FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

José Francisco Gómez González

Benjamín González Díaz

María de la Peña Fabiani Bendicho

Ernesto Pereda de Pablo

Universidad de La Laguna

Departamento de Ingeniería Industrial

Tema 1: Generalidades y CC en régimen estacionario

PUNTOS OBJETO DE ESTUDIO

- Generalidades
- Análisis de circuitos por el método matricial.
- Teoremas de circuitos:
  - Superposición
  - Thevenin
  - Norton
  - Teorema de Millman y máxima transferencia de potencia

Análisis de circuitos en CC

- Resolver un circuito es llegar a conocer las tensiones e intensidades que existen en sus elementos. Se considera que lo que se busca es conocer las tensiones e intensidades de las ramas del mismo.
- Para obtener las ecuaciones necesarias para resolver el problema se aplica:
  - La ley de ohm
  - Ley de Kirchhoff de la corriente (1ª ley de Kirchhoff): La suma de todas las corrientes en cualquier nodo de un circuito es igual a cero.
  - Ley de Kirchhoff del voltaje (2ª ley de Kirchhoff): La suma de todos los voltajes alrededor de cualquier trayectoria cerrada en un circuito es igual a cero.
- En la práctica:
  - El método de voltajes de nodo y
  - El método de corriente de malla.

Método de los voltajes de nodo

- Se asigna a cada nudo una corriente
- Se le da a cada corriente un sentido arbitrario (generalmente el mismo sentido a todas).
- **Se escriben la ley de Kirchhoff para las tensiones en cada bucle para obtener las ecuaciones correspondientes.**
- Por cada elemento del circuito debe pasar al menos una corriente
- Dos elementos en distintas ramas no pueden tener asignadas las mismas corrientes
- Se obtienen las corrientes (incógnitas).

Método práctico

- Pasos que se deben seguir:
  - Encontrar el número de nodos que posee la red
  - Seleccionar uno de estos nodos como tierra
  - Aplicar para cada uno de los nodos restantes el siguiente proceso con el fin de obtener la ecuación correspondiente a cada nodo:
    - Elegido un nodo, "pintar" las intensidades salientes, por cada una de sus ramas.
    - Aplicar la LKC
    - Obtener la intensidad que circula por cada rama aplicando la siguiente regla

$$I = \frac{V_{nudo\,\mathrm{salida}} - V_{nudo\,\mathrm{llegada}} + V_{\mathrm{gen\ atrav}}}{R_{atravesada}}$$

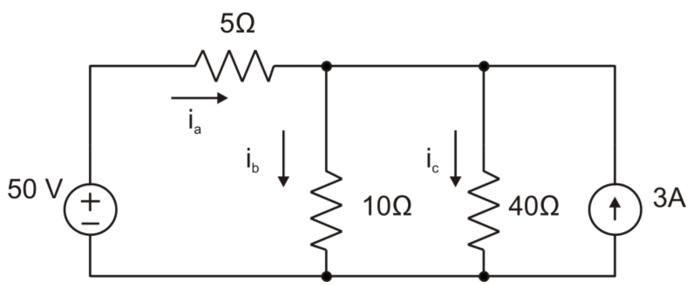
- A la tensión de cada generador atravesado se le debe anteponer el signo del polo por donde sale la corriente de él.

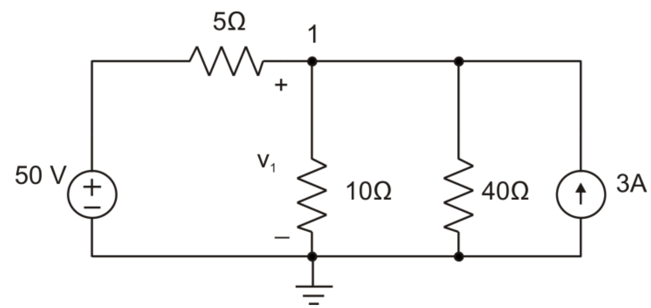
Ejemplo

$$i_a = \frac{50 - v_1}{5}$$

$$i_b = \frac{v_1}{10}$$

$$i_c = \frac{v_1}{40}$$





$$i_a - i_b - i_c + 3 = 0$$

$$\frac{50 - v_1}{5} - \frac{v_1}{10} - \frac{v_1}{40} + 3 = 0$$

$$v_1 = 40\text{V}$$

$$i_a = \frac{50 - v_1}{5} = 2A$$

$$i_b = \frac{v_1}{10} = 4A$$

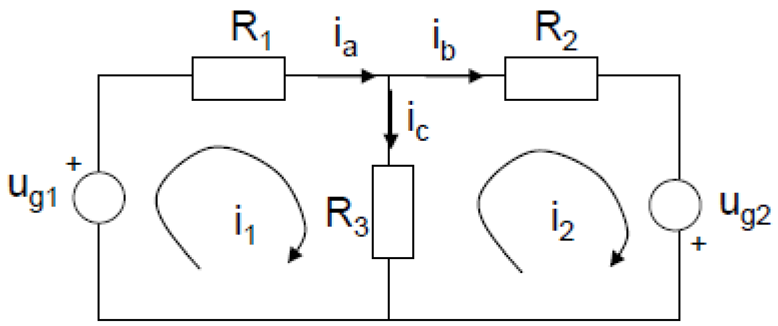
$$i_c = \frac{v_1}{40} = 1A$$

Método corrientes de malla (I)

