FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

José Francisco Gómez González

Benjamín González Díaz

María de la Peña Fabiani Bendicho

Ernesto Pereda de Pablo

Universidad de La Laguna

Departamento de Ingeniería Industrial

Tema 4: Sistemas trifásicos

PUNTOS OBJETO DE ESTUDIO

- Generalidades sobre sistemas trifásicos
- Conceptos básicos
- Magnitudes básicas
- Sistemas trifásicos equilibrados
- Potencia en sistemas equilibrados
- Comparación entre sistemas equilibrados Δ-Y

Sistemas monofásicos

- Hasta el momento hemos estado siempre trabajando con una única fuente de voltaje alterna o con varias fuentes de voltaje que eran "independientes" entre sí.
- El nombre que recibe este tipo de sistemas eléctricos es "sistema monofásico" y cada tensión estaba caracterizada por una amplitud (o valor eficaz) y una frecuencia ω.

$$v(t) = \sqrt{2} V_{ef} \, sen(\omega t)$$

Sistemas trifásicos

- En ciertas ocasiones, sin embargo, es conveniente trabajar con **“sistemas trifásicos”: tres fuentes de tensión monofásicas, de igual frecuencia pero manteniendo entre sí un desfase de 120º (2π/3 radianes) constituyendo un sistema trifásico de tensiones**.
- ¿Por qué 120º? 360º/3=120º
- En este sentido, cuando tenemos tres corrientes alternas, con igual frecuencia y desfases mutuos de 120º, nos encontramos ante un sistema trifásico de corrientes.

Sistemas trifásicos

- Los sistemas trifásicos son más eficaces en el transporte de energía.
- La potencia P en sistema trifásico es constante: par en los motores constante => equilibrio mecánico en los motores trifásicos (menores vibraciones y esfuerzos).
- Ventajas en el arranque de los motores trifásicos (no precisan de arrancadores).

Definición de un sistema trifásico equilibrado (I)

Igual pulsación

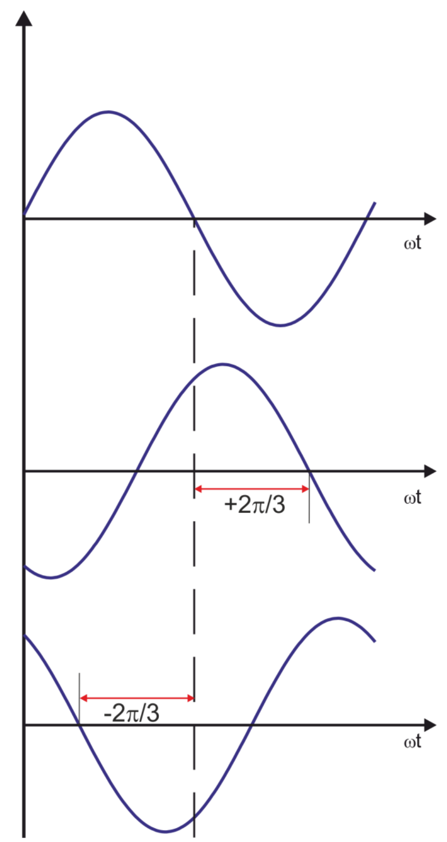
$$v_1(t) = \sqrt{2}V_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v_2(t) = \sqrt{2}V_0 \sin(\omega t + \varphi + \frac{2\pi}{3})$$

$$v_3(t) = \sqrt{2}V_0 \sin(\omega t + \varphi - \frac{2\pi}{3})$$

Igual amplitud

Desfase uniforme
De 120º



Notación de un sistema trifásico equilibrado

Notación de ondas

$$v_1(t) = \sqrt{2}V_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v_2(t) = \sqrt{2}V_0 \sin(\omega t + \varphi + \frac{2\pi}{3})$$

$$v_3(t) = \sqrt{2}V_0 \sin(\omega t + \varphi - \frac{2\pi}{3})$$

Notación fasorial

$$v_1 = V_0 \angle \varphi$$

$$v_2 = V_0 \angle \varphi + \frac{2\pi}{3}$$

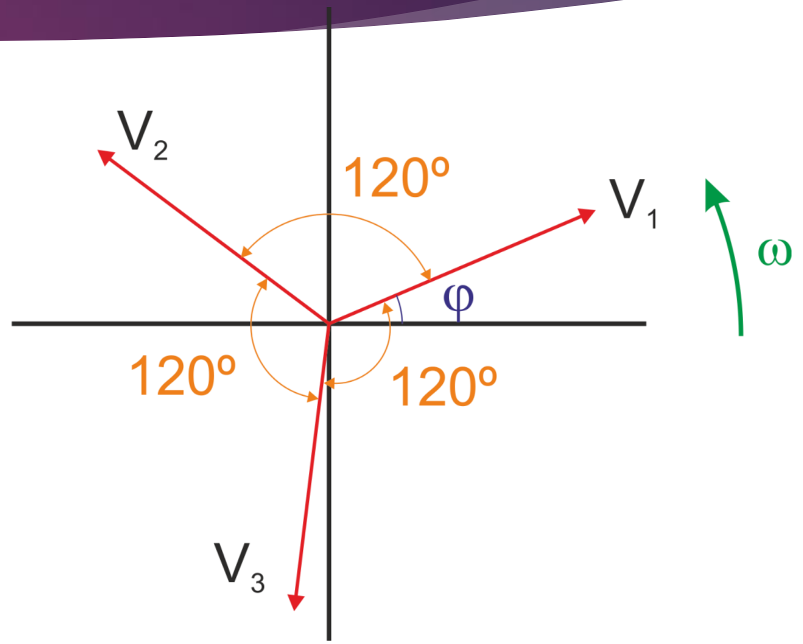
$$v_3 = V_0 \angle \varphi - \frac{2\pi}{3}$$

Diagrama fasorial

$$v_1 = V_0 \angle \varphi$$

$$v_2 = V_0 \angle \varphi + \frac{2\pi}{3}$$

$$v_3 = V_0 \angle \varphi - \frac{2\pi}{3}$$



$$v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) = \sqrt{2}V_{ef}\,sen(\omega t) + \sqrt{2}V_{ef}\,sen\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{2}V_{ef}\,sen\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

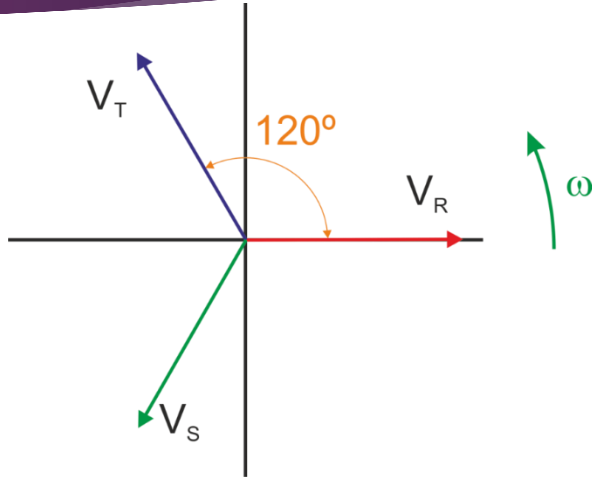
Secuencias

Secuencia directa:

$$v_R(t)=\sqrt{2}V_0\sin(\omega t+\varphi)\Rightarrow V_0\angle 0^{\circ}$$

$$v_S(t)=\sqrt{2}V_0\sin(\omega t+\varphi-\frac{2\pi}{3})\Rightarrow V_0\angle -120^{\circ}$$

$$v_T(t)=\sqrt{2}V_0\sin(\omega t+\varphi+\frac{2\pi}{3})\Rightarrow V_0\angle +120^{\circ}$$

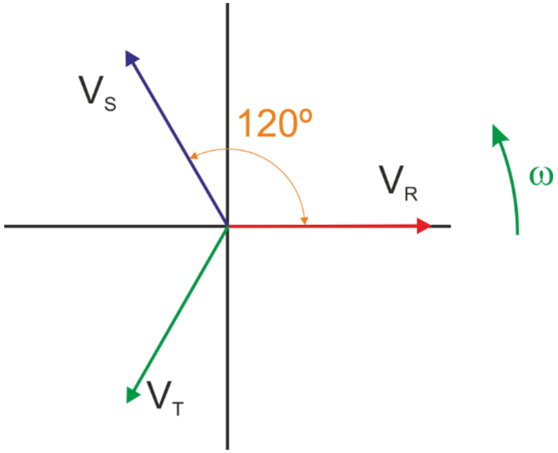


Secuencia indirecta:

$$v_R(t)=\sqrt{2}V_0\sin(\omega t+\varphi)\Rightarrow V_0\angle 0^{\circ}$$

$$v_S(t)=\sqrt{2}V_0\sin(\omega t+\varphi+\frac{2\pi}{3})\Rightarrow V_0\angle +120^{\circ}$$

$$v_T(t)=\sqrt{2}V_0\sin(\omega t+\varphi-\frac{2\pi}{3})\Rightarrow V_0\angle -120^{\circ}$$

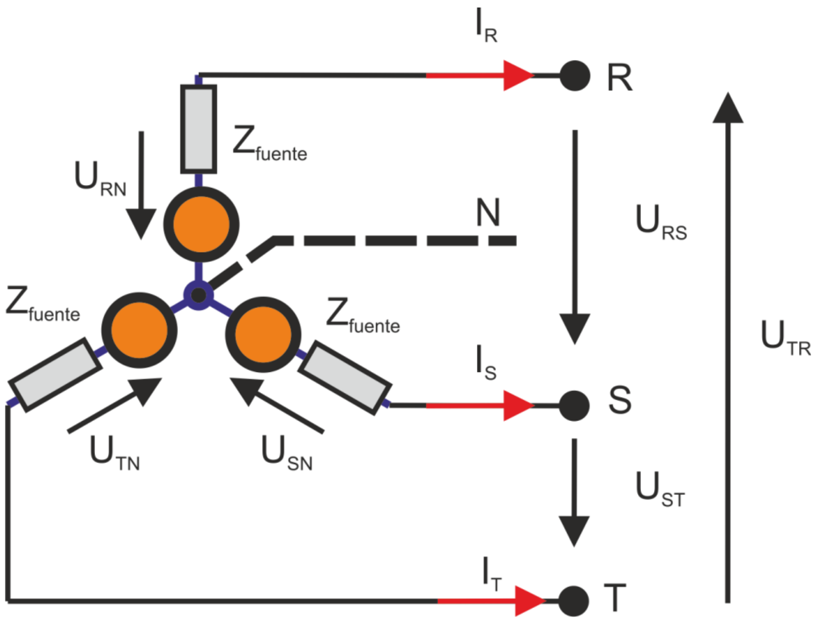


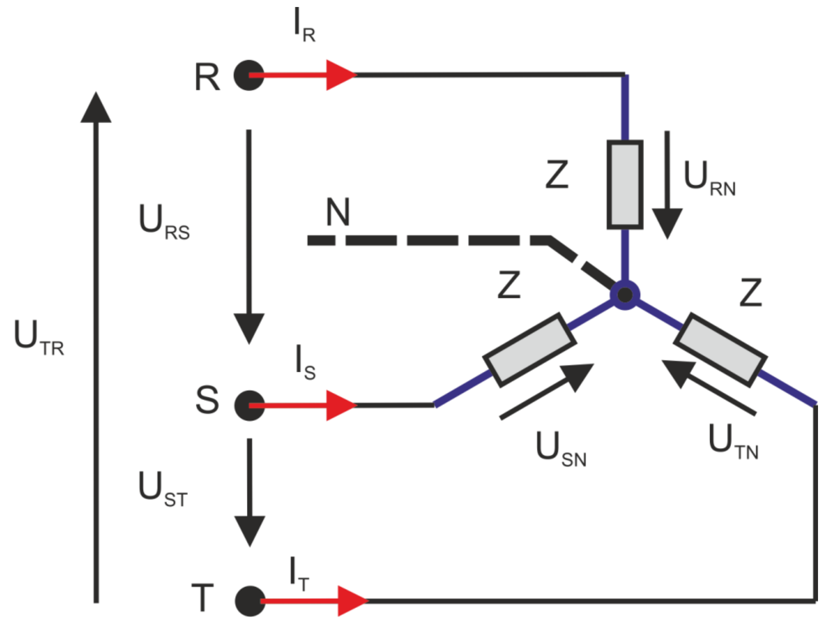
Conceptos básicos

- Tensión de fase, V_f, tensión entre extremos de fase (fase y neutro).
- Tensión de línea, V_L, tensión entre los conductores de fase de una línea trifásica.
- Intensidad de fase, I_f, intensidad que circula por una fase.
- Intensidad de línea, I_L, intensidad que circula por cada conductor que une fuente y carga.

