Rosa Mª Aguilar Chinea y Vanesa Muñoz Cruz

1 TEORÍA BORROSA

1.1 Conjuntos Borrosos

El concepto de conjunto borrosos fue introducido por primera vez por Lofti A. Zadeh, profesor de la Universidad de California Berkeley, en el año 1964, en un intento de representar y manipular datos que no eran precisos. Dicho concepto dio paso a la denominada *Teoría de los Subconjuntos Borrosos,* ya que ciertas magnitudes pueden tomar valores que difícilmente se pueden clasificar en un conjunto determinado. La Teoría de Subconjuntos Borrosos permite la definición adecuada de conjuntos que modelan las situaciones de imprecisión antes expuestas.

En la teoría clásica de conjuntos, un subconjunto A de un conjunto $\mathbf{X}$ puede ser definido por una función característica χ_A que puede tomar dos valores: 0 y 1

$$\chi_A : \mathbf{X} \rightarrow \{0,1\}$$

La verdad o falsedad de la expresión "x está en A" viene dada por el par ordenado (x, χ_A(x)), de forma que será cierta si el segundo elemento del par es 1 y falsa cuando sea 0.

De forma similar se puede definir un subconjunto borroso A de un conjunto $\mathbf{X}$, denominado *universo de discurso*, como el conjunto de pares ordenados (x, μ_A(x)), siendo μ_A la *función de pertenencia* al conjunto borroso A, definida como

$$\mu_A : \mathbf{X} \rightarrow [0,1]$$

Dicha función puede tomar todos los valores del intervalo entre 0 y 1. El valor 0 representa la no-pertenencia al conjunto A y el valor 1 representa la pertenencia total a dicho conjunto.

1.2 Números Borrosos

Un número borroso es un caso particular de conjunto borroso cuya función de pertenencia es continua, convexa y definida sobre un intervalo cerrado de los números reales. Dicha función de pertenencia puede adoptar diferentes formas siendo las más habituales las triangulares o trapezoidales que se caracterizan por un número reducido de parámetros, aunque también son habituales la gaussiana o la campana generalizada. En la Figura 3-1 se pueden observar ejemplos de las diferentes funciones de pertenencia comentadas.

1.3 Variables lingüísticas

Los conjuntos borrosos se pueden utilizar para representar variables lingüísticas cuyos valores son números borrosos que están definidos en términos lingüísticos. Al conjunto de estos números borrosos, que abarcan todo el universo de discurso de la variable, se le denomina *partición borrosa*.

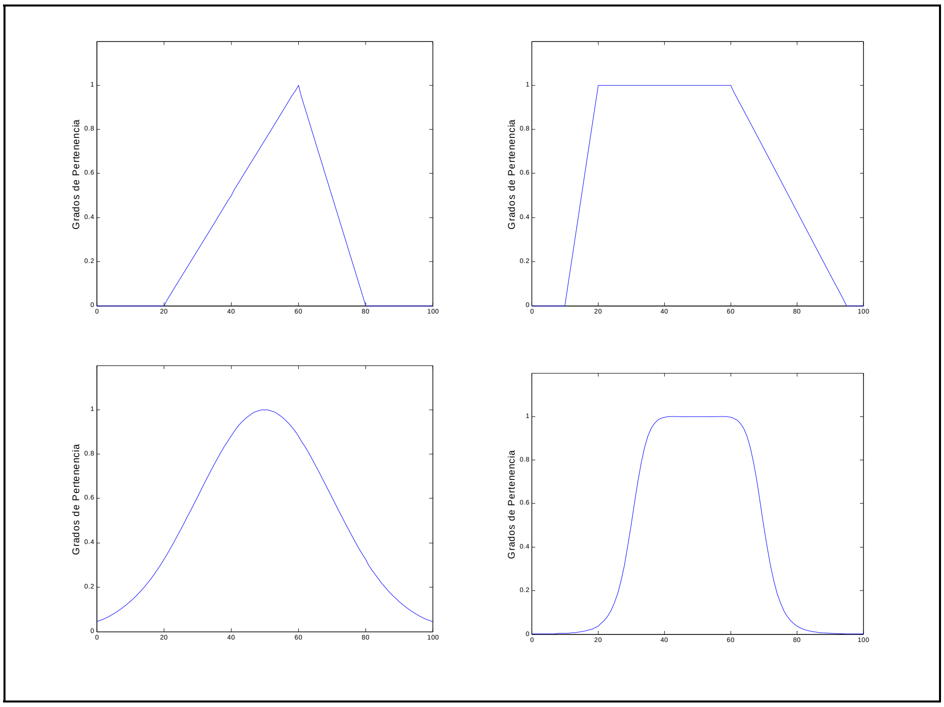

Figura 3-1.- Ejemplos de funciones de pertenencia triangular, trapeziodal, gaussiana y campana generalizada.

