

Autoevaluación de Variable Compleja

Tema 4: Funciones meromorfas (enunciados)

Isabel Marrero
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

1. [2 puntos] Si z_0 es un polo simple de una función f , ¿puede ocurrir que $\text{Res}(f, z_0) = 0$? Razonar la respuesta.

2. [2 puntos] Se considera la función racional

$$f(z) = \frac{(z+1)^3 - 2(z+1)^2 + 4(z+1) + 7}{(z+1)^2}.$$

(i) Justificar que $z = -1$ es una singularidad aislada de $f(z)$.

(ii) Desarrollar $f(z)$ en una serie de Laurent válida para $0 < |z+1| < \infty$.

(iii) A la vista del desarrollo anterior, clasificar la singularidad de $f(z)$ en $z = -1$ y hallar $\text{Res}(f, -1)$.

3. [2 puntos] Es sabido que la función $f(z) = \text{tg } z$ tiene polos en los puntos $z_k = (2k+1)\pi/2$, con $\text{Res}(f, z_k) = -1$ ($k \in \mathbb{Z}$). Aplicar el teorema de los residuos para evaluar

$$\oint_C \text{tg } z \, dz,$$

si $C : |z-1| = 1$.

4. [2 puntos] Usando el teorema de los residuos, calcular

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^6+1} dx.$$

5. [2 puntos] ¿Cuántos ceros tiene la función $g(z) = e^z - 3z^4$ en el disco unidad abierto?