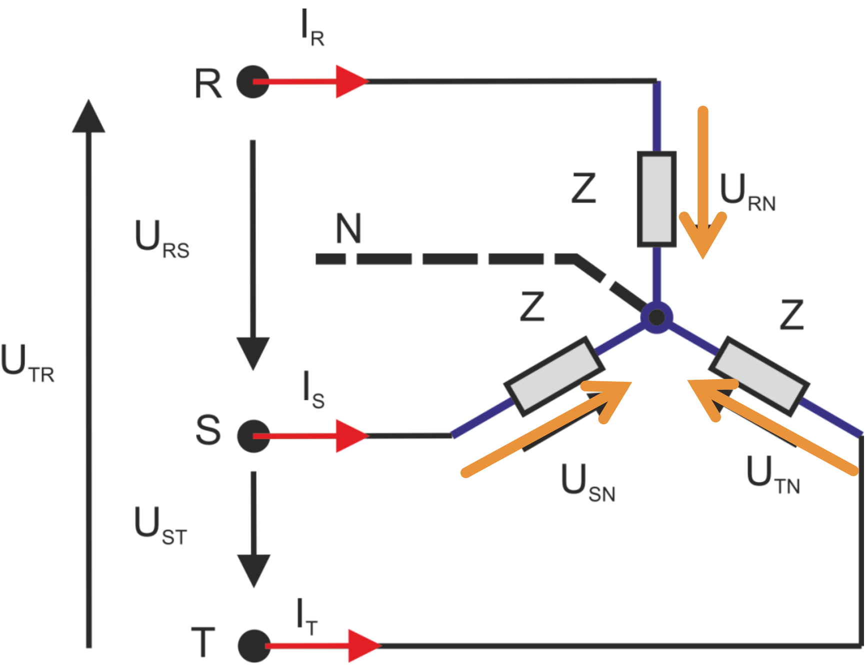
Conexión en estrella o Y

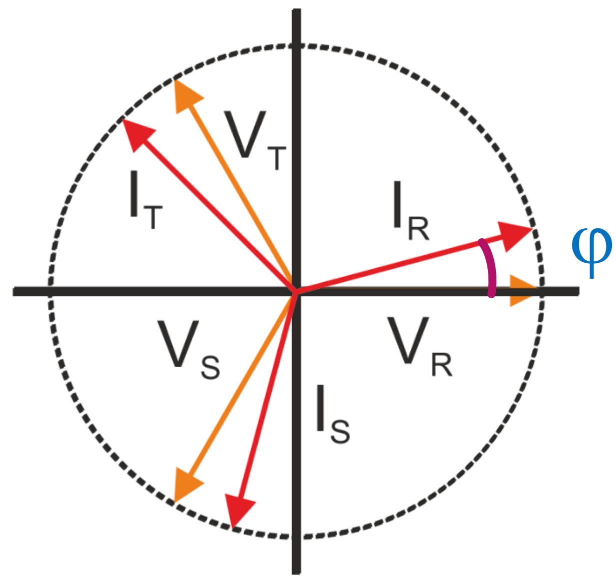
- Los tres elementos de una estrella se unen en un punto común denominado neutro (N)
  - Sistema trifásico tetrafilar: 3 fases RST con neutro N
  - Sistema trifásico trifilar: 3 fases RST sin neutro accesible





Tensiones e intensidades de fase en Y

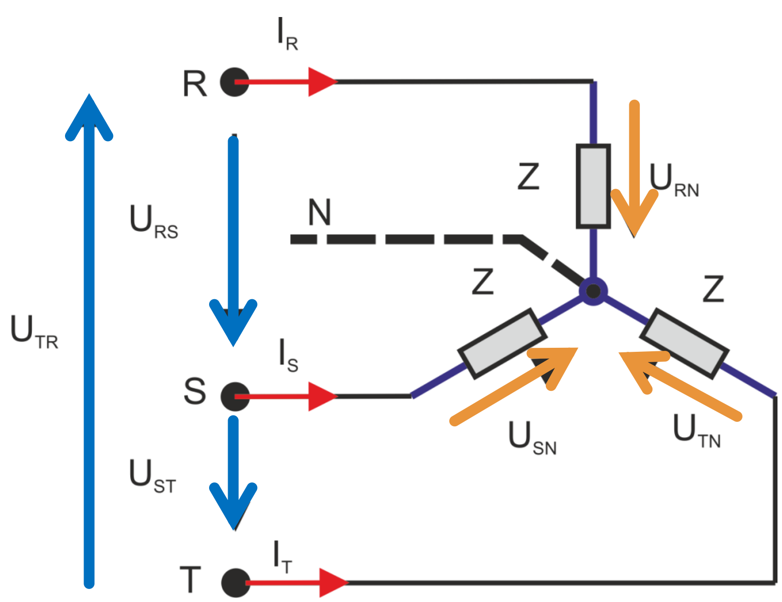




$$U_R(t)=\sqrt{2}V_{ef}\,sen(\omega t)\Leftrightarrow \underline{U_R}=V_{ef}\angle 0^o$$
$$U_S(t)=\sqrt{2}V_{ef}\,sen(\omega t-120^o)\Leftrightarrow \underline{U_S}=V_{ef}\angle -120^o$$
$$U_T(t)=\sqrt{2}V_{ef}\,sen(\omega t-240^o)\Leftrightarrow \underline{U_T}=V_{ef}\angle -240^o$$

$$I_R(t)=\sqrt{2}I_{ef}\,sen(\omega t-\varphi)\Leftrightarrow \underline{I_R}=I_{ef}\angle 0^o-\varphi$$
$$I_S(t)=\sqrt{2}I_{ef}\,sen(\omega t-120^o-\varphi)\Leftrightarrow \underline{I_S}=I_{ef}\angle -120^o-\varphi$$
$$I_T(t)=\sqrt{2}I_{ef}\,sen(\omega t-240^o-\varphi)\Leftrightarrow \underline{I_T}=I_{ef}\angle -240^o-\varphi$$

Tensiones e intensidades de línea en Y (I)



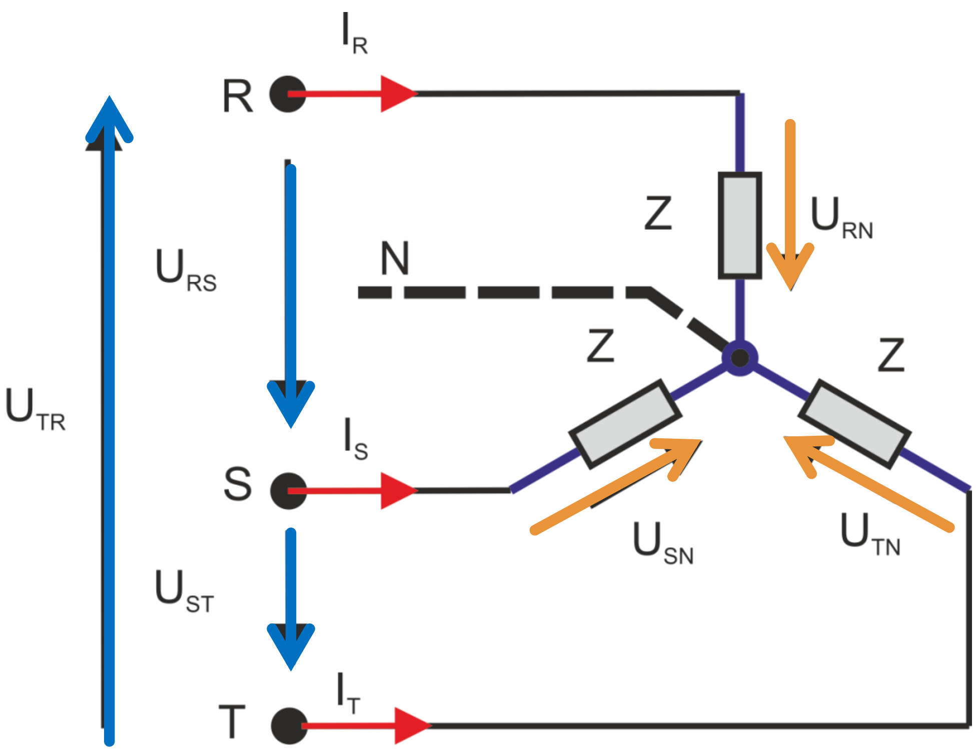
$$\underline{U_{RS}} = \underline{U_{RN}} - \underline{U_{SN}} = V_{ef}\angle 0^{o} - V_{ef}\angle -120^{o}$$
$$= V_{ef}\left(\cos 0^{o} + jsen0^{o}\right) +$$
$$-V_{ef}\left(\cos\left(-120^{o}\right) + jsen\left(-120^{o}\right)\right) =$$
$$= V_{ef}\left(1 + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = V_{ef}\left(\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$
$$\sqrt{3}V_{ef}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}V_{ef}\left(\cos 30^{o} + jsen30^{o}\right) =$$

$$= \sqrt{3}V_{ef}\angle 30^{o}$$
$$\underline{U_{ST}} = \underline{V_{SN}} + \underline{V_{NT}} = \sqrt{3}V_{ef}\angle 90^{o}$$
$$\underline{U_{TR}} = \underline{V_{TN}} + \underline{V_{NR}} = \sqrt{3}V_{ef}\angle 150^{o}$$

