Autoevaluación de Variable Compleja

Tema 3: Integración compleja (soluciones)

Isabel Marrero
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

1. **[2 puntos]** Sea C el segmento rectilíneo con origen $1-i$ y extremo $1+i$. Evaluar

$$\int_C |z|^2\, dz.$$

Resolución. Una parametrización de C es $z(t) = 1+it$, con $z'(t) = i$ $(-1 \le t \le 1)$. Consecuentemente,

$$\int_C |z|^2\, dz = i\int_{-1}^{1}(1+t^2)\, dt = 2i\left[t+\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 2i\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{8i}{3}.$$

□

2. **[2 puntos]** Sea $C : z(t) = 2e^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$. Probar que

$$\left|\oint_C \frac{e^z}{z^2+1}\, dz\right| \le \frac{4\pi e^2}{3}.$$

Resolución. Aplicaremos el teorema ML. Claramente, $L = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$. Por otra parte, una cota del integrando sobre C es

$$\left|\frac{e^z}{z^2+1}\right| \le \frac{e^{|z|}}{|z|^2-1} = \frac{e^2}{4-1} = \frac{e^2}{3} = M.$$

Se concluye que una cota para la integral es

$$ML = \frac{4\pi e^2}{3}.$$

□

3. **[2 puntos]** Calcular el valor de

$$\oint_{|z|=4} \frac{e^{3z}}{(az-b)^n}\, dz,$$

siendo:

(i) $a = 1$, $b = \pi i$, $n = 1$;

(ii) $a = 1$, $b = \pi i$, $n = 7$;

(iii) $a = 2$, $b = 9\pi i$, $n = 1$.

Resolución. Pongamos $f(z) = e^{3z}$ $(z \in \mathbb{C})$; esta función es entera.

i) El punto $b = \pi i$ está dentro de $|z| = 4$. Por la primera fórmula integral de Cauchy,

$$\oint_{|z|=4} \frac{e^{3z}}{z-\pi i}\, dz = 2\pi i f(b) = 2\pi i\, e^{3\pi i} = -2\pi i.$$

ii) El punto $b = \pi i$ está dentro de $|z| = 4$. Por la segunda fórmula integral de Cauchy,

$$\oint_{|z|=4} \frac{e^{3z}}{(z-\pi i)^7}\, dz = \frac{2\pi i}{6!} f^{(6)}(b) = \frac{2\pi i}{6!}\, 3^6 e^{3\pi i} = -\frac{81\pi i}{40}.$$

iii) El teorema de Cauchy-Goursat implica que

$$\oint_{|z|=4} \frac{e^{3z}}{2z-9\pi i}\, dz = \frac{1}{2}\oint_{|z|=4} \frac{e^{3z}}{z-9\pi i/2}\, dz = 0.$$

En efecto, ahora el punto $z = 9\pi i/2$ es exterior a $|z| = 4$, de manera que el integrando es holomorfo en $|z| \leq 4$.

□

4. **[2 puntos]** Evaluar

$$\oint_C \frac{\cos z}{z^4 + z^2}\, dz,$$

donde $C : |z - 2i| = 4$, positivamente orientada.

Resolución. Factorizando

$$z^4 + z^2 = z^2(z^2 + 1) = z^2(z - i)(z + i)$$

encontramos que los ceros del denominador son $z = 0$ (doble), $z = i$ y $z = -i$, todos ellos interiores a C. Rodeamos cada uno de estos ceros con circunferencias C_i $(i = 1, 2, 3)$, respectivamente, de radios lo suficientemente pequeños como para que cada una quede en el exterior de las otras pero dentro de C. Las fórmulas integrales de Cauchy permiten escribir:

$$\oint_{C_1} \frac{\cos z}{z^4 + z^2}\, dz = \oint_{C_1} \frac{\frac{\cos z}{z^2+1}}{z^2}\, dz = \frac{2\pi i}{1!} \left[\frac{\cos z}{z^2 + 1}\right]'_{z=0} = 2\pi i \left.\frac{-(z^2 + 1)\operatorname{sen} z - 2z\cos z}{(z^2 + 1)^2}\right|_{z=0} = 0;$$

$$\oint_{C_2} \frac{\cos z}{z^4 + z^2}\, dz = \oint_{C_2} \frac{\frac{\cos z}{z^2(z+i)}}{z - i}\, dz = 2\pi i \left.\frac{\cos z}{z^2(z + i)}\right|_{z=i} = 2\pi i\, \frac{\cos i}{-2i} = -2\pi i\, \frac{\cos i}{2i} = -\pi \cos i;$$

$$\oint_{C_3} \frac{\cos z}{z^4 + z^2}\, dz = \oint_{C_3} \frac{\frac{\cos z}{z^2(z-i)}}{z + i}\, dz = 2\pi i \left.\frac{\cos z}{z^2(z - i)}\right|_{z=-i} = 2\pi i\, \frac{\cos(-i)}{2i} = 2\pi i\, \frac{\cos i}{2i} = \pi \cos i.$$

Finalmente, aplicando el teorema de Cauchy-Goursat para dominios múltiplemente conexos concluimos que

$$\oint_C \frac{\cos z}{z^4 + z^2}\, dz = \sum_{i=1}^{3} \oint_{C_i} \frac{\cos z}{z^4 + z^2}\, dz = 0.$$

□

5. **[2 puntos]** Sea $f(z) = z^2 - 3z + 2$. Encontrar el máximo absoluto de $|f(z)|$ en $|z| \leq 1$.

Resolución. Si $|z| \leq 1$, entonces

$$|f(z)| \leq |z|^2 + 3|z| + 2 \leq 6.$$

Por el principio del módulo máximo, éste se alcanza en la frontera $|z| = 1$. Por inspección, para $z = -1$ encontramos que

$$|f(-1)| = |1 + 3 + 2| = 6.$$

Consecuentemente, el máximo absoluto es 6. □