Autoevaluación de Variable Compleja

Tema 2: Funciones holomorfas, armónicas y analíticas (soluciones)

Isabel Marrero
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

1. **[1 punto]** Demostrar en términos de ε y δ que $\lim_{z\to 2i}(z^2-i)=-4-i$.

   Resolución. Se ha de probar que para cada $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $0<|z-2i|<\delta$ implica $|(z^2-i)-(-4-i)|<\varepsilon$.

   Sea $\varepsilon>0$. Suponiendo que $0<|z-2i|<\delta$, donde δ se determinará posteriormente, la desigualdad triangular conduce a:

$$|z|=|(z-2i)+2i|\le|z-2i|+|2i|<\delta+|2i|=\delta+2. \tag{1}$$

   Ahora, nuevamente con ayuda de la desigualdad triangular y de (1), podemos escribir:

$$|(z^2-i)-(-4-i)|=|z^2+4|=|(z-2i)(z+2i)|=|z-2i|\,|z+2i|<\delta(|z|+|2i|)<\delta(\delta+4)=\delta^2+4\delta.$$

   Si hacemos $\delta^2+4\delta=\varepsilon$ y resolvemos esta ecuación de segundo grado en δ, resulta:

$$\delta=\frac{-4\pm\sqrt{4^2+4\varepsilon}}{2}=-2\pm\sqrt{4+\varepsilon}.$$

   Tomando la determinación positiva de la raíz ya obtenemos el δ deseado: $\delta=-2+\sqrt{4+\varepsilon}>0$. □

2. **[1 punto]** Si $f(z)=z^2$, calcular $f'(z)$ usando la definición de derivada.

   Resolución. Se tiene:

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(z+h)^2-z^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2z+h)h}{h}=\lim_{h\to 0}(2z+h)=2z \quad (z\in\mathbb{C}).$$

   □

3. **[1 punto]** ¿Puede ocurrir que u y v satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann en un punto $z=x+iy$ sin que la función $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ sea derivable en z?

   Resolución. La respuesta es afirmativa. Recordemos que f es derivable compleja en un punto si, y sólo si, f es diferenciable real y u,v satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann en ese punto. Por otra parte, u,v pueden admitir derivadas parciales que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en un punto sin que f sea diferenciable real en él. En tal caso, f no sería derivable compleja en dicho punto[1]. □

4. **[1 punto]** Si la función $f(x+iy)=c+iv(x,y)$, donde c es una constante real, es holomorfa en un dominio D, entonces f es constante en D. ¿Verdadero o falso? Razonar la respuesta.

   Resolución. Verdadero, en virtud del siguiente resultado[2]:

   Sea Ω un dominio (abierto y conexo) de $\mathbb{C}$, y sea $f\in\mathscr{H}(\Omega)$. Son equivalentes:

   (i) $\Re f$ *es constante en* Ω*;*

   (ii) $\Im f$ *es constante en* Ω*;*

   (iii) $\overline{f}\in\mathscr{H}(\Omega)$*;*

   (iv) f *es constante en* Ω*;*

   (v) $|f|$ *es constante en* Ω*.*

   □

[1] Se puede ver un ejemplo en el Ejercicio 9 (pág. 58) de los apuntes del Tema 2.
[2] Proposición 4.27 (pág. 25) de los apuntes del Tema 2.

5. **[1 punto]** Calcular el radio de convergencia y la suma de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n.$$

Resolución. Escribimos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(z-1)^n. \tag{2}$$

La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-z}{2}\right)^n \tag{3}$$

es geométrica, de razón $(1-z)/2$, y por lo tanto convergerá cuando esta razón tenga módulo menor que 1, es decir, cuando $|z-1|<2$. En consecuencia, el radio de convergencia de (3) es $R=2$, y su suma será

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-z}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\dfrac{1-z}{2}} = \frac{2}{z+1}.$$

Se concluye que el radio de convergencia de la serie (2) también es $R=2$, y que su suma vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(z-1)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-z}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\frac{2}{z+1} = \frac{1}{z+1}.$$

□

6. **[1 punto]** Encontrar los valores de $z \in \mathbb{C}$ para los cuales $e^{3z}=1$.

Resolución. Como $e^{3z}=1=e^0$ y la exponencial compleja es periódica de periodo $2\pi i$, necesariamente $3z=2k\pi i$ ($k\in\mathbb{Z}$), de donde

$$z=\frac{2k\pi i}{3} \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

□

7. **[1 punto]** Si $z=x+iy$, determinar: (*i*) $\Re e^z$; (*ii*) $\Im e^z$; (*iii*) $|e^z|$.

Resolución. Se tiene:

$$e^z=e^{x+iy}=e^x e^{iy}=e^x(\cos y+i\operatorname{sen} y).$$

Por tanto: (*i*) $\Re e^z=e^x\cos y$; (*ii*) $\Im e^z=e^x\operatorname{sen} y$; (*iii*) $|e^z|=e^x$. □

8. **[1 punto]** Hallar $\operatorname{Log}(\sqrt{3}+i)$.

Resolución. Por definición,

$$\operatorname{Log}(\sqrt{3}+i)=\ln|\sqrt{3}+i|+i\operatorname{Arg}(\sqrt{3}+i).$$

Como

$$|\sqrt{3}+i|=\sqrt{3+1}=2 \quad \text{y} \quad \operatorname{Arg}(\sqrt{3}+i)=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6},$$

se concluye que

$$\operatorname{Log}(\sqrt{3}+i)=\ln 2+i\frac{\pi}{6}.$$

□

9. **[1 punto]** Calcular la potencia compleja $[2^i]$, y especificar su valor principal.

Resolución. Por definición,

$$[2^i] = \left\{ e^{i[\ln 2 + i(\operatorname{Arg} 2 + 2k\pi)]} : k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ e^{i(\ln 2 + i2k\pi)} : k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ e^{2k\pi} e^{i \ln 2} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Su valor principal se obtiene tomando $k = 0$, y resulta ser $2^i = e^{i \ln 2}$. □

10. **[1 punto]** Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, razonando la respuesta.

(i) La función $\operatorname{sen} z$ es entera.

(ii) Se cumple que $|\operatorname{sen} z| \leq 1$ $(z \in \mathbb{C})$.

Resolución.

(i) Esta afirmación es verdadera. La función $\operatorname{sen} z$ se define como

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Puesto que la función exponencial es entera, $\operatorname{sen} z$ también lo es.

(ii) Esta afirmación es falsa. El teorema de Liouville establece que toda función entera y acotada es constante. Acabamos de ver que la función $\operatorname{sen} z$ es entera; y no es constante, porque extiende al seno real, que no lo es. Se sigue del teorema de Liouville que $\operatorname{sen} z$ no puede estar acotada.

□