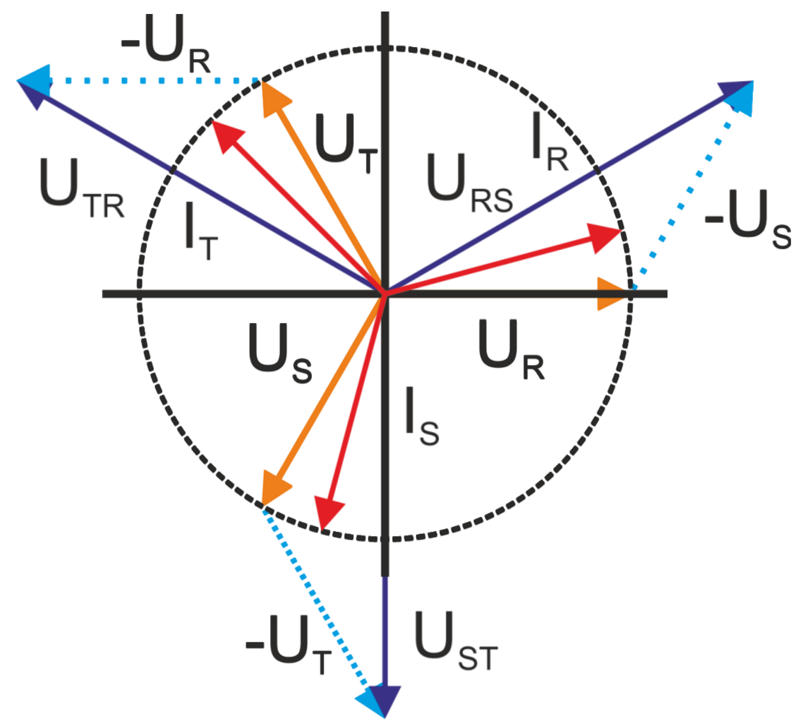
$$U_R(t) = \sqrt{2}V_{ef}\,sen(\omega t) \Leftrightarrow \underline{U_R} = V_{ef}\angle 0^{o}$$
$$U_S(t) = \sqrt{2}V_{ef}\,sen(\omega t - 120^{o}) \Leftrightarrow \underline{U_S} = V_{ef}\angle -120^{o}$$
$$U_T(t) = \sqrt{2}V_{ef}\,sen(\omega t - 240^{o}) \Leftrightarrow \underline{U_T} = V_{ef}\angle -240^{o}$$

$$I_R(t) = \sqrt{2}I_{ef}\,sen(\omega t - \varphi) \Leftrightarrow \underline{I_R} = I_{ef}\angle 0^{o} - \varphi$$
$$I_S(t) = \sqrt{2}I_{ef}\,sen(\omega t - 120^{o} - \varphi) \Leftrightarrow \underline{I_S} = I_{ef}\angle -120^{o} - \varphi$$
$$I_T(t) = \sqrt{2}I_{ef}\,sen(\omega t - 240^{o} - \varphi) \Leftrightarrow \underline{I_T} = I_{ef}\angle -240^{o} - \varphi$$

Tensiones e intensidades de línea en Y (II)



U_{ab}=U_{an}-U_{bn}



Secuencias directa e indirecta en conexión en Y (I)

Directa

$$\vec{U}_{RN} = E\angle 0^o \qquad \vec{U}_{RS} = \vec{U}_{RN} - \vec{U}_{SN} = E\angle 0^o - E\angle -120^o = \sqrt{3}\vec{U}_{RN}\angle +30^o$$

$$\vec{U}_{SN} = E\angle -120^o \qquad \vec{U}_{ST} = \vec{U}_{SN} - \vec{U}_{TN} = E\angle -120^o - E\angle +120^o = \sqrt{3}\vec{U}_{SN}\angle +30^o$$

$$\vec{U}_{TN} = E\angle +120^o \qquad \vec{U}_{TR} = \vec{U}_{TN} - \vec{U}_{RN} = E\angle -120^o - E\angle 0^o = \sqrt{3}\vec{U}_{TN}\angle +30^o$$

Inversa

$$\vec{U}_{RN} = E\angle 0^o \qquad \vec{U}_{RS} = \vec{U}_{RN} - \vec{U}_{SN} = E\angle 0^o - E\angle 120^o = \sqrt{3}\vec{U}_{RN}\angle -30^o$$

$$\vec{U}_{SN} = E\angle +120^o \qquad \vec{U}_{ST} = \vec{U}_{SN} - \vec{U}_{TN} = E\angle 120^o - E\angle -120^o = \sqrt{3}\vec{U}_{SN}\angle -30^o$$

$$\vec{U}_{TN} = E\angle -120^o \qquad \vec{U}_{TR} = \vec{U}_{TN} - \vec{U}_{RN} = E\angle -120^o - E\angle 0^o = \sqrt{3}\vec{U}_{TN}\angle -30^o$$

Secuencias directa e indirecta en conexión en Y (II)

Directa

$$\vec{U}_{RS} = \sqrt{3}\vec{U}_{RN}\angle +30^{o}$$
$$\vec{U}_{ST} = \sqrt{3}\vec{U}_{SN}\angle +30^{o}$$
$$\vec{U}_{TR} = \sqrt{3}\vec{U}_{TN}\angle +30^{o}$$

$$U_L = \sqrt{3}E$$

Tensión de línea adelanta 30º respecto a la de fase

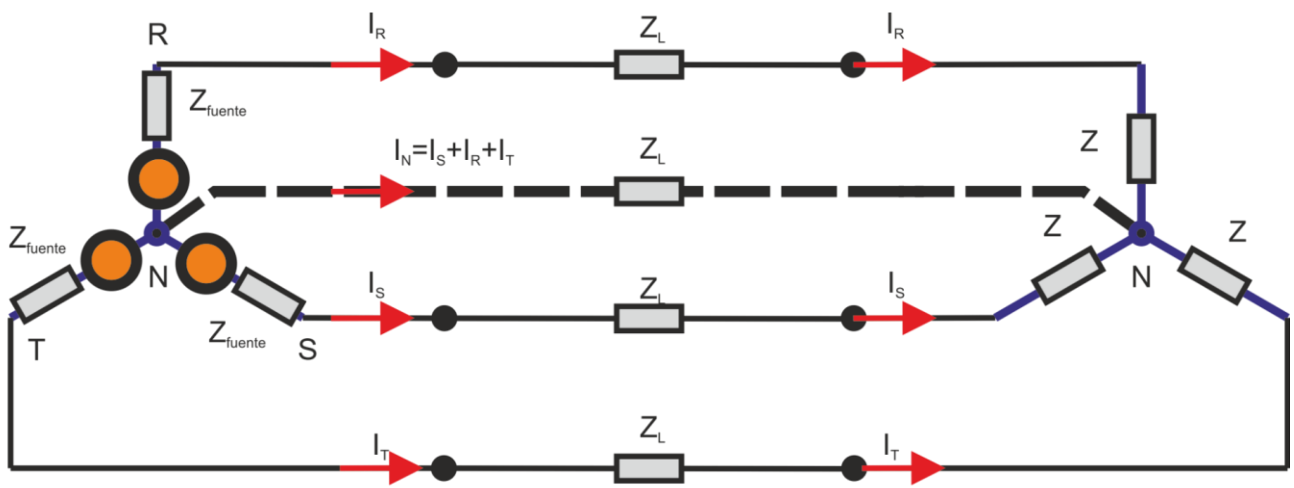
Inversa

$$\vec{U}_{RS} = \sqrt{3}\vec{U}_{RN}\angle -30^{o}$$
$$\vec{U}_{ST} = \sqrt{3}\vec{U}_{SN}\angle -30^{o}$$
$$\vec{U}_{TR} = \sqrt{3}\vec{U}_{TN}\angle -30^{o}$$

$$U_L = \sqrt{3}E$$

Tensión de línea retrasa 30º respecto a la de fase

Tensión del neutro en la estrella



$$\frac{\underline{V_N}}{\underline{Z_N}}+\frac{\underline{V_N}-\underline{V_R}}{Z+Z_L+Z_{fuente}}+\frac{\underline{V_N}-\underline{V_S}}{Z+Z_L+Z_{fuente}}+\frac{\underline{V_N}-\underline{V_T}}{Z+Z_L+Z_{fuente}}=0$$

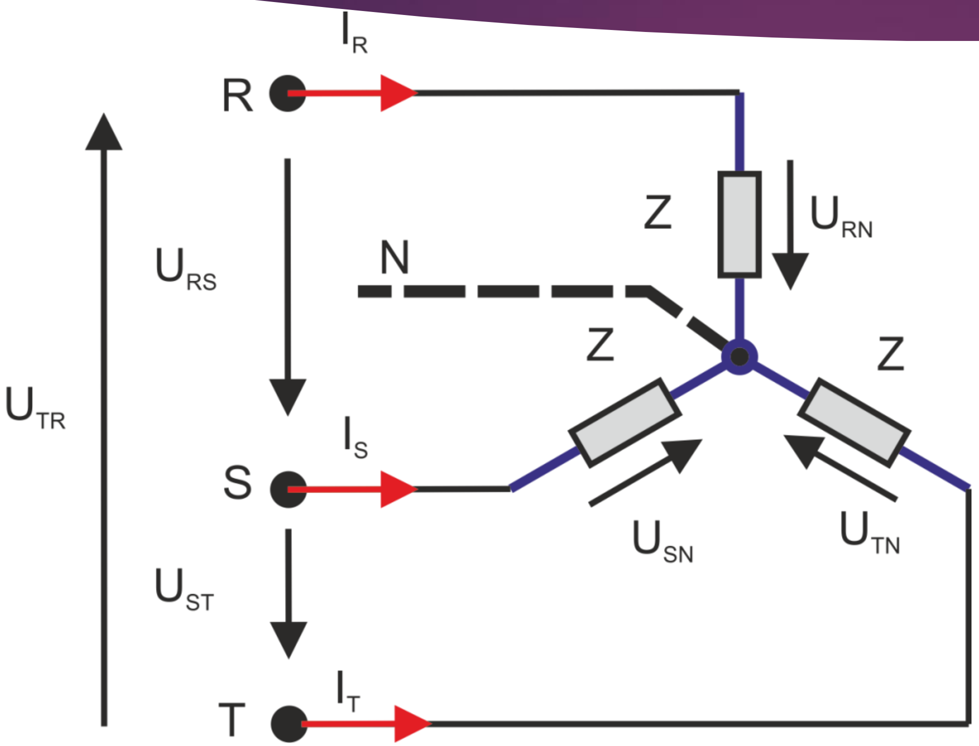
$$\underline{V_N}\left(\frac{1}{Z_N}+\frac{3}{Z+Z_L+Z_{fuente}}\right)=\frac{\underline{V_R}+\underline{V_S}+\underline{V_T}}{Z+Z_L+Z_{fuente}}=\frac{0}{Z+Z_L+Z_{fuente}}$$

$$\underline{V_N}=0$$

Neutro

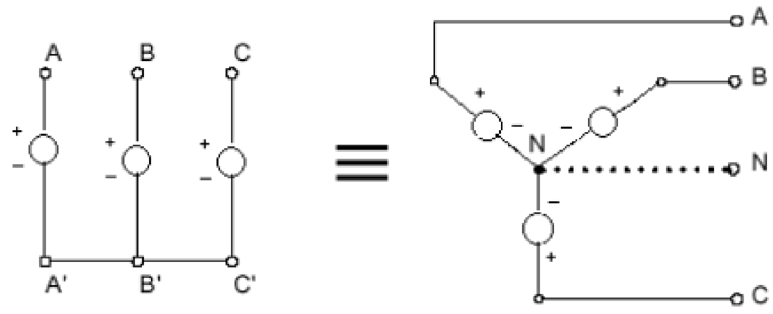
- Esto significa que en un sistema trifásico totalmente equilibrado no hay diferencia de tensión entre los puntos neutros, independientemente de su impedancia Zn.
- Por tanto, si ponemos "hilo neutro" entre estos dos puntos, por él no circulará ninguna intensidad.
- ¿Qué sentido tiene entonces poner hilo neutro?
- Ninguno en un sistema totalmente equilibrado, pero en la práctica es imposible construir un sistema trifásico equilibrado (se aproximan a ello).