El número de conjuntos borrosos que componen dicha partición se suele tomar según el grado de precisión requerido para esa variable. Tomar una gran cantidad de conjuntos borrosos (siete o más de siete, en general), tiene como ventaja el poder precisar las acciones que se van a llevar a cabo en el sistema en función de esta variable. La desventaja es que la *base de conocimiento* del sistema debe contemplar todos los términos lingüísticos (conjuntos), por lo que el tamaño de la misma crecerá enormemente.

Por ejemplo, si la temperatura se interpreta como una variable lingüística, el conjunto de valores que puede tomar podría ser {muy fría, fría, media, templada, cálida, calurosa}. Cada uno de estos términos está caracterizado por un conjunto borroso definido en el universo de discurso ([-6ºC, 48ºC]) de la variable temperatura, tal y como muestra la figura 3-2.

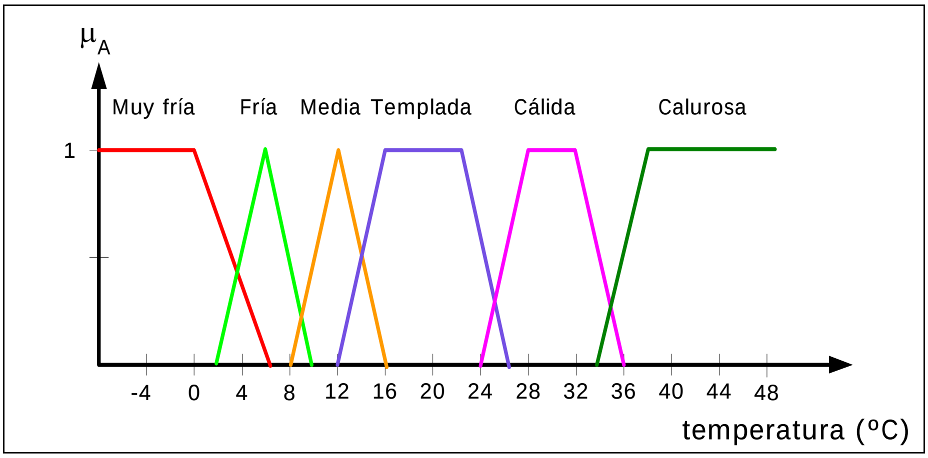

Figura 3-2.- Definición y partición borrosa de la variable lingüística temperatura.

1.4 Operaciones con Conjuntos Borrosos

Las operaciones que se definen en la lógica borrosa pueden reducirse a las definiciones clásicas si el grado de pertenencia a los conjuntos borrosos se limita al conjunto {0,1}. Por esta razón, se utiliza la misma notación que para los conjuntos concisos.

Así se puede definir el complemento (Tabla 3-1), la T-norma (o intersección) (Tabla 3-2) y la S-norma (o unión) (Tabla 3-3).

Estándar	$c(x) = 1 - x$
Sugeno	$c_\lambda(x) = \dfrac{1-x}{1+\lambda x}$, *con* $\lambda > -1$
Yager	$c(x) = \left(1 - x^p\right)^{1/p}, \quad p > 0$

Tabla 3-1.- Definición de complementos básicos.

Mínimo	$T(x,y) = min\{x,y\}$
Lukasiewicz (producto acotado)	$T(x,y) = max\{x+y-1,0\}$

Producto algebraico	$T(x,y) = xy$
Producto drástico	$T_w(x,y) = \begin{cases} min\{x,y\} & si \quad max\{x,y\} = 1 \\ 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$
Hamacher	$T(x,y) = \dfrac{xy}{\gamma + (1-\gamma)(x+y-xy)}, \quad \gamma \geq 0$
Frank	$T(x,y) = \log_s\left[1 + \dfrac{(s^x - 1)(s^y - 1)}{s-1}\right], \quad s \geq 0$
Dubois and Prade	$T(x,y) = \dfrac{xy}{max\{x,y,\alpha\}}, \quad \alpha \in [0,1]$
Yager	$T(x,y) = 1 - min\left\{1, \left[(1-x)^p + (1-y)^p\right]^{1/p}\right\}, \quad p > 0$

