

Autoevaluación de Variable Compleja

Tema 1: El sistema de los números complejos (soluciones)

Isabel Marrero

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de La Laguna

1. [2 puntos] $\Im(-5 + 3i) = 3i$. ¿Verdadero o falso? Justificar la respuesta.

Resolución. Falso: la parte imaginaria de un número complejo es un número real. La afirmación correcta es que $\Im(-5 + 3i) = 3$. □

2. [2 puntos] Calcular el valor del cociente

$$\frac{i^7 - i^{-7}}{2i}.$$

Resolución. Se tiene que

$$\frac{i^7 - i^{-7}}{2i} = \frac{i^7 - \bar{i}^7}{2i} = \Im i^7.$$

Ahora bien,

$$i^7 = (i^4)^2 i^{-1} = 1^2 \cdot i^{-1} = i^{-1} = -i.$$

Por tanto,

$$\frac{i^7 - i^{-7}}{2i} = -1.$$

□

3. [2 puntos] Supongamos que $|z - 2| < 2$. ¿Es cierto que $|\text{Arg } z| < \pi/2$? Razonar la respuesta.

Resolución. La respuesta es afirmativa. La condición $|z - 2| < 2$ describe al disco abierto de centro (2,0) y radio 2, que está situado en el semiplano derecho y no corta al eje de ordenadas, el cual es tangente a dicho disco en el origen. Por tanto, el argumento principal de todos los puntos del disco está estrictamente comprendido entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ (ver fig. 1). □

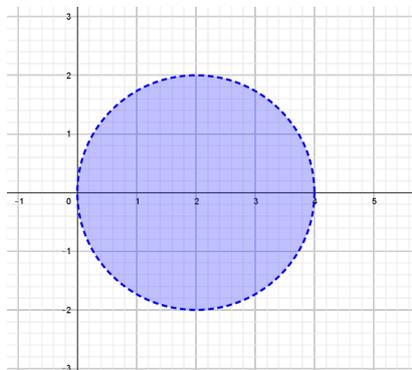


Figura 1.

4. [2 puntos] Hallar la raíz principal de orden 6 de -1 , expresando el resultado en forma polar, trigonométrica y binomial.

Resolución. Todo número complejo $z \neq 0$ tiene n raíces complejas de orden n que se calculan mediante la fórmula

$$z_k = |z|^{1/n} e^{i(\theta + 2k\pi)/n} \quad (k = 0, 1, \dots, n - 1),$$

donde $\theta \in \text{arg } z$. La raíz principal corresponde a los valores $\theta = \text{Arg } z$ y $k = 0$. Particularizando $z = -1$, $n = 6$ y $k = 0$ en la fórmula anterior, y teniendo en cuenta que $\text{Arg } z = \text{Arg}(-1) = \pi$, la raíz pedida resulta ser

$$z_0 = |-1|^{1/6} e^{i\pi/6} = e^{i\pi/6}.$$

Esta es la forma exponencial. La forma polar es, claramente,

$$z_0 = 1_{\pi/6};$$

la trigonométrica,

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6};$$

y la binomial,

$$z_0 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i).$$

□

5. [2 puntos] Sea S el conjunto de los números complejos z que satisfacen $|z| < 1$ ó $|z - 3i| < 1$. ¿Es S abierto? ¿Y conexo?

Resolución. El conjunto S es abierto porque es unión de dos discos abiertos. No es conexo porque estos abiertos son no vacíos y disjuntos (ver fig. 2). □

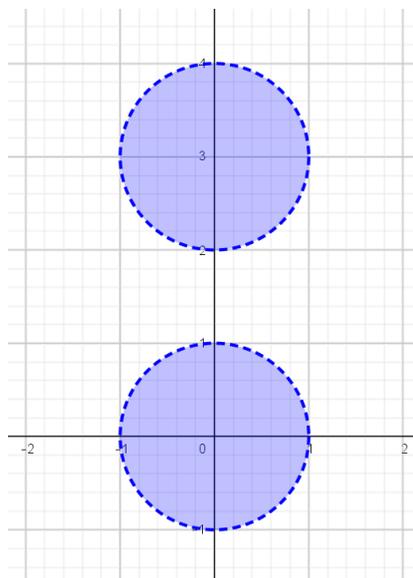


Figura 2.