Resumen conexión estrella



$$U_{LY} = \sqrt{3}U_{fY}$$

$$I_{LY} = I_{fY}$$

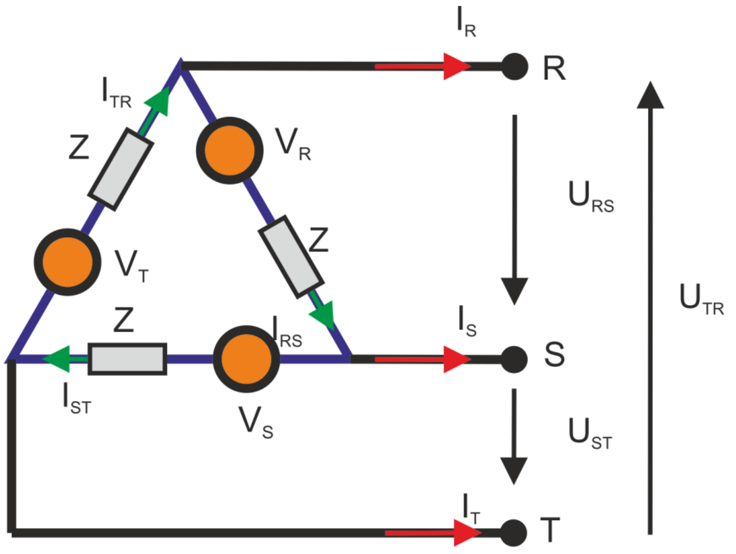


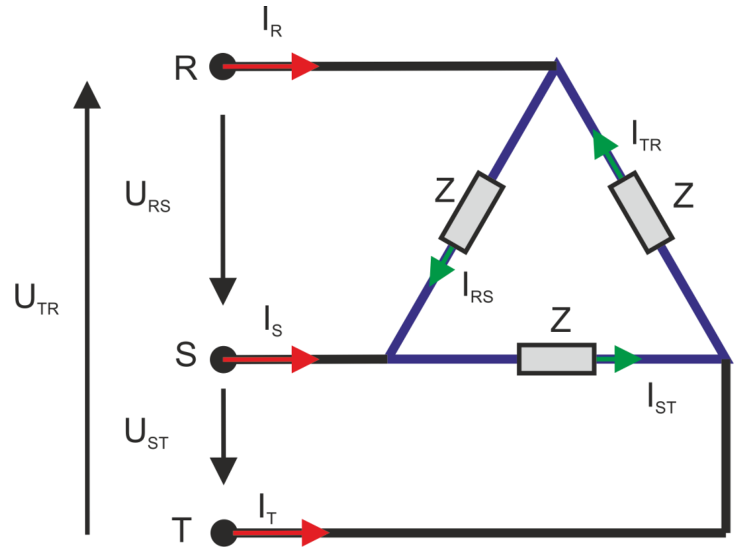
En secuencia directa: RST, V_L adelanta en 30º a V_f

En secuencia indirecta: RTS, V_L retrasa en 30º a V_f

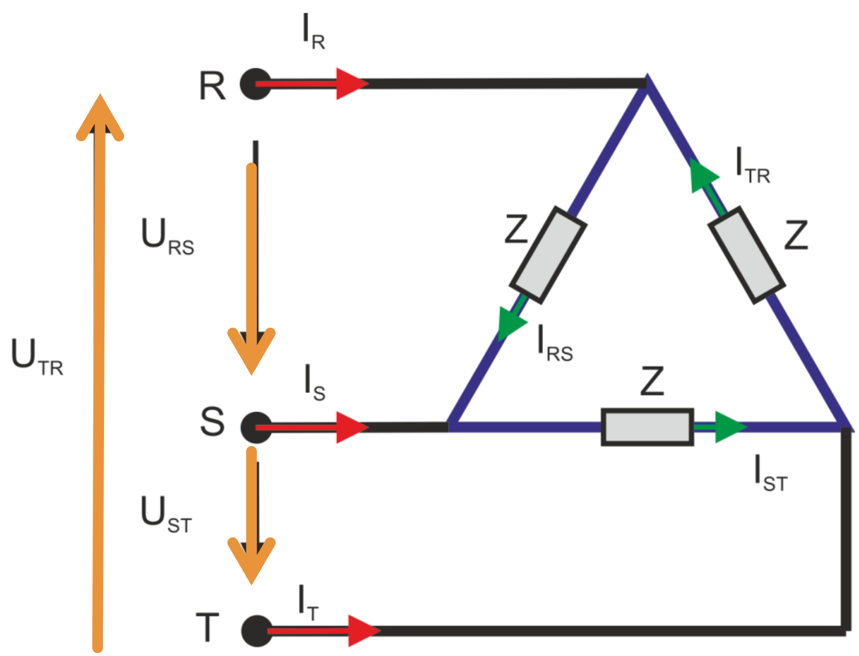
Conexión en triángulo o D (Δ)

- Los tres elementos de un triángulo se conectan en serie formando un circuito cerrado.
- No existe neutro
- Sistema trifásico trifilar: tres fases RST sin neutro accesible

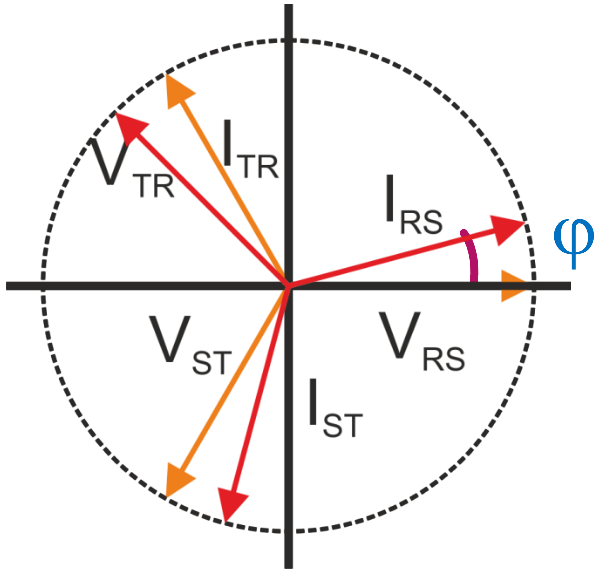




Tensiones e intensidades de fase en Δ (I)



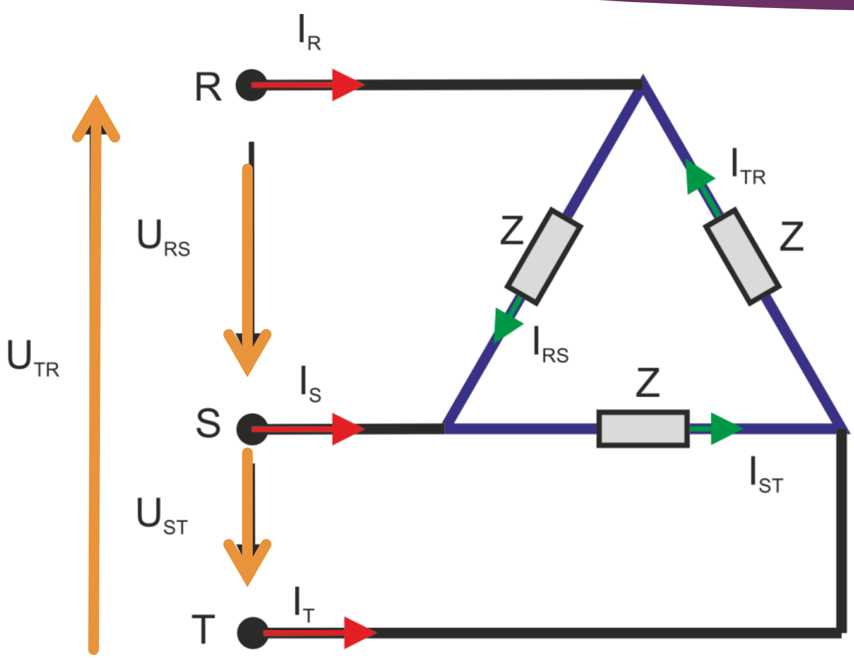
$$U_L = E = U_{RS} = U_{ST} = U_{TR}$$



$$U_{RS}(t) = \sqrt{2}V_{ef}\,sen(\omega t) \Leftrightarrow \underline{U_{RS}} = V_{ef}\angle 0^o$$
$$U_{ST}(t) = \sqrt{2}V_{ef}\,sen(\omega t - 120^o) \Leftrightarrow \underline{U_{ST}} = V_{ef}\angle -120^o$$
$$U_{TR}(t) = \sqrt{2}V_{ef}\,sen(\omega t - 240^o) \Leftrightarrow \underline{U_{TR}} = V_{ef}\angle -240^o$$

$$I_{RS}(t) = \sqrt{2}I_{ef}\,sen(\omega t - \varphi) \Leftrightarrow \underline{I_R} = I_{ef}\angle 0^o - \varphi$$
$$I_{ST}(t) = \sqrt{2}I_{ef}\,sen(\omega t - 120^o - \varphi) \Leftrightarrow \underline{I_S} = I_{ef}\angle -120^o - \varphi$$
$$I_{TR}(t) = \sqrt{2}I_{ef}\,sen(\omega t - 240^o - \varphi) \Leftrightarrow \underline{I_T} = I_{ef}\angle -240^o - \varphi$$

Tensiones e intensidades de línea en Δ (I)



$$\underline{I_R} = \underline{I_{RS}} - \underline{I_{TR}} = I_{ef}\angle 0^o - I_{ef}\angle -120^o$$
$$= I_{ef}\left(\cos 0^o + jsen0^o\right) +$$
$$-I_{ef}\left(\cos\left(-120^o\right) + jsen\left(-120^o\right)\right) =$$
$$= I_{ef}\left(1 + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = I_{ef}\left(\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$
$$\sqrt{3}I_{ef}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}I_{ef}\left(\cos 30^o + jsen30^o\right) =$$