- Consiste en aplicar el segundo lema de Kirchhoff a todas las mallas de un circuito
- La suma algebraica de las tensiones a lo largo de cualquier línea cerrada en un circuito es nula en todo instante. $\Sigma\, v(t) = 0$
  - Malla: Conjunto de ramas que forman un camino cerrado y que no contienen ninguna otra línea cerrada en su interior.
- Es conveniente sustituir todos los generadores de corriente reales por generadores de tensión reales

Método corrientes de malla (II)

- Se asigna a cada malla una corriente desconocida, circulando en el mismo sentido en todas las mallas «corriente de malla».

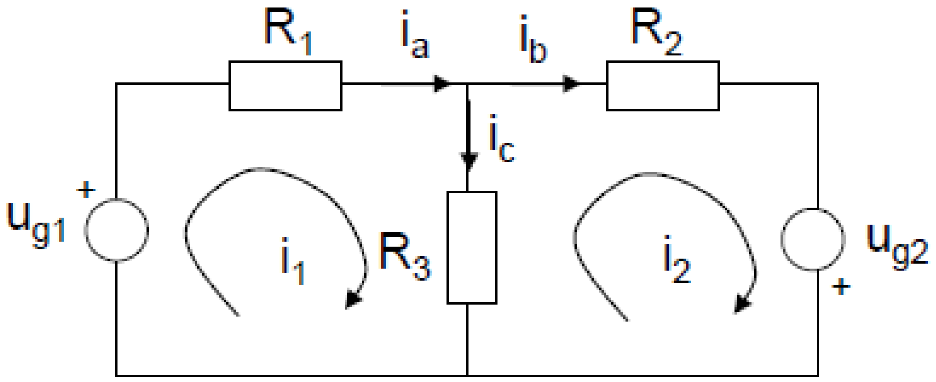


- Las corrientes que circulan por cada rama se pueden calcular en función de las corrientes de mallas

$$i_a=i_1 \qquad i_b=i_2 \qquad i_c=i_1-i_2$$

- Se aplica el segundo lema de Kirchhoff a cada malla. (Consideraremos las elevaciones de tensión negativas y las caídas de tensión positivas)

Método corrientes de malla (III)



$$\left.\begin{aligned} -u_{g1} + i_1 R_1 + (i_1 - i_2) R_3 = 0 \\ -u_{g2} + i_2 R_2 + (i_2 - i_1) R_3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Método matricial (I)

- Método de las corrientes de mallas
- Se tiene, en forma general

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

- Matriz de coeficientes simétrica
- Obtención de los coeficientes R_{ii} y R_{ij}
- Obtención de Ii
- i=1 ,..., número de corrientes
- Resolución directa de sistemas de ecuaciones con varias incógnitas

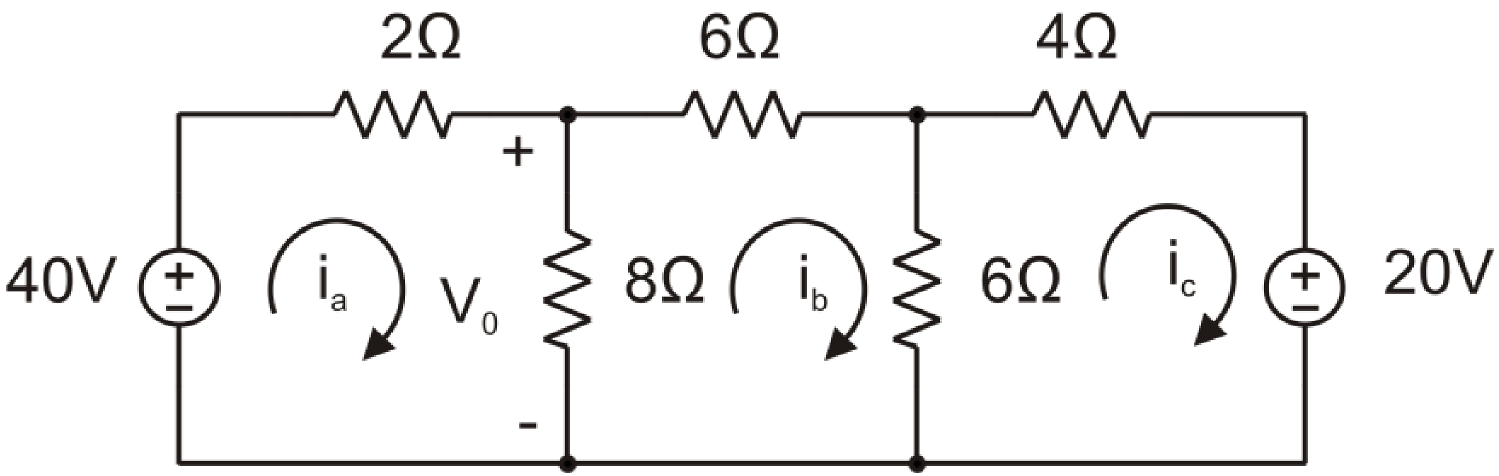
Método matricial (II)