Tabla 3-2.- Definición de T-normas básicas

Máximo	$S(x,y) = max\{x,y\}$
Lukasiewicz (suma acotada)	$S(x,y) = min\{x+y,1\}$
Probabilística (suma algebraica)	$S(x,y) = x+y-xy$
Suma drástica	$S_w(x,y) = \begin{cases} max\{x,y\} & si \quad min\{x,y\} = 1 \\ 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$
Hamacher	$S(x,y) = \dfrac{x+y-(2-\gamma)xy}{1-(1-\gamma)xy}, \quad \gamma \geq 0$
Frank	$S(x,y) = 1 - \log_s\left[1 + \dfrac{(s^{1-x} - 1)(s^{1-y} - 1)}{s-1}\right], \quad s \geq 0$
Yager	$S(x,y) = min\left\{1, \sqrt[p]{x^p + y^p}\right\}, \quad p > 0$

Tabla 3-3.- Definición de S-normas básicas

Ejemplo: Dado los números borroso A (figura 3-3.a) y B (figura 3-3.b); se obtiene la intersección A∩B, esto es, la operación AND (Y) utilizando la T-Norma mínimo en la figura 3-3.c.

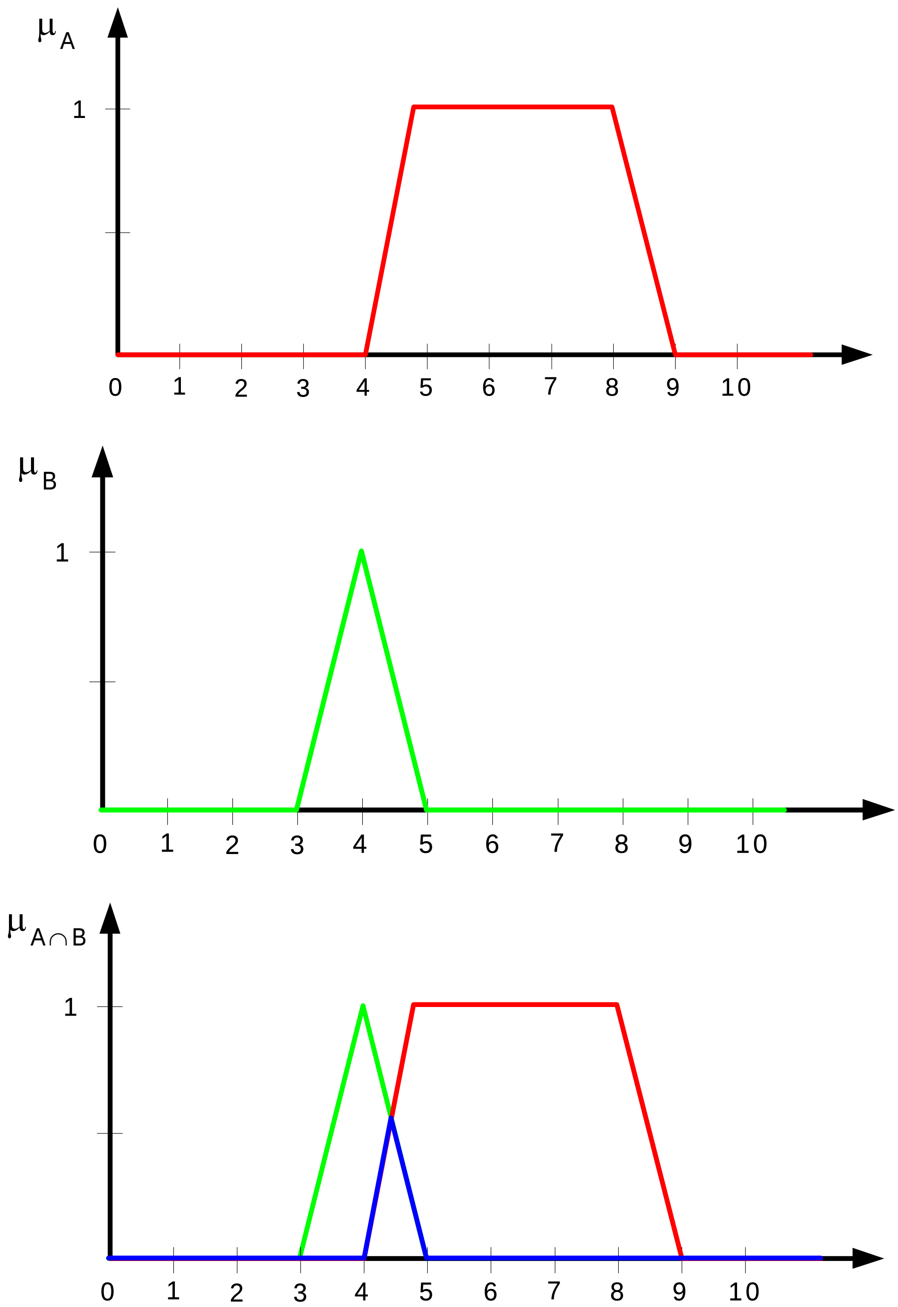

Figura 3-3.- Operación AND: (a) conjunto borroso A; (b) conjunto borroso B;(c) A∩B utilizando la T-Norma mínimo.

