Z})$.

(*iv*) Ahora, si $b \in \mathbb{Z}$ es claro que

$$(z^a)^b = z^{ab}$$

(véase también la Proposición 6.15(iv)). El recíproco es falso; por ejemplo, para $z=-1$, $a=1$ y $b=1/2$, resulta

$$(z^a)^b = i = z^{ab}.$$

Analizando (ii) vemos que si $k=0$ evidentemente se satisface la igualdad, mientras que si $k\neq 0$ entonces $(z^a)^b = z^{ab}$ si, y sólo si, $e^{2k\pi ib}=1$, lo que ocurre cuando, y sólo cuando, $2k\pi ib = 2m\pi i$ para algún $m\in\mathbb{Z}$, es decir, si, y sólo si, existe $m\in\mathbb{Z}$ tal que $b=m/k$.

$(v)$ Para $a=0$ la igualdad $\log z^a = a\log z$ no es válida, ya que

$$\log z^a = \log 1 = \{2k\pi i : k\in\mathbb{Z}\} \neq \{0\} = a\log z.$$

Supongamos $a\neq 0$. En virtud de (iii), se cumple que

$$\begin{aligned}\log z^a = \log e^{a\operatorname{Log} z} = \{a\operatorname{Log} z + 2k\pi i : k\in\mathbb{Z}\} &= a\left\{\operatorname{Log} z + \frac{2k\pi i}{a} : k\in\mathbb{Z}\right\}\\ &= a\{\operatorname{Log} z + 2n\pi i : n\in\mathbb{Z}\} = a\log z\end{aligned}$$

si, y sólo si, $k/a\in\mathbb{Z}$ para todo $k\in\mathbb{Z}$, y esto sucede si, y sólo si, $a=1/n$ para algún $n\in\mathbb{Z}$.

□

27. Hallar la potencia compleja $[i^i]$, y determinar su valor principal.

*Resolución.* Por definición,

$$[i^i] = \left\{e^{i(\operatorname{Log} i + 2k\pi i)} : k\in\mathbb{Z}\right\} = \left\{e^{i[\ln|i| + i(\pi/2+2k\pi)]} : k\in\mathbb{Z}\right\} = \left\{e^{2k\pi-\pi/2} : k\in\mathbb{Z}\right\} = \left\{e^{(4k-1)\pi/2} : k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Se obtiene el valor principal para $k=0$: $i^i = e^{-\pi/2}$. □

28. Hallar la potencia compleja $[(-3)^{i/\pi}]$, especificando su valor principal.

*Resolución.* Como $|-3|=3$ y $\operatorname{Arg}(-3)=\pi$, se verifica que $\operatorname{Log}(-3)=\ln 3 + i\pi$. Por tanto,

$$[(-3)^{i/\pi}] = \left\{e^{(i/\pi)[\operatorname{Log}(-3)+2k\pi i]} : k\in\mathbb{Z}\right\} = \left\{e^{(i/\pi)[\ln 3 + i\pi(2k+1))]} : k\in\mathbb{Z}\right\} = \left\{e^{2k-1}e^{i(\ln 3)/\pi} : k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

El valor principal se obtiene haciendo $k=0$:

$$(-3)^{i/\pi} = e^{-1+i(\ln 3)/\pi} = \frac{1}{e}\left(\cos\frac{\ln 3}{\pi} + i\operatorname{sen}\frac{\ln 3}{\pi}\right).$$

□

29. Encontrar todas las soluciones posibles de la ecuación $i^z = e^{1+i\pi z}$.

*Resolución.* Se tiene:

$$i^z = e^{z\operatorname{Log} i} = e^{z(\ln|i| + i\pi/2)} = e^{i\pi z/2}.$$

La exponencial es periódica de periodo $2\pi i$. Imponiendo que

$$e^{i\pi z/2} = e^{1+i\pi z}$$

obtenemos

$$\frac{i\pi z}{2} = 1 + i\pi z + 2ki\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

y de aquí

$$\frac{i\pi z}{2} = 2ki\pi - 1 \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

o bien

$$z = \frac{4ki\pi - 2}{i\pi} = 4k + \frac{2i}{\pi} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

□

30. Calcular las raíces complejas de la ecuación $\cos z = 3$.

*Resolución.* Si

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 3,$$

entonces $e^{iz} + e^{-iz} = 6$. El cambio de variable $w = e^{iz}$ conduce a la ecuación $w + w^{-1} = 6$, que podemos expresar como $w^2 - 6w + 1 = 0$. Las soluciones de esta ecuación cuadrática en $w$ son

$$w = \frac{6 \pm \sqrt{36-4}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

Ahora, deshacemos el cambio: la relación

$$e^{iz} = w = 3 \pm 2\sqrt{2} = e^{\ln(3 \pm 2\sqrt{2})}$$

implica

$$iz = \ln(3 \pm 2\sqrt{2}) + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

y se concluye que

$$z = 2k\pi - i\ln(3 \pm 2\sqrt{2}) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

□