- Método de los voltajes en los nudos (ejemplo)
- Se tiene, en forma general

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} V_a / R_a \\ V_b / R_b \end{pmatrix}$$

- Matriz de coeficientes simétrica
- Obtención de los coeficientes G_{ii} y G_{ij}
- Obtención de V_i
- i=1 ,..., número de nudos principales -1

Ejemplo

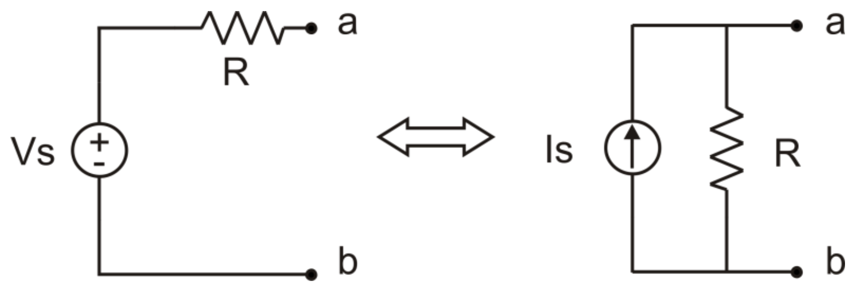


$$\left.\begin{aligned} 40 &= 2i_a + 8(i_a - i_b) \\ 0 &= 6i_b + 6(i_b - i_c) + 8(i_b - i_a) \\ -20 &= 4i_c + 6(i_c - i_b) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 10i_a - 8i_b + 0i_c &= 40 \\ -8i_a + 20i_b - 6i_c &= 0 \\ 0i_a - 6i_b + 10i_c &= -20 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} i_a &= 5.6A \\ i_b &= 2.0A \\ i_c &= -0.80A \end{aligned}$$

Universidad de La Laguna
Departamento de Ingeniería Industrial

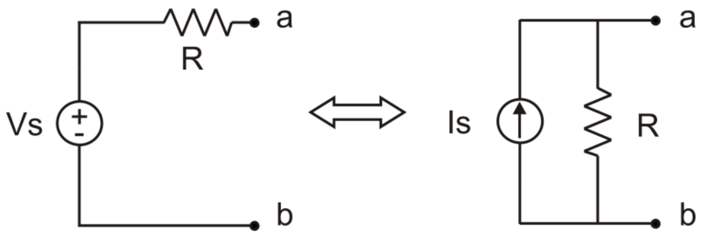
Transformaciones de fuentes (I)

- Una transformación de fuente permite sustituir a una fuente de voltaje en serie con una resistencia, con una fuente de corriente en paralelo con el mismo resistor, o viceversa.



- Necesitamos calcular la relación entre Vs e Is, que garantice que las dos configuraciones de la figura sean equivalentes con respecto a los nodos a-b.
- La equivalencia se logra si cualquier resistor R_L experimenta el mismo flujo de corriente, y por lo tanto la misma caída de voltaje, si se conecta entre los nodos a-b en cualquiera de los dos circuitos.

Transformaciones de fuentes (II)



$$I_L = \frac{V_s}{R + R_L}$$

$$I_L = \frac{R}{R + R_L} I_s$$

$$V_R = V_{R_L}$$

$$R I_R = R_L I_L$$

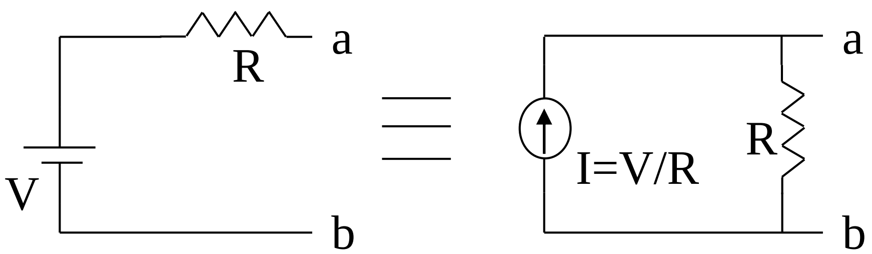
Como la corriente es la misma en los dos circuitos se debe cumplir que

