Autoevaluación de Variable Compleja

Tema 4: Funciones meromorfas (soluciones)

Isabel Marrero
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

1. **[2 puntos]** Si z_0 es un polo simple de una función f, ¿puede ocurrir que $\operatorname{Res}(f,z_0)=0$? Razonar la respuesta.

   Resolución. La respuesta es negativa. Que z_0 es un polo simple de f significa que a_{-1}, el coeficiente de $(z-z_0)^{-1}$, es el único no nulo de la parte principal del desarrollo de Laurent de f válido en un entorno reducido de z_0. Por definición, $\operatorname{Res}(f,z_0)=a_{-1}$. Luego, si z_0 es un polo simple de f, necesariamente $\operatorname{Res}(f,z_0)\neq 0$. □

2. **[2 puntos]** Se considera la función racional

$$f(z)=\frac{(z+1)^3-2(z+1)^2+4(z+1)+7}{(z+1)^2}.$$

   (*i*) Justificar que $z=-1$ es una singularidad aislada de $f(z)$.

   (*ii*) Desarrollar $f(z)$ en una serie de Laurent válida para $0<|z+1|<\infty$.

   (*iii*) A la vista del desarrollo anterior, clasificar la singularidad de $f(z)$ en $z=-1$ y hallar $\operatorname{Res}(f,-1)$.

   Resolución.

   (*i*) Las funciones racionales son derivables en todo punto de $\mathbb{C}$, excepto en los ceros del denominador, que constituyen un conjunto finito. Por tanto, siempre es posible encontrar un entorno reducido de cada uno de esos ceros donde la función es holomorfa.

   (*ii*) Distribuyendo el numerador entre el denominador, encontramos que el desarrollo de Laurent buscado es

$$f(z)=(z+1)-2+\frac{4}{z+1}+\frac{7}{(z+1)^2}.$$

   (*iii*) Como la parte principal del desarrollo se trunca en el término de orden $n=2$ resulta que $z=-1$ es un polo doble. Además, $\operatorname{Res}(f,-1)=4$.

   □

3. **[2 puntos]** Es sabido que la función $f(z)=\operatorname{tg} z$ tiene polos en los puntos $z_k=(2k+1)\pi/2$, con $\operatorname{Res}(f,z_k)=-1$ $(k\in\mathbb{Z})$. Aplicar el teorema de los residuos para evaluar

$$\oint_C \operatorname{tg} z\,dz,$$

   si $C:|z-1|=1$.

   Resolución. El único polo de f encerrado por C es $z_0=\pi/2$. Se infiere del teorema de los residuos que

$$\oint_C \operatorname{tg} z\,dz=2\pi i\operatorname{Res}(f,z_0)=-2\pi i.$$

   □

4. **[2 puntos]** Usando el teorema de los residuos, calcular

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^6+1}\,dx.$$

   Resolución. Puesto que el integrando es una función par,

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^6+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{x^6+1}\,dx$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1}\,dx = V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{x^6+1}\,dx.$$

Consideramos la función de variable compleja

$$f(z) = \frac{z^2}{z^6+1}.$$

Los polos de f son las raíces de la ecuación $z^6 = -1$, es decir, las raíces sextas de -1:

$$z_k = e^{(2k+1)\pi/6} \quad (k = 0, 1, \dots, 5).$$

De ellos, retenemos $z_0 = e^{i\pi/6}$, $z_1 = e^{i\pi/2}$ y $z_2 = e^{i5\pi/6}$, que son los situados en el semiplano superior, y los rodeamos por el contorno $C = [-R, R] + C_R$, donde C_R es una semicircunferencia superior de radio R. Por el teorema de los residuos,

$$\oint_{C_R} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=0}^{2} \operatorname{Res}(f, z_k).$$

Ya que el grado del denominador de $f(z)$ excede al grado del numerador en más de dos unidades, se tiene[1]:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0.$$

Por tanto,

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=0}^{2} \operatorname{Res}(f, z_k).$$

Calculamos los residuos[2], obteniendo:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{6i};$$
$$\operatorname{Res}(f, z_1) = -\frac{1}{6i};$$
$$\operatorname{Res}(f, z_2) = \frac{1}{6i}.$$

Así pues,

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \frac{1}{6i} = \frac{\pi}{3},$$

y finalmente:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{2}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

□

5. **[2 puntos]** ¿Cuántos ceros tiene la función $g(z) = e^z - 3z^4$ en el disco unidad abierto?

Resolución. Pongamos $f(z) = 3z^4$ $(z \in \mathbb{C})$. Tanto f como g son funciones enteras; además, f tiene cuatro ceros en $|z| < 1$. Como

$$|f(z) - g(z)| = |e^z| \le e^{|z|} = e < 3 = 3|z|^4 = |3z^4| = |f(z)| \quad (|z| = 1),$$

el teorema de Rouché asegura que g tiene el mismo número de ceros que f en $|z| < 1$, es decir, cuatro. □

[1] Proposición 5.2 (p. 21) de los apuntes del Tema 4.
[2] Proposición 4.8 (p. 14) de los apuntes del Tema 4.