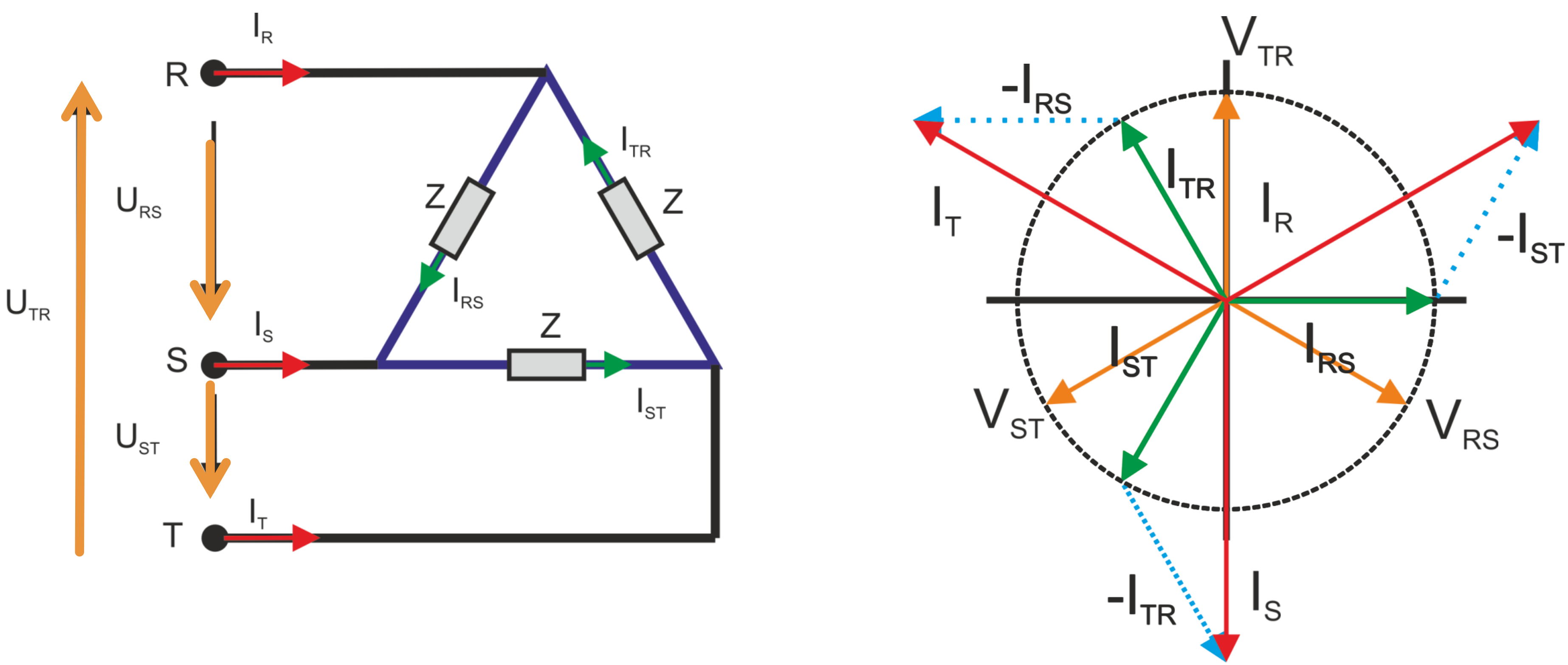
$$= \sqrt{3}I_{ef}\angle 30^o$$
$$\underline{I_S} = \underline{I_{ST}} - \underline{I_{TR}} = \sqrt{3}V_f\angle 90^o$$
$$\underline{I_T} = \underline{I_{TR}} - \underline{I_{ST}} = \sqrt{3}V_f\angle 150^o$$

$$U_{RS}(t) = \sqrt{2}V_{ef}sen(\omega t) \Leftrightarrow \underline{U_{RS}} = V_{ef}\angle 0^o$$
$$U_{ST}(t) = \sqrt{2}V_{ef}sen(\omega t - 120^o) \Leftrightarrow \underline{U_{ST}} = V_{ef}\angle -120^o$$
$$U_{TR}(t) = \sqrt{2}V_{ef}sen(\omega t - 240^o) \Leftrightarrow \underline{U_{TR}} = V_{ef}\angle -240^o$$

$$I_{RS}(t) = \sqrt{2}I_{ef}sen(\omega t - \varphi) \Leftrightarrow \underline{I_R} = I_{ef}\angle 0^o - \varphi$$
$$I_{ST}(t) = \sqrt{2}I_{ef}sen(\omega t - 120^o - \varphi) \Leftrightarrow \underline{I_S} = I_{ef}\angle -120^o - \varphi$$
$$I_{TR}(t) = \sqrt{2}I_{ef}sen(\omega t - 240^o - \varphi) \Leftrightarrow \underline{I_T} = I_{ef}\angle -240^o - \varphi$$

Universidad de La Laguna
Departamento de Ingeniería Industrial

Tensiones e intensidades de línea en Δ (II)



Secuencias directa e indirecta en conexión en Δ

Directa

$$\vec{I}_{RS} = I_F \angle 0$$
$$\vec{I}_{ST} = I_F \angle -120^o$$
$$\vec{I}_{TR} = I_F \angle +120^o$$

$$\vec{I}_R = \vec{I}_{RS} - \vec{I}_{TR} = \sqrt{3}\vec{I}_{RS} \angle -30^o$$
$$\vec{I}_S = \vec{I}_{ST} - \vec{I}_{RS} = \sqrt{3}\vec{I}_{ST} \angle -30^o$$
$$\vec{I}_T = \vec{I}_{TR} - \vec{I}_{ST} = \sqrt{3}\vec{I}_{TR} \angle -30^o$$

Intensidad de línea retrasa 30º respecto a la de fase

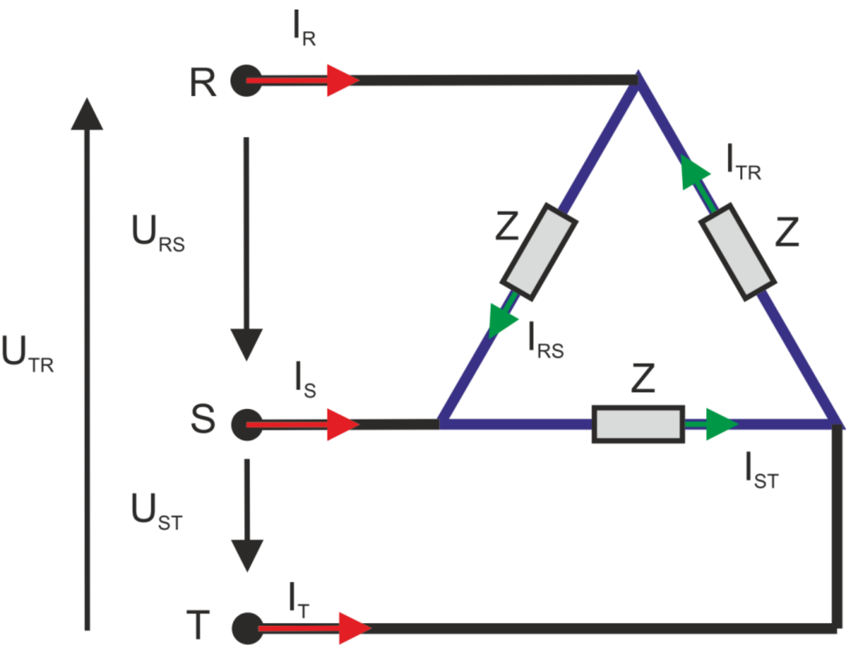
Inversa

$$\vec{I}_{RS} = I_F \angle 0$$
$$\vec{I}_{ST} = I_F \angle +120^o$$
$$\vec{I}_{TR} = I_F \angle -120^o$$

$$\vec{I}_R = \vec{I}_{RS} - \vec{I}_{TR} = \sqrt{3}\vec{I}_{RS} \angle +30^o$$
$$\vec{I}_S = \vec{I}_{ST} - \vec{I}_{RS} = \sqrt{3}\vec{I}_{ST} \angle +30^o$$
$$\vec{I}_T = \vec{I}_{TR} - \vec{I}_{ST} = \sqrt{3}\vec{I}_{TR} \angle +30^o$$

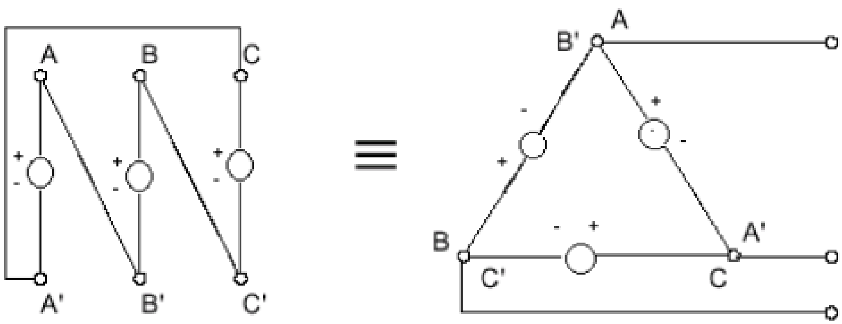
Intensidad de línea retrasa 30º respecto a la de fase

Resumen conexión en Δ



$$U_{L\Delta} = U_{f\Delta}$$

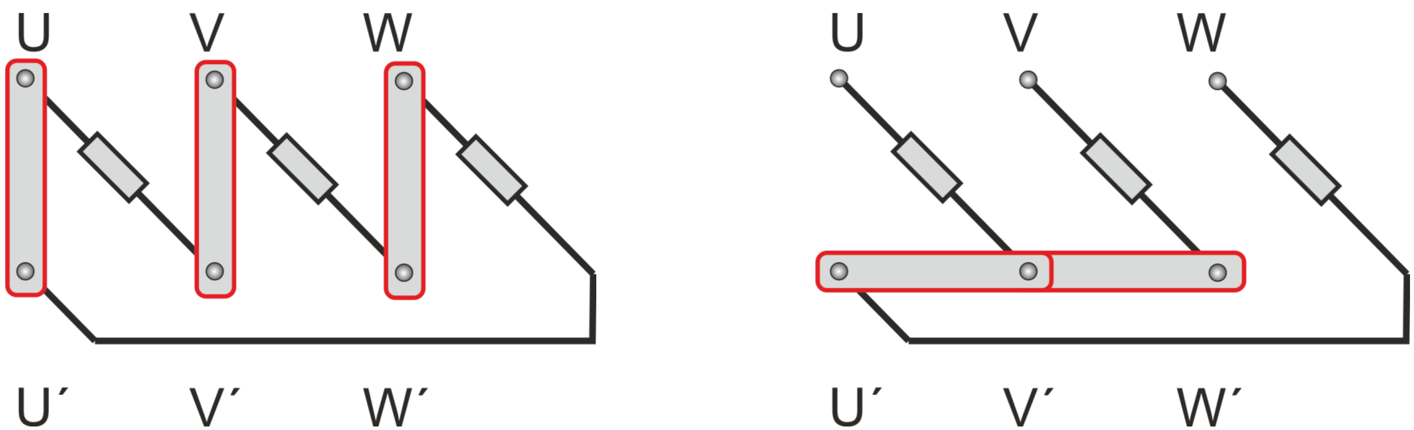
$$I_{L\Delta} = \sqrt{3} I_{f\Delta}$$



En secuencia directa: RST, I_L retrasa en 30° a I_f
En secuencia indirecta: RTS, I_L adelanta en 30° a I_f

Comparación Y-Δ

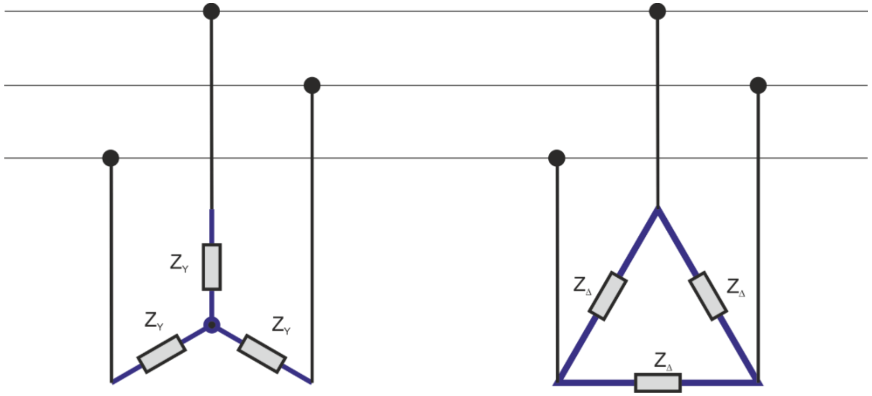
- Un generador trifásico: 3 devanados monofásicos que pueden conectarse como se desee.