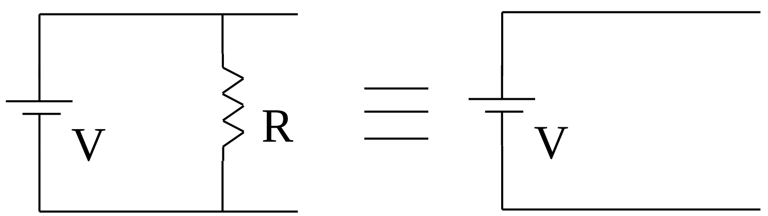
$$V_S = R I_S$$

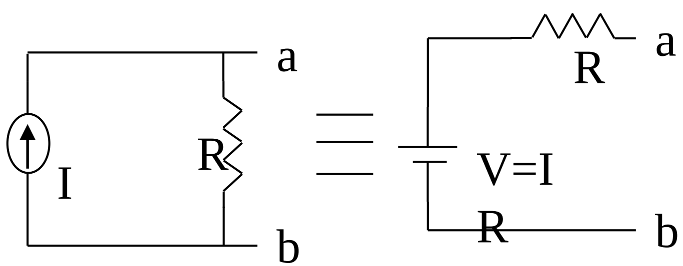
$$I_S = \frac{V_S}{R}$$

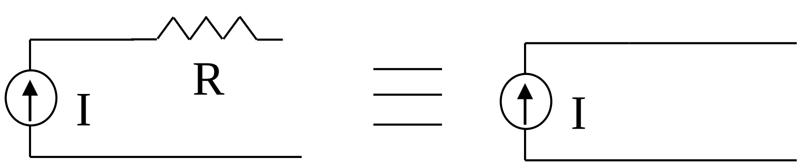
$$I_S = I_R + I_L = \frac{R_L I_L}{R} + I_L = \frac{R_L + R}{R} I_L$$

Transformaciones de fuentes (III)