Ejemplo: Dado los números borroso A (figura 3.a) y B (figura 3.b); se obtiene la unión A∪B, esto es, la operación OR (O) utilizando la S-Norma máximo en la figura 3-4.

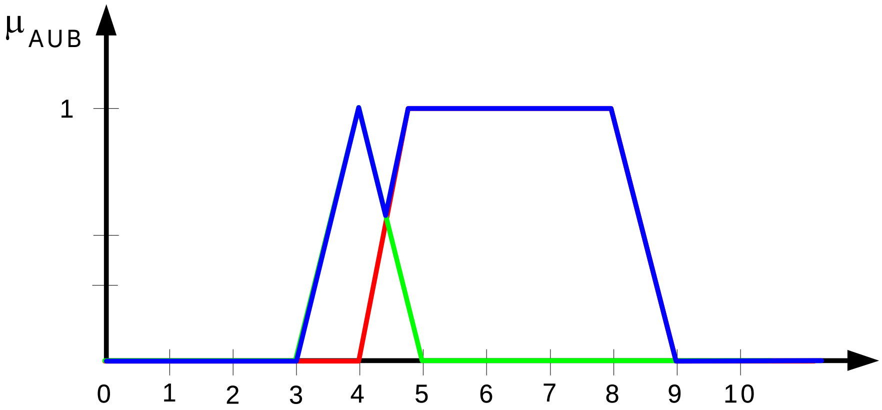

Figura 3-4.- Operación OR sobre los conjuntos borrosos A y B, A∪B.

1.5 Reglas borrosas si-entonces

Una regla borrosa del tipo "si-entonces", tiene la siguiente forma:

Si x es A entonces y es B

siendo A y B valoraciones particulares de sendas variables lingüísticas. El término "x es A" se denomina antecedente, mientras que el término "y es B" se denomina consecuente. Ejemplos sencillos de tales reglas serían:

- "Si la presión es alta, entonces el volumen es pequeño"
- "Si la temperatura es alta, entonces hace calor"

Para poder utilizar una regla borrosa es necesario formalizar el significado de la expresión “Si x es A entonces y es B”, que abreviadamente se indica como $A \rightarrow B$. Para ello es útil definir esta relación borrosa binaria.

Una relación borrosa binaria es un conjunto borroso R, sobre X x Y (X e Y son dos universos de discurso), que asignan a cada elemento de X x Y un número entre 0 y 1. Esto es:

$$R = \{((x,y), \mu_R(x,y)) \mid (x,y) \in X \times Y\}$$

La relación borrosa asociada a la regla borrosa se puede obtener usando alguna de las T-normas citadas anteriormente, por ejemplo, si se usa el operador mínimo para la conjunción lógica (propuesto por Mamdani) tendremos:

- $R_m = (A \rightarrow B) = \min\{(\mu_A(x), \mu_B(y))\} \ / \ (x,y)$

1.6 El razonamiento borroso

El razonamiento borroso (o aproximado) permite obtener conclusiones a partir de un conjunto de reglas borrosas y un conjunto de hechos borrosos conocidos.

La regla de inferencia clásica es el Modus Ponens que nos permite inferir la verdad de la proposición B (“hace calor”), a partir de la verdad de la proposición A (“la temperatura es alta”) y de la implicación $A \rightarrow B$ (“si la temperatura es alta, entonces hace calor”), de forma esquematizada tendríamos:

Premisa 1 (Regla):	Si x es A	ENTONCES	y es B
Premisa 2 (Hecho):	x es A		
Consecuente (Conclusión):			y es B

Sin embargo, en muchos razonamientos humanos, el modus ponens es utilizado de una forma aproximada. Por ejemplo, si tenemos la misma regla de implicación $A \rightarrow B$ (“si la temperatura es alta, entonces hace calor”), y sabemos que “la temperatura es más o menos alta” (x es A’), entonces podemos inferir que “hace más o menos calor” (y es B’), que se podría esquematizar de la siguiente manera:

Premisa 1 (Regla):	Si x es A	ENTONCES	y es B
Premisa 2 (Hecho):	x es A’		
Consecuente (Conclusión):			y es B’

donde A’ es “más o menos” A, y B’ es “más o menos” B. Este tipo de razomiento es el razonamiento borroso, siendo A, B, A’ y B’ conjuntos borrosos del universo del discurso correspondientes. A esta regla de inferencia también se le conoce como Modus Ponens Generalizado (GMP) ya que la regla de Modus Ponens es un caso especial de ésta.