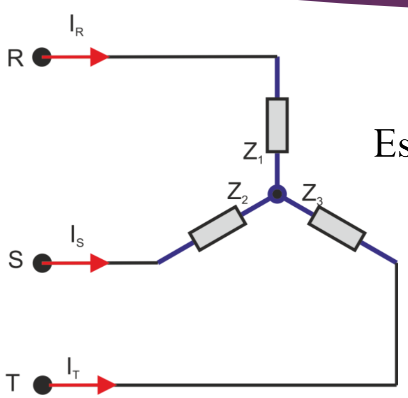
- Y: el voltaje entre dos líneas es mayor que el de fase en √ 3
- D : la corriente de línea es mayor que la de fase en √ 3
- Por tanto:
  - La conexión en Y requiere mayores aislamientos (mayores Vs)
  - La conexión en D requiere cables de mayor sección (mayores Is)

Cargas equilibradas. Conversión Y-Δ (I)

- Al igual que los generadores, las cargas (impedancias o receptores) se pueden conectar en Y o en D
- Se demuestra que $Z_Y = \dfrac{Z_\Delta}{3}$
  - Se dice que la carga está equilibrada si las tres impedancias son iguales
  - Conexiones equivalentes: la potencia en cada impedancia, a la misma tensión de red, es la misma.

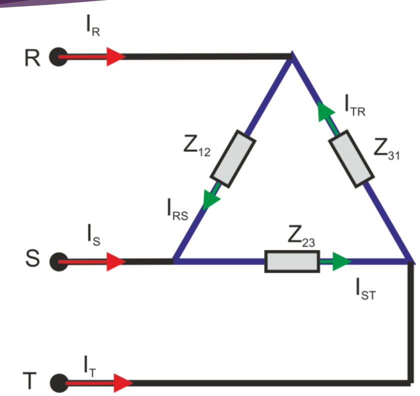


Cargas equilibradas. Conversión *Y-Δ* (II)



Estrella

Triángulo
(Delta)



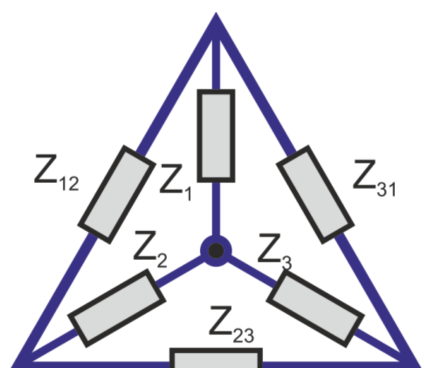
¿Cuando son ambas ***equivalentes***? Si (I_1, I_2, I_3) son iguales $\Rightarrow$ (V_{12}, V_{23}, V_{31}.) son iguales

Elementos de Δ en función de Y

$$Z_{12} = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3}$$

$$Z_{23} = Z_2 + Z_3 + \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_1}$$

$$Z_{31} = Z_3 + Z_1 + \frac{Z_3 \cdot Z_1}{Z_2}$$



Regla Mnemotécnica

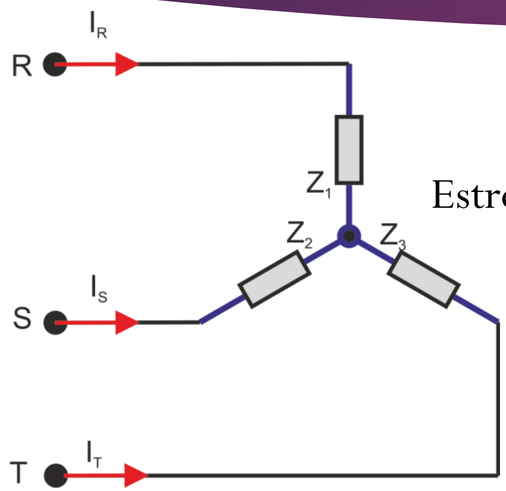
Elementos de Y en función de Δ

$$Z_1 = \frac{Z_{12} \cdot Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}$$

$$Z_2 = \frac{Z_{12} \cdot Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}$$

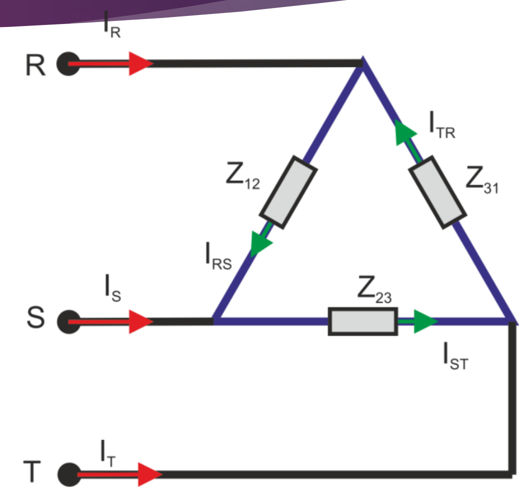
$$Z_3 = \frac{Z_{23} \cdot Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}$$

Cargas equilibradas. Conversión *Y-Δ* (III)



Estrella

Triángulo
(Delta)



Conexión Δ o Y equilibrada → *Las tres cargas son iguales*

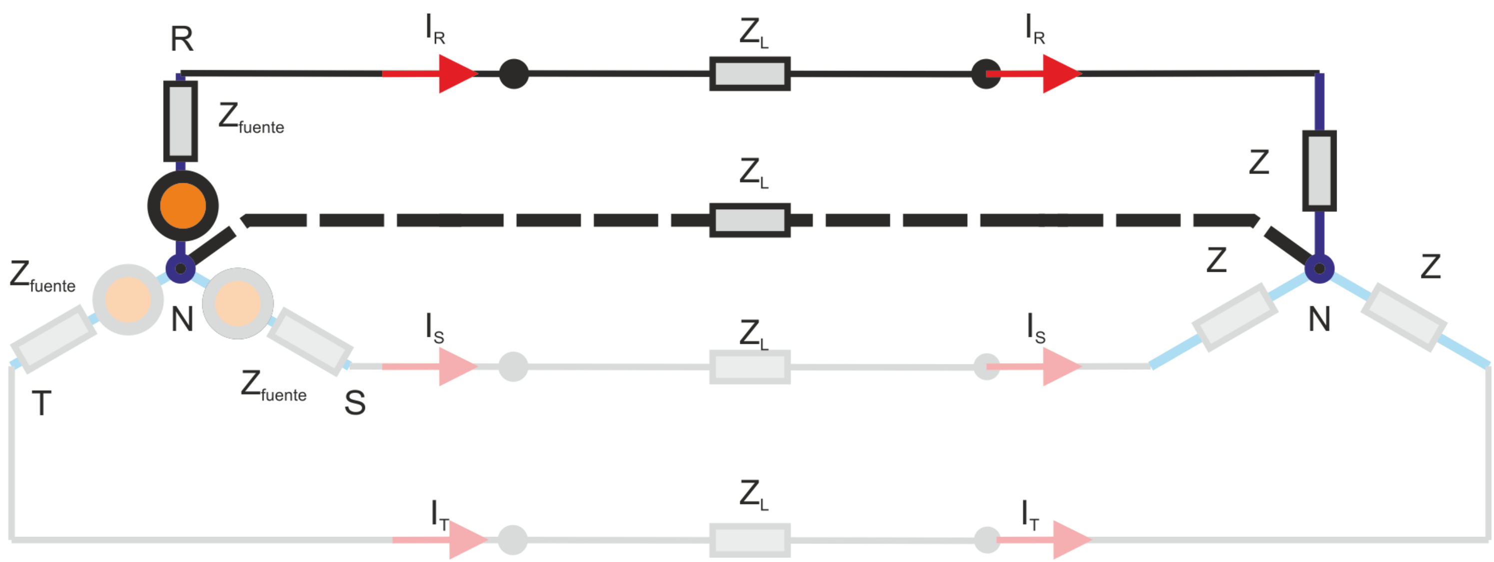
Sistemas de cargas equilibradas Δ y Y equivalentes → $Z_{\Delta} = 3\,Z_Y$

DEMOSTRACIÓN:

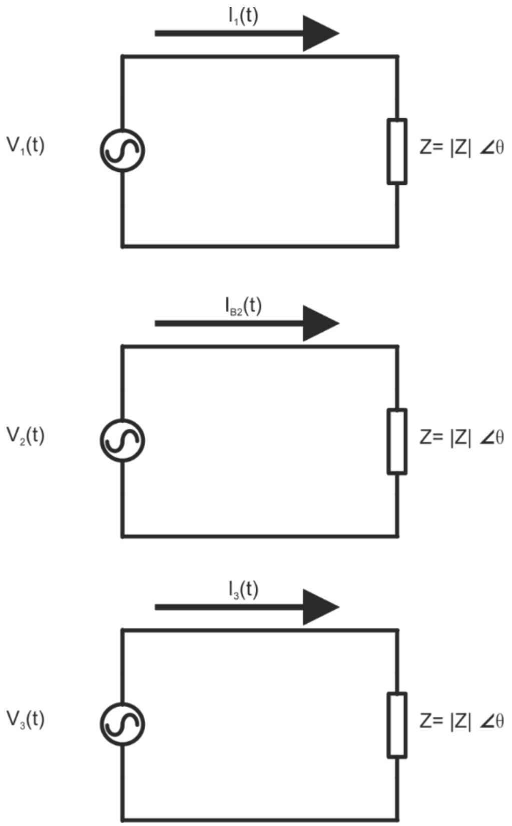
Sustituir $Z_1=Z_2=Z_3$ en el caso general.