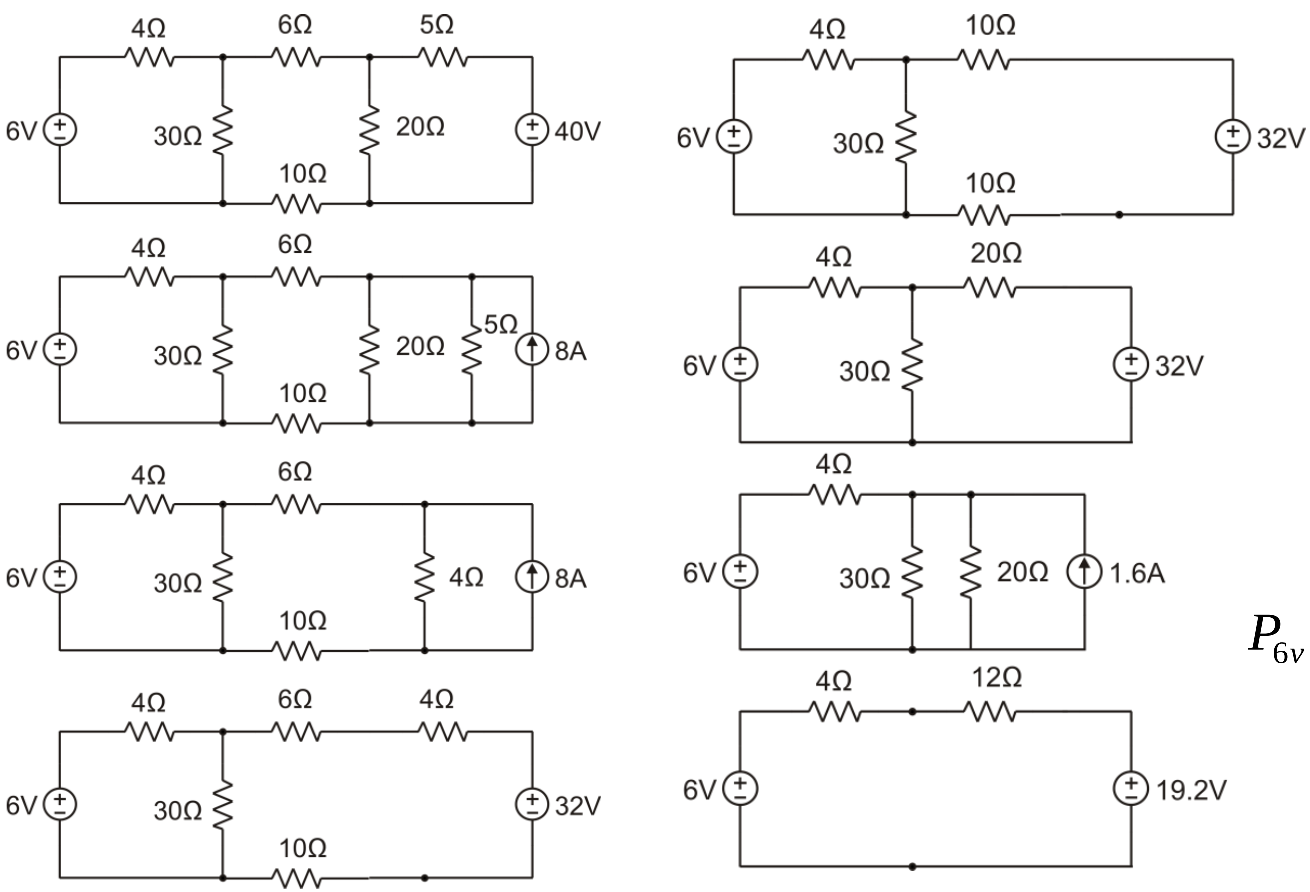








Ejemplo



$$I = \frac{6-19.2}{4+12} = -0.825A$$

$$P_{6v} = -(-0.825)*6 = 4.95W$$

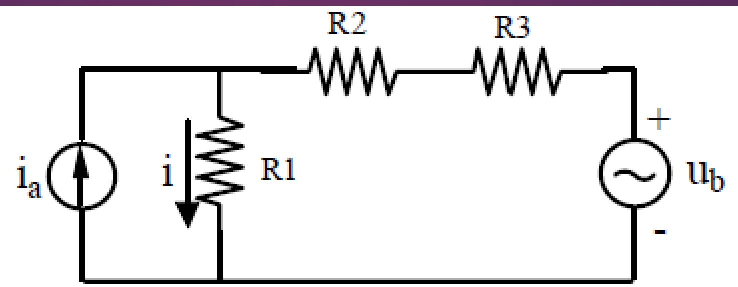
Teoremas de circuitos

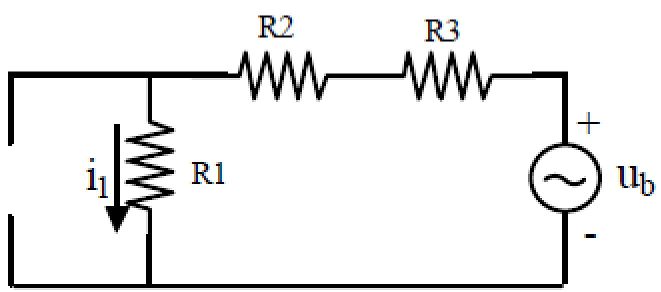
- Los teoremas únicamente son aplicables a redes lineales.
- Un circuito es lineal cuando todos sus componentes son lineales, esto es verifican una relación u/i lineal.
- ¿Una resistencia tiene u/i lineal?
- ¿Una bobina tiene u/i lineal?
- ¿Un condensador tiene u/i lineal?

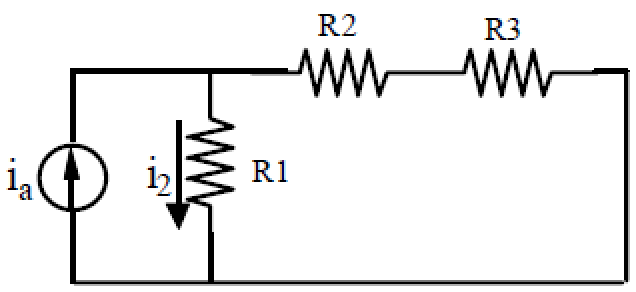
Principio de superposición

- La respuesta de un circuito lineal a varias fuentes de excitación actuando simultáneamente, es igual a la suma de las respuestas que se obtendrían cuando actuase cada una de ellas por separado.
- El teorema de superposición es aplicable para el cálculo de tensión e intensidad, pero no para calcular la potencia.
- Se estudia el efecto de cada fuente anulando las demás fuentes independientes
  - Fuentes de tensión ⇒ Cortocircuito
  - Fuentes de corriente ⇒ Circuito abierto
- Si en el circuito existen fuente dependientes se mantienen en todos los circuitos en los que se desdoble el original.