Por lo tanto, el razonamiento borroso nos permite obtener conclusiones a partir de reglas borrosas de tipo si-entonces y de hechos conocidos. La base de este procedimiento es la regla composicional de inferencia. Ésta es una generalización del concepto de curva. Una curva viene dada por una función que permite obtener el valor de *y* a partir del valor de *x*, mediante $y=f(x)$, donde el papel de la variable independiente lo jugará el hecho (x es A’), el papel de la función lo tomará la relación borrosa asociada a la regla ($A \rightarrow B$) y finalmente, el papel de la variable dependiente será para una conclusión borrosa (y es B’), figura 3-5.

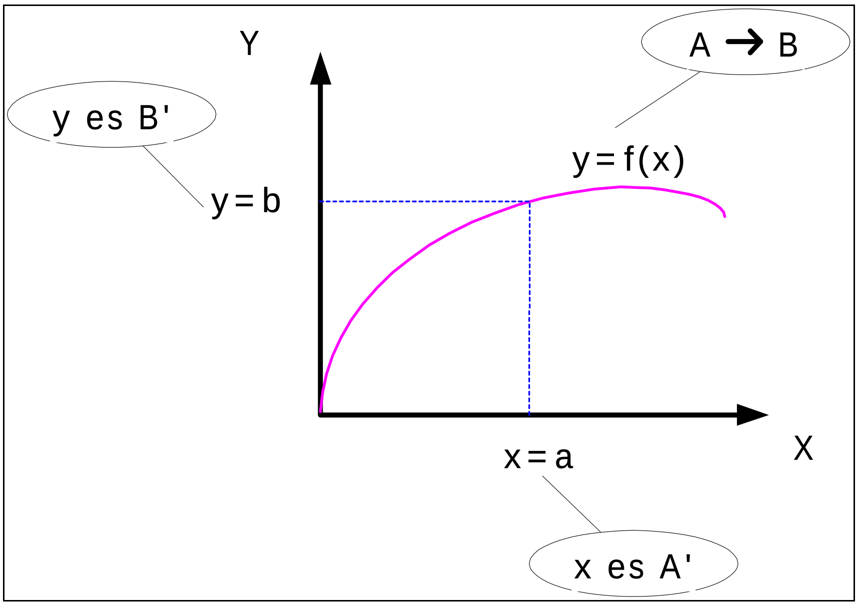

Figura 3-5.- Regla compocisional de inferencia como generalización del concepto de curva.

Entonces, sea R una relación borrosa sobre X x Y, y sea A un conjunto borroso sobre X. Para encontrar el conjunto borroso resultante B, construiremos una extensión cilíndrica de A, c(A), que tome como base A. La extensión cilíndrica se define como $\mu_{c(A)}(x,y) = \mu_A(x)$, y por lo tanto es un conjunto borroso sobre X x Y que nos permitirá calcular la intersección con el conjunto borroso de la relación borrosa R. Finalmente proyectamos esta intersección $(c(A)\cap R)$ sobre el domino Y, obteniendo así un conjunto borroso B que representa la conclusión. Veamos gráficamente cada uno de estos pasos.

Partimos de la premisa 1 que es la regla R= $A\rightarrow B$ (en el concepto de curva sería la función y=f(x)), que nos da la relación borrosa R sobre X x Y que vemos en la figura 3-6.

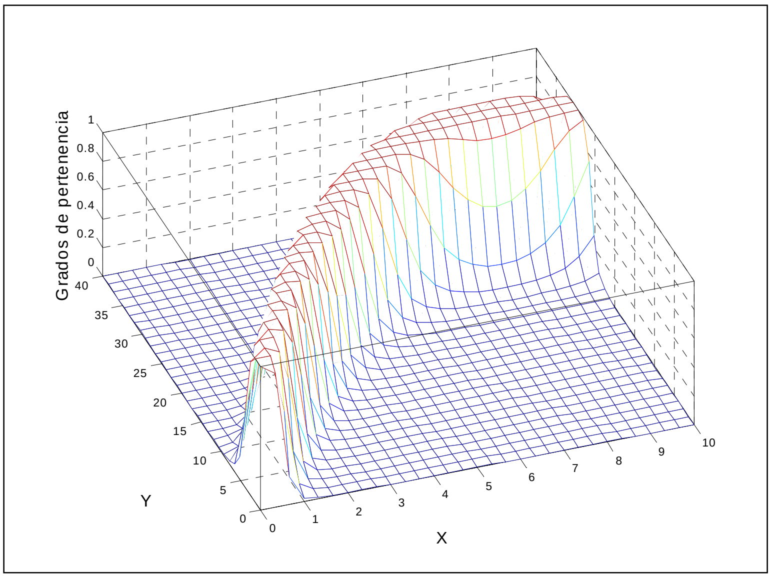

Figura 3-6.- Relación borrosa R sobre X y Y.