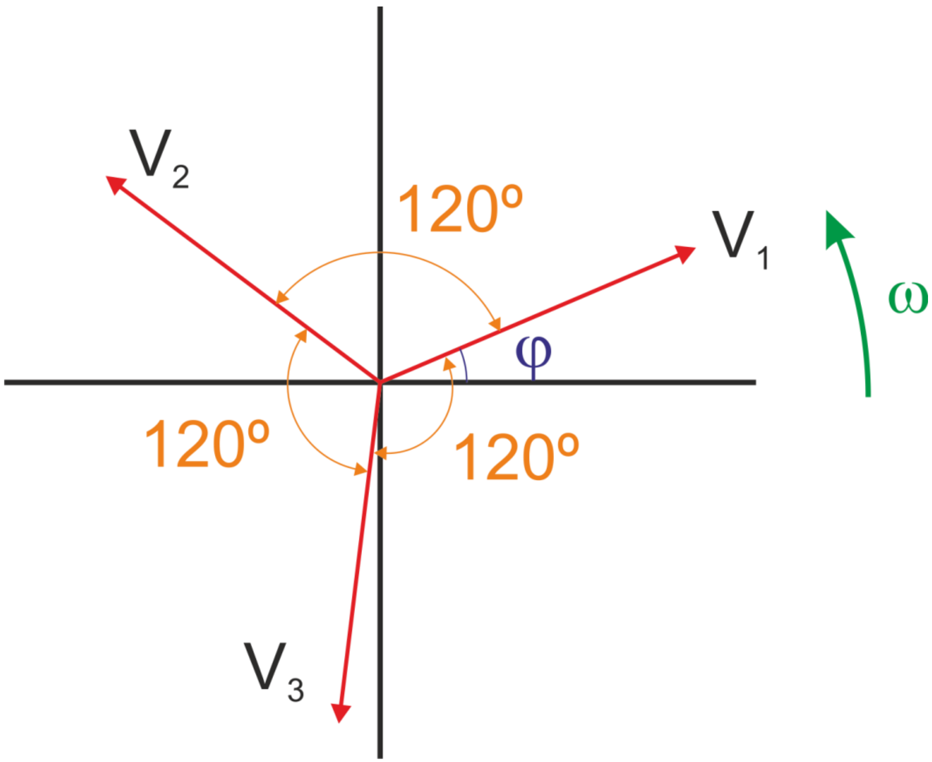
Circuito equivalente (I)

- En un sistema equilibrado, las tres fases son equivalentes (salvo el desfase).
- Así, es posible determinar los voltajes y las corrientes mediante el circuito equivalente por fase



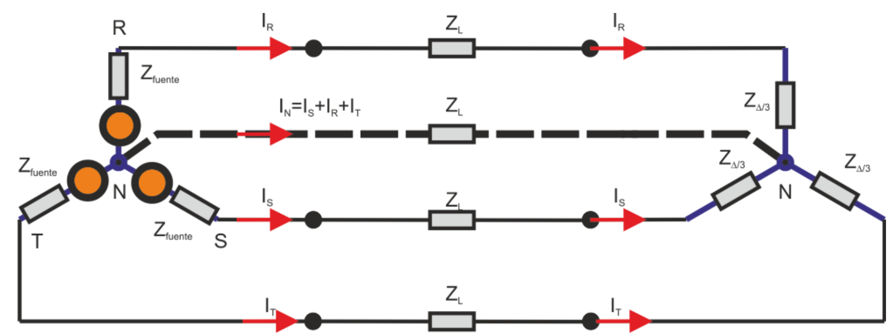
Circuito equivalente (II)



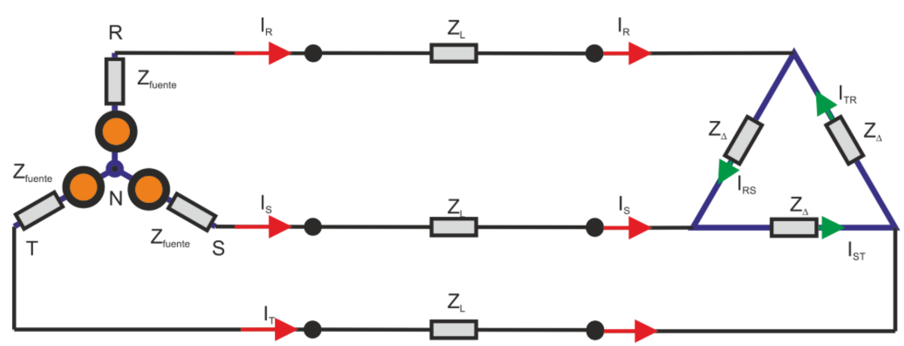


Circuito equivalente (III)

- Si el generador y/o las cargas están en Δ, se obtienen los equivalentes en Y y se trabaja con ellos.

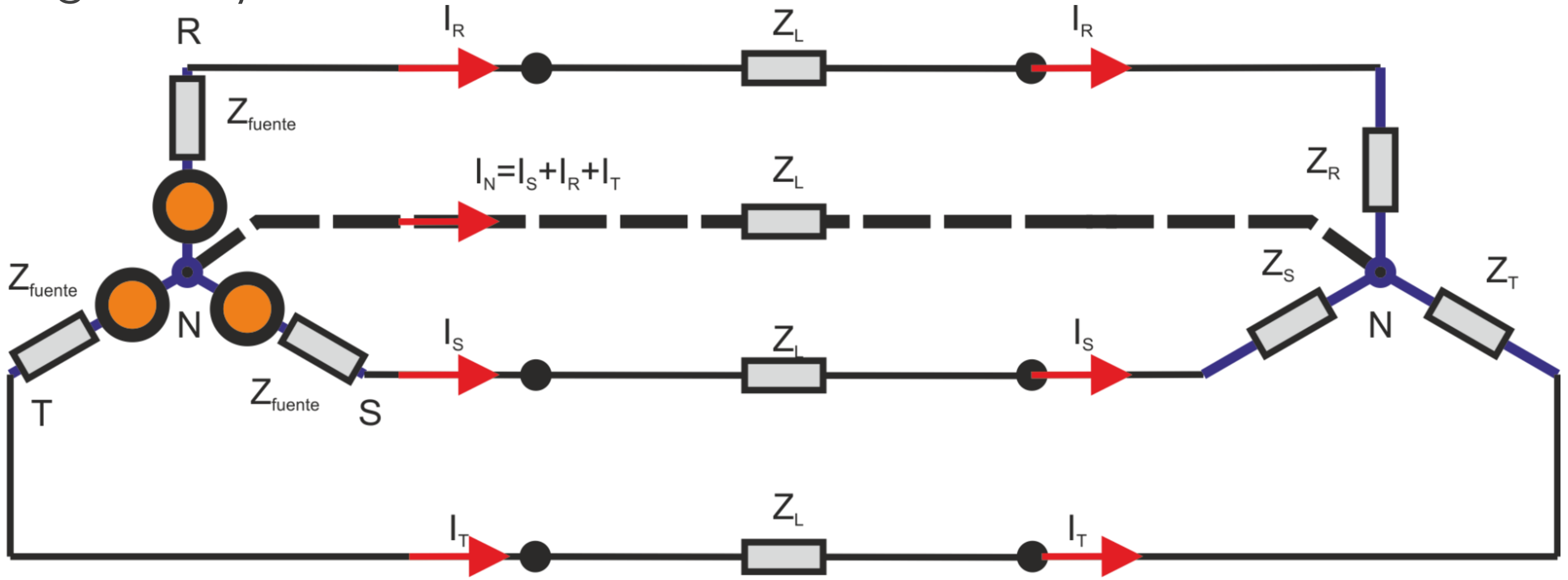


$$Z_\Delta = 3\, Z_Y$$



Análisis de sistemas desequilibrados (I)

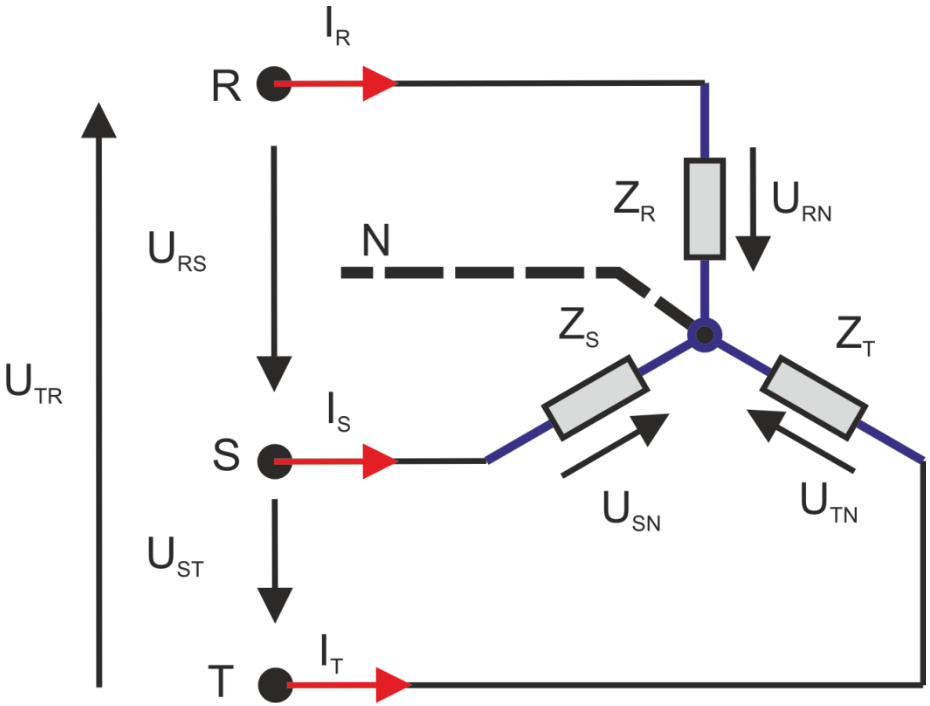
- En un sistema desequilibrado, cada fase es distinta (el método anterior no sirve).
- Hay que aplicar las Leyes de Kirchoff al circuito correspondiente, dependiendo de cada caso (método general).



Universidad de La Laguna
Departamento de Ingeniería Industrial

Análisis de sistemas desequilibrados (II)

- Las transformaciones Y-D no se pueden aplicar



CARGAS EN ESTRELLA

$$I_R = V_{RN} / Z_R$$

$$I_S = V_{SN} / Z_S$$

$$I_T = V_T / Z_T$$

$$I_N = -(I_A + I_B + I_C) \neq 0$$

Potencia en sistemas trifásicos equilibrados (I)

- En cada fase: $p(t) = v(t)\,i(t)$
- Si escribimos v(t) e i(t) en cada fase

$$p_A(t) = V_f \cdot I_f \cdot \text{sen}(\omega t) \cdot \text{sen}(\omega t - \varphi)$$

$$p_B(t) = V_f \cdot I_f \cdot \text{sen}(\omega t - 120^\circ) \cdot \text{sen}(\omega t - 120^\circ - \varphi)$$

$$p_C(t) = V_f \cdot I_f \cdot \text{sen}(\omega t - 240^\circ) \cdot \text{sen}(\omega t - 240^\circ - \varphi)$$

Sumamos las tres componentes

- Operando:

$$p_{tot}(t) = 3 \cdot V_f \cdot I_f \cdot \cos\varphi$$

¡No depende del tiempo!