Ejemplo



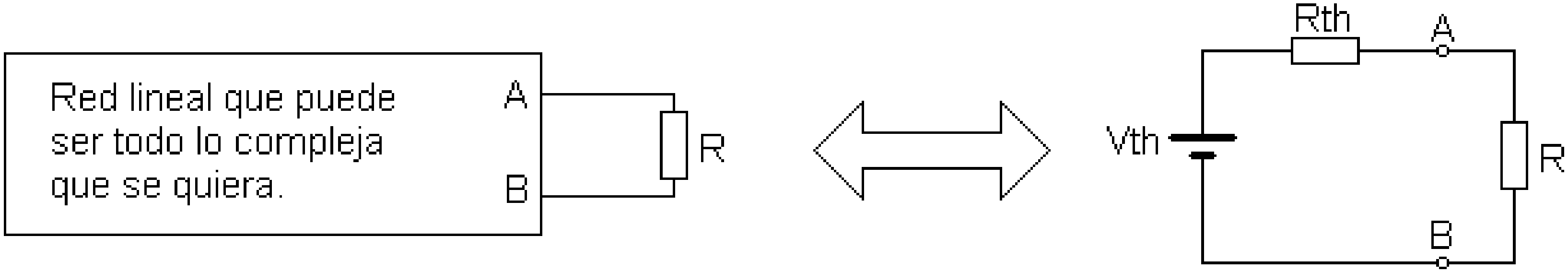




$$i=i_1+i_2$$

Teorema de Thevenin

- Cualquier red compuesta por elementos pasivos y activos (independientes o dependientes) se puede sustituir, desde el punto de vista de sus terminales externos, por un generador de tensión u_{th} denominado generador Thevenin, más una resistencia en serie R_{th}.



- Este teorema resulta muy útil cuando se desea estudiar lo que ocurre en una rama de un circuito

Cálculo de Thevenin (I)

- **Método 1:**
- Para calcular V_{th} y R_{th} hay que dar dos valores a la resistencia conectada entre los terminales A y B, y analizar el circuito para ambos valores:
- R= ∞
  - Por lo tanto se queda en circuito abierto.
  - Se calcula la tensión entre A y B en circuito abierto.

$$V_{AB}=V_0=V_{th}$$

- R=0
  - Por lo tanto es un cortocircuito.
  - Se calcula la corriente que circula entre A y B (corriente de cortocircuito).

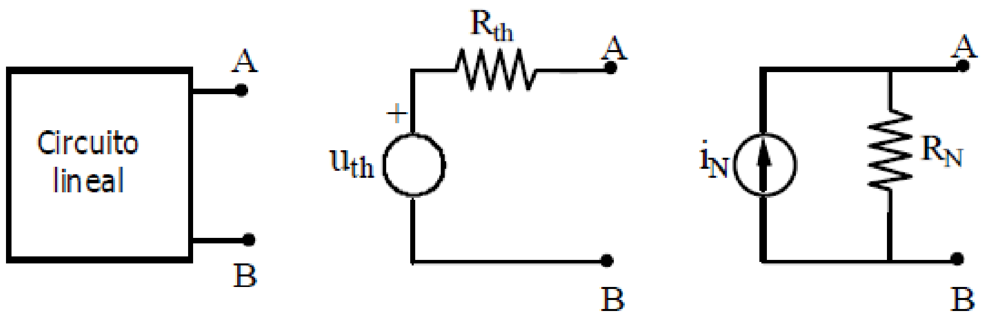
$$R_{th} = \frac{V_{th}}{i_{sc}}$$

Cálculo de Thevenin (II)

- **Método 2:**
- **Este método es sólo aplicable en el caso que la red sólo tenga fuentes independientes**.
- Calcular V_{th} como el método anterior
- **Para calcular la R_{th}:**
  1. Desactivamos todas las fuentes independientes : V=0 Cortocircuito; I=0 Circuito abierto
  2. Calculamos la resistencia resultante en los terminales.

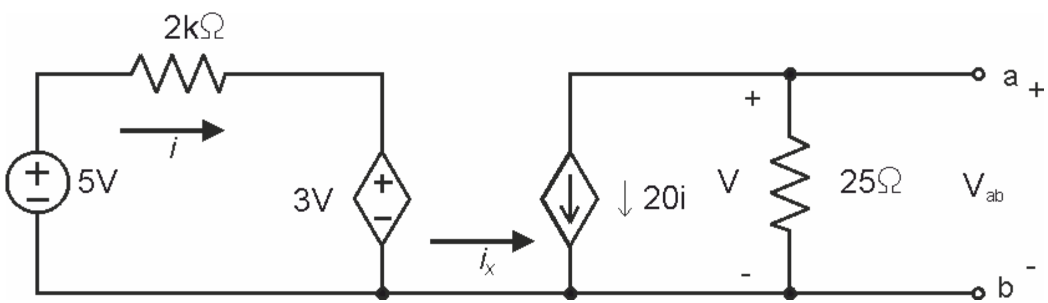
Teorema de Norton

- Cualquier circuito puede sustituirse, respecto a un par de terminales, por una fuente de corriente I_N (igual a la corriente de cortocircuito) en paralelo con la resistencia *R* vista desde esos terminales.



$$R_N = R_{th} \qquad i_N = \frac{u_{th}}{R_{th}}$$

Equivalente de Thevenin con fuentes dependientes (I)