La segunda premisa consiste en el hecho x es A' (en el concepto de curva el valor x=a) para extender este hecho hasta que corte la relación borrosa tendremos que realizar la extensión cilíndrica de A', figura 3-7.

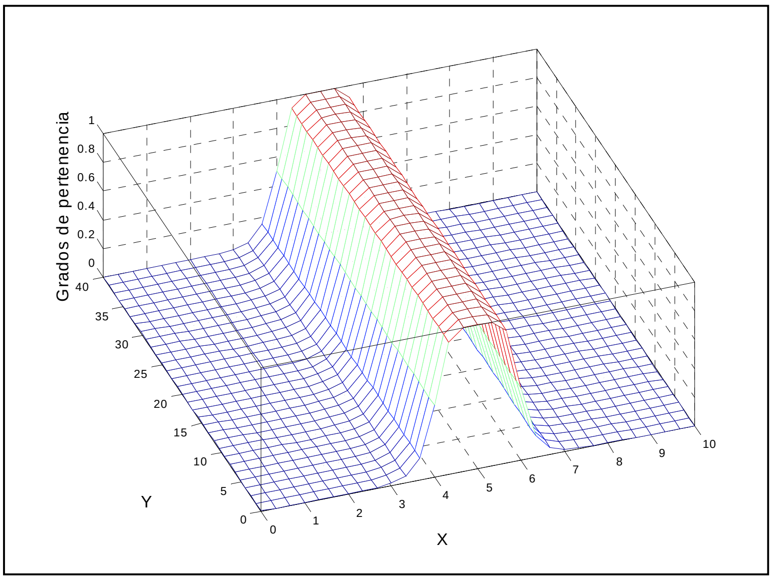

Figura 3-7.- Extensión cilíndrica de A', c(A').

La intersección entre la extensión cilíndrica de A' c(A') y la relación borrosa R, figura 3-8, forma una región que es análoga al punto de corte x=a con la función y=f(x), en el concepto de curva.

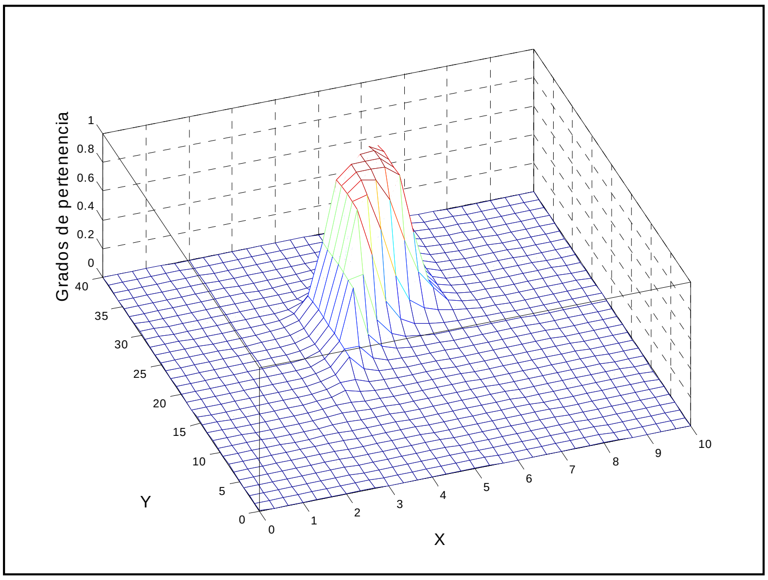

Figura 3-8.- Intersección (mínimo) de la relación borrosa R y la Extensión cilíndrica de A'.

Proyectando la intersección de R∩ c(A') sobre el eje y, podremos inferir y' como el conjunto borroso B sobre el eje Y, esto es la conclusión y' es B, que se muestra en la figura 3-9.

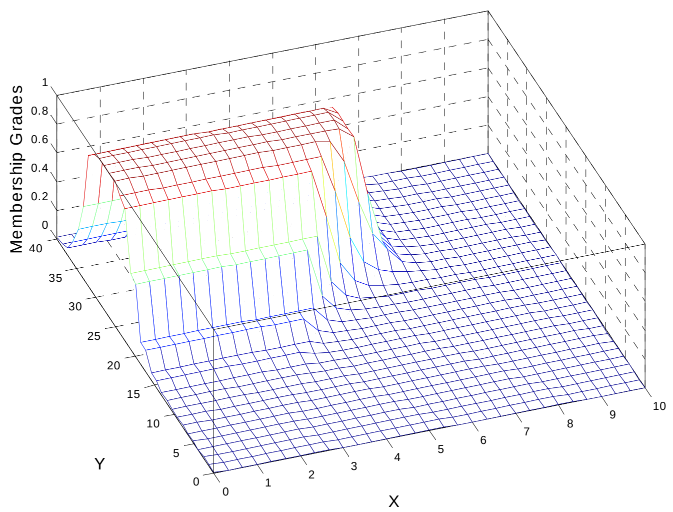

Figura 3-9.- Proyección (máximo) sobre el eje Y de la intersección entre la relación borrosa R y la extensión cilíndrica de A' para obtener la conclusión y' es B.