- La potencia total en cada instante es constante e igual a la suma de la potencia activa en cada una de las cargas

$$\varphi = \theta_{Voltaje\ fase} - \theta_{Intensidad\ fase}$$

Potencia en sistemas trifásicos equilibrados (II)

- Para las potencias activa, reactiva y aparente queda:

$$P = 3V_f I_f \cos\varphi = 3I_f^2 Z \cos\varphi$$

$$Q = 3V_f I_f \operatorname{sen}\varphi = 3I_f^2 Z \operatorname{sen}\varphi$$

$$S = 3V_f I_f = 3I_f^2 Z$$

- Si utilizamos magnitudes de línea, en vez de fase
- Y : $P = 3\left(\dfrac{V_L}{\sqrt{3}}\right) I_L \cos\phi = \sqrt{3} V_L I_L \cos\varphi$
- D : $P = 3\left(\dfrac{I_L}{\sqrt{3}}\right) V_L \cos\phi = \sqrt{3} V_L I_L \cos\varphi$
- Que es igual para ambos tipos de conexiones
- Para la reactiva y la aparente nos queda

$$Q = \sqrt{3} V_L I_L \operatorname{sen}\varphi$$

$$S = \sqrt{3} V_L I_L$$

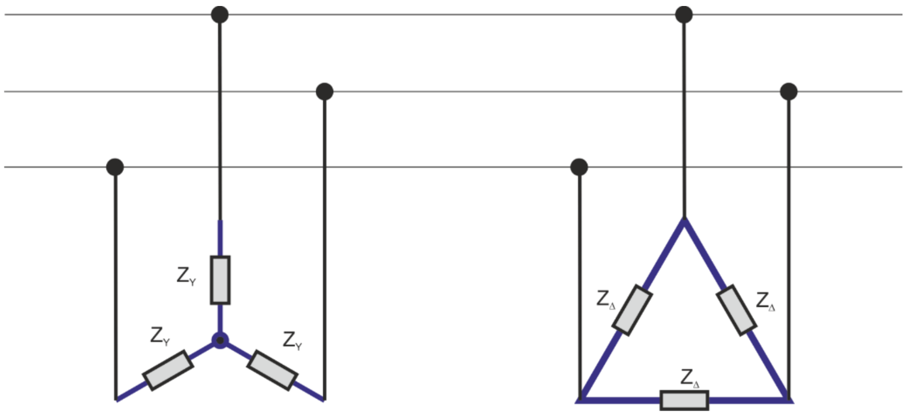
Comparación de potencias entre Y-Δ (I)

- **Si se mantiene constante el voltaje de línea en ambas conexiones**, se tiene:

$$S_{III\Delta} = 3\frac{V_L^2}{Z} = 3S_{IIIY}$$

- **Y por tanto, para igual tensión de línea**, se tiene que la potencia absorbida por las cargas es tres veces mayor en conexión Δ que en estrella

Comparación de potencias entre Y-Δ (II)



$$\textit{Demostración}:$$

$$\Delta:\left\{\begin{aligned} V_F &= V_L \\ I_F &= \frac{V_L}{|Z|} \end{aligned}\right\} \Rightarrow S^{\Delta} = 3V_F I_F = \frac{3V^2{}_L}{|Z|}$$

$$\mathrm{Y}:\left\{\begin{aligned} V_F &= \frac{V_L}{\sqrt{3}} \\ I_F &= \frac{V_F}{|Z|} = \frac{V_L}{\sqrt{3}|Z|} \end{aligned}\right\} \Rightarrow S^{\mathrm{Y}} = 3V_F I_F = \frac{V^2{}_L}{|Z|}$$

para igual tensión de línea:

la potencia absorbida por las cargas es tres veces mayor en conexión triángulo (Δ) que en estrella (Y)

Potencia en trifásica desequilibrada

- La potencia **instantánea** ya **NO** es **constante**

$$\mathrm{P}_{Total} = \mathrm{P}_R + \mathrm{P}_S + \mathrm{P}_T = \mathrm{U}_R \mathrm{I}_R \cos\varphi_R + \mathrm{U}_S \mathrm{I}_S \cos\varphi_S + \mathrm{U}_T \mathrm{I}_T \cos\varphi_T$$

$$\mathrm{Q}_{Total} = \mathrm{Q}_R + \mathrm{Q}_S + \mathrm{Q}_T = \mathrm{U}_R \mathrm{I}_R \sin\varphi_R + \mathrm{U}_S \mathrm{I}_S \sin\varphi_S + \mathrm{U}_T \mathrm{I}_T \sin\varphi_T$$

$$\mathrm{S}_{Total} = \mathrm{S}_R + \mathrm{S}_S + \mathrm{S}_T = \mathrm{U}_R \mathrm{I}_R^* + \mathrm{U}_S \mathrm{I}_S^* + \mathrm{U}_T \mathrm{I}_T^* = P + jQ$$

$$FP = \frac{P}{S} = \frac{\mathrm{P}_R + \mathrm{P}_S + \mathrm{P}_T}{\sqrt{\left(\mathrm{P}_R + \mathrm{P}_S + \mathrm{P}_T\right)^2 + \left(\mathrm{Q}_R + \mathrm{Q}_S + \mathrm{Q}_T\right)^2}}$$

Vatímetro

- El vatímetro es un dispositivo de medida de tipo electrodinámico.
- Internamente está formado por dos bobinas, una fija y otra móvil.
  - La bobina fija es recorrida por la corriente del circuito.
  - La bobina móvil mide la tensión. Para que esta bobina sea recorrida por una corriente muy pequeña, se puede conectar una resistencia en serie con ella.
- Así pues, haciendo que la bobina fija sea atravesada por la corriente del circuito a medir y que la corriente de la bobina móvil sea proporcional a la tensión de dicho circuito, el ángulo de giro de la bobina será proporcional al producto de ambas y por lo tanto a la potencia consumida por el circuito.

Medida de la potencia trifásica

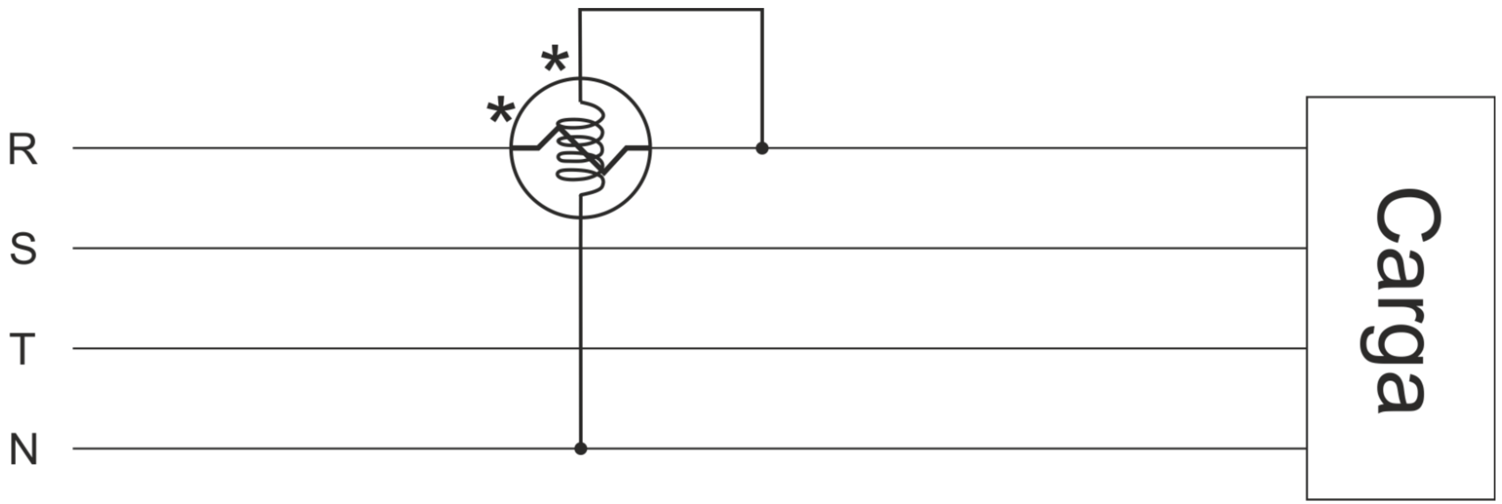
- ¿Cuántos vatímetros se necesitan?

1 Vatímetro
- Trifásica equilibrada
- El valor hallado se multiplica por las 3 líneas

2 Vatímetros
- Método de Aron

3 Vatímetros
- Equilibrada y desequilibrada
- 3 ó 4 hilos

1 Vatímetro

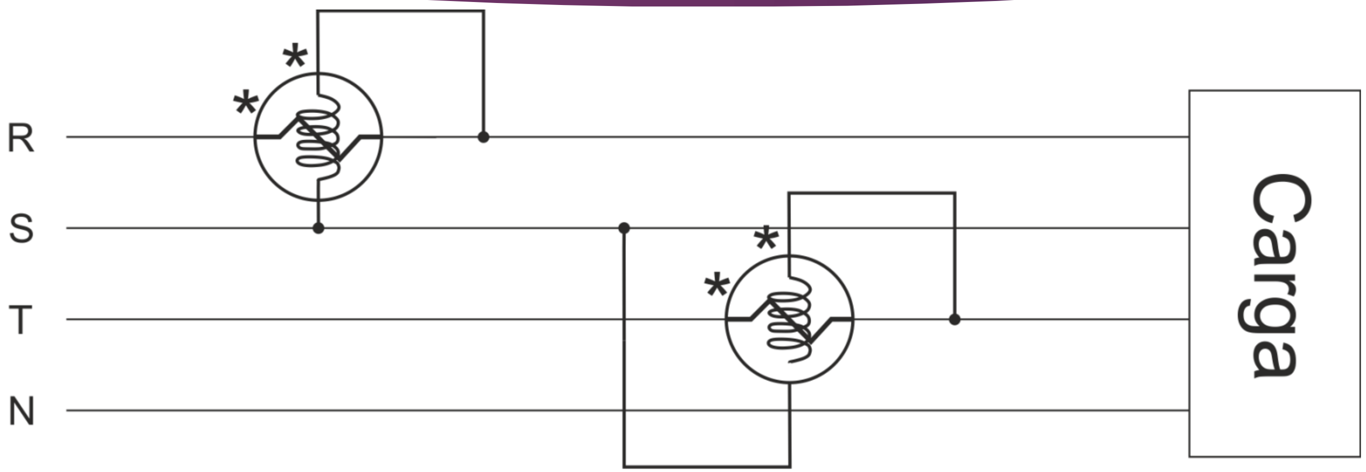


$$P_{Total} = P_R + P_S + P_T \Rightarrow P_R = U_R I_R \cos\varphi_R \Rightarrow P_{Total} = 3U_R I_R \cos\varphi_R$$

$$Q_{Total} = Q_R + Q_S + Q_T \Rightarrow Q_R = U_R I_R \sin\varphi_R \Rightarrow P_{Total} = 3U_R I_R \sin\varphi_R$$

$$S_{Total} = \sqrt{\left(P_{Total}\right)^2 + \left(Q_{Total}\right)^2} \; ; FP = \frac{P}{S}$$

Método de Aron



$$W_1 = |V_{RS}| \cdot |I_R| \cdot \cos(\varphi_{V_{RS}} - \varphi_{I_R})$$

$$W_2 = |V_{TS}| \cdot |I_S| \cdot \cos(\varphi_{V_{TS}} - \varphi_{I_S})$$

$$\varphi_{V_{RS}} - \varphi_{I_R} = \theta_{fase} + 30^{\circ}$$

$$\varphi_{V_{TS}} - \varphi_{I_S} = \theta_{fase} - 30^{\circ}$$

$$P_T = W_1 + W_2 = 2|V_L| \cdot |I_L| \cdot \cos\theta_{fase} \cdot \cos 30^{\circ}$$

$$= \sqrt{3}|V_L| \cdot |I_L| \cdot \cos\theta_{fase}$$

En en caso de trifásica equilibrada

$$Q_T = W_1 - W_2 = \sqrt{3}|V_L| \cdot |I_L| \cdot \sin\theta_{fase}$$

$$\tan\theta_{fase} = \sqrt{3}\left(\frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}\right)$$

Universidad de La Laguna
Departamento de Ingeniería Industrial

3 Vatímetros