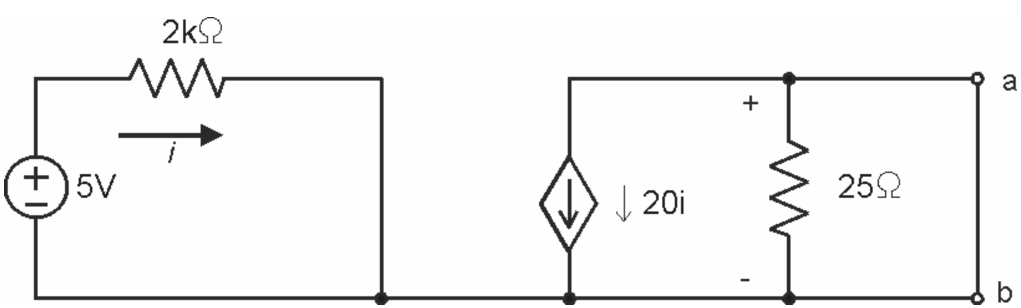


Con i_x=0

$$V_{Th} = V_{ab} = (-20i)(25) = -500i$$

$$i = \frac{5-3v}{2000} = \frac{5-3V_{Th}}{2000}$$

V_{Th}=-5V



Por lo tanto i_{sc} =*-20i*. Como el voltaje que controla a la fuente dependiente de corriente es cero, la intensidad que circula es

$$i = \frac{5}{2000} = 2.5mA$$

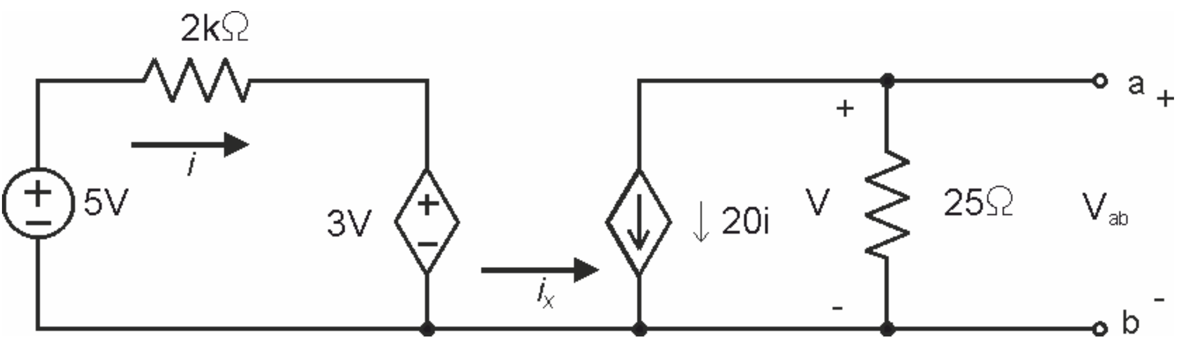
Por lo tanto

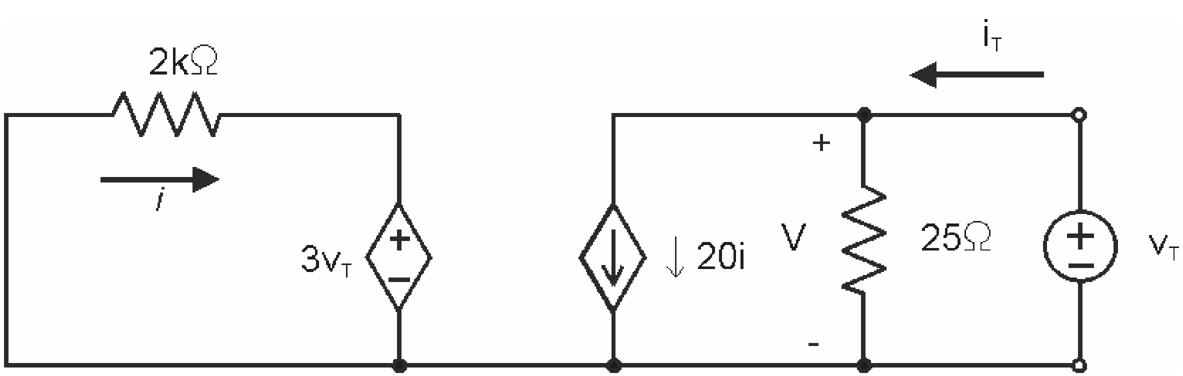
$$i_{sc} = -20(2.5) = -50mA.$$

Y finalmente

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_{sc}} = \frac{-5}{-50} \cdot 10^3 = 100\Omega$$

Equivalente de Thevenin con fuentes dependientes (II)