Podemos concluir que el conjunto borroso B' inducido por las premisas "x es A'" y la regla borrosa "si x es A entonces y es B" se define por:

$B' = A' \circ R = A' \circ (A \rightarrow B)$ donde $\circ$ indica el operador composicional

Si al aplicar la regla composicional de inferencia utilizamos el mínimo para la intersección de $R \cap c(A')$ obtenemos:

$\mu_{B'}(y) = \max_x \min[\mu_{A'}(x), \mu_R(x,y)]$ composición max-min

Si la intersección de $R \cap c(A')$ se realiza con la operación producto tendríamos:

$\mu_{B'}(y) = \max_x[\mu_{A'}(x)\mu_R(x,y)]$ composición max-producto

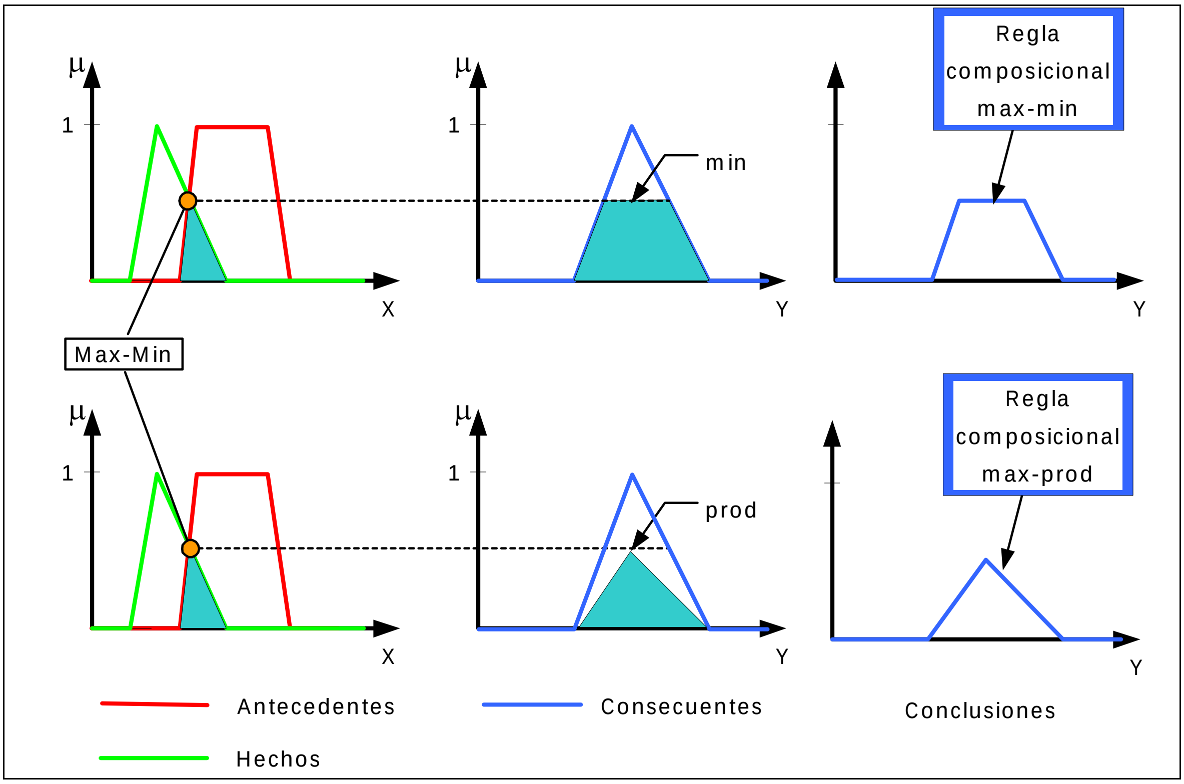

Figura 3-10.- Razonamiento borroso utilizando regla composicional max-min en las tres gráficas superiores y utilizando max-prod en las tres gráficas inferiores.

En la figura 3-10 se representa gráficamente el mecanismo de razonamiento aproximado para una regla con un antecedente. Las tres gráficas superiores se refieren a la regla composicional del tipo max-min. La primera gráfica (de izquierda a derecha) muestra como se componen el antecedente y el hecho. En este caso el hecho tiene asociada una función de pertenencia triangular, y el antecedente una función de pertenencia trapezoidal. La composición de ambas funciones de pertenencia mediante la operación max-min es lo que denominamos grado de compatibilidad. En este caso, como sólo hay un antecedente el grado de compatibilidad es igual a la fuerza de disparo de la regla. La siguiente gráfica se refiere al consecuente de la regla. La fuerza de disparo y la función de pertenencia asociada al consecuente son utilizadas para obtener la función de pertenencia del consecuente cualificado (resultado de la inferencia de la regla). En las tres gráficas superiores se utiliza el operador mínimo mientras que en las tres gráficas inferiores se utiliza el operador producto. Dependiendo del operador utilizado se obtiene un conjunto borroso resultado de la inferencia diferente.

1.7 Una regla con un antecedente

Este es el caso más sencillo, considerando una regla composicional de inferencia del tipo max-min, y una la implicación borrosa de Mamdani, tendremos:

$$\mu_{B'}(y) = \max_x \min[\mu_{A'}(x),\ \mu_R(x,y)] = \max_x \min[\mu_{A'}(x),\ \min[\mu_A(x),\ \mu_B(y)]]$$

Simplificando tendríamos:

$$\mu_{B'}(y) = \min\{\max_x \min[\mu_{A'}(x),\ \mu_A(x)],\ \mu_B(y)]\} = \min[w,\ \mu_B(y)]$$

siendo $w = \max_x \min[\mu_{A'}(x),\ \mu_A(x)]$, que se denomina grado de compatibilidad entre el conjunto borroso del hecho (A') y el antecedente (A).

En otras palabras, primero encontramos el grado de compatibilidad w como el máximo de la región que resulta de la operación mínimo entre $\mu_{A'}(x)$ y $\mu_A(x)$ (zona sombreada en el antecedente, figura 3-11). La función de pertenencia del conjunto borroso B' será igual a la función de pertenencia de B recortada por w (zona sombrada en el consecuente, figura 3-11).

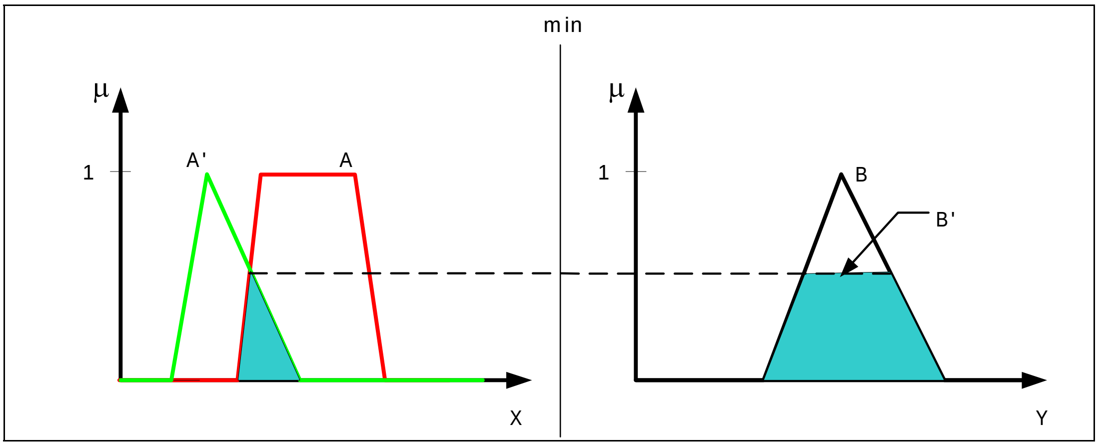

Figura 3-11.-Interpretación gráfica del Modus Ponens Generalizado, utilizando la implicación borrosa de Mamdani (mínimo) y el operador composicional max-min.

1.8 Una regla con múltiples antecedentes

Una regla borrosa del tipo si-entonces con dos antecedentes es de la forma: "Si *x* es A Y *y* es B ENTONCES *z* es C", la Generalización del Modus Ponens para este problema se esquematizaría de la siguiente manera:

Premisa 1 (Regla):	SI *x* es A Y *y* es B	ENTONCES	*z* es C
Premisa 2 (Hecho):	*x* es A' Y *y* es B'		
Consecuente (Conclusión):			*z* es C'

El método para obtener C' se basa en utilizar una relación ternaria borrosa para describir esta regla con dos antecedentes, esto es, $A \times B \rightarrow C$ puede ser transformada, utilizando por ejemplo la implicación borrosa de Mamdani, como:

- $R_m = (A \times B \rightarrow C) = (A \times B) \times C = \min\{(\mu_A(x), \mu_B(y), \