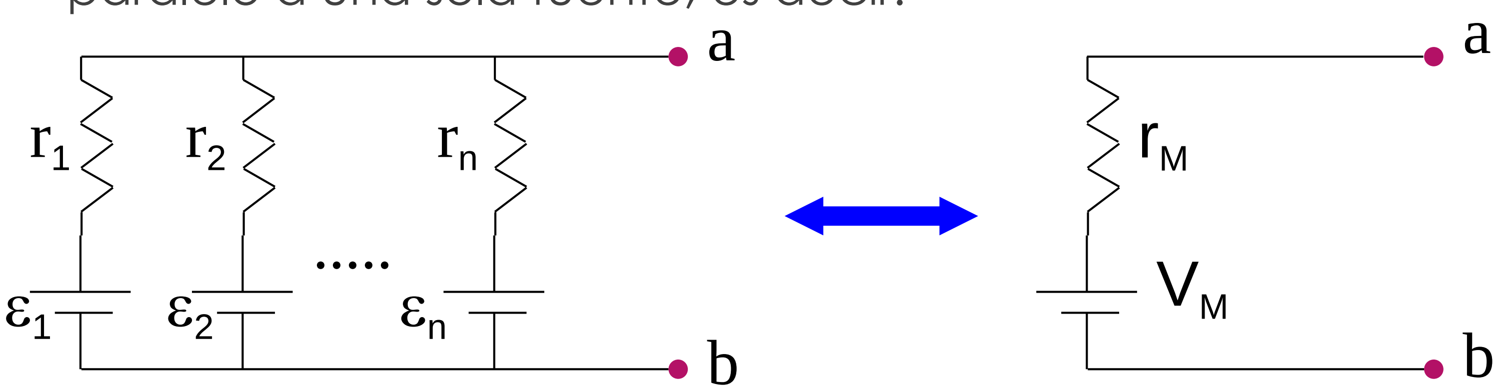
Primero desactivamos la fuente de tensión independiente del circuito y luego excitamos el circuito desde los terminales a y b con una fuente de tensión de prueba o con una fuente de corriente de prueba.

Equivalente de Thevenin con fuentes dependientes (III)

- Para calcular la resistencia de Thevenin, simplemente resolvemos el circuito para hallar el cociente entre la tensión y la corriente en la fuente de prueba; es decir, $R_{Th} = v_T / i_T$. A partir del circuito anterior se obtiene:
- $i_T = \frac{v_T}{25} + 20i; \; i = \frac{-3 \cdot v_T}{2} mA.$
- Por lo que sustituyendo
- $i_T = \frac{v_T}{25} - \frac{60 \cdot v_T}{2000}$
- Y por lo tanto
- $\frac{i_T}{v_T} = \frac{1}{25} - \frac{6}{200} = \frac{1}{100} \Rightarrow R_{Th} = \frac{v_T}{i_T} = 100\Omega.$

Teorema de Millman

- Permite reducir una asociación de fuentes de tensión reales en paralelo a una sola fuente, es decir:

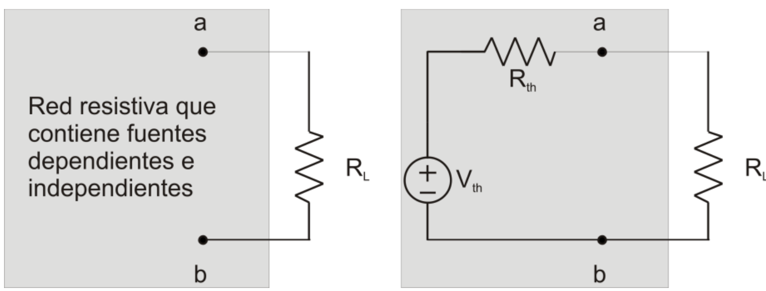


$$V_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i / r_i}{\sum_{i=1}^{n+k} 1 / r_i}$$

$$\frac{1}{r_M} = \sum_{i=1}^{n+k} \frac{1}{r_i}$$

Transferencia de potencia máxima

- Suponemos una red resistiva que contiene fuentes dependientes e independientes y un par designado de terminales a, b al cual se conectará una carga RL. El problema se limita a determinar el valor de RL que permita entregar una potencia máxima a RL. El primer paso en este proceso es reconocer que una red resistiva siempre puede remplazarse por su equivalente Thévenin.



$$p = i^2 R_L = \left(\frac{V_{th}}{R_{th} + R_L} \right)^2 R_L$$

- V_{th} y R_{th} son constantes, por lo que la potencia disipada es una función de R_L. Haciendo la derivada de la potencia disipada respecto R_L e igualando a 0, obtendremos el valor R_L a la que la potencia es máxima.

$$\frac{dp}{dR_L} = V_{th}^2 \left[\frac{(R_{th} + R_L)^2 - R_L 2(R_{th} + R_L)}{(R_{th} + R_L)^4} \right] = 0$$

$$R_L = R_{th}$$

$$p_{\max} = \frac{V_{th}^2}{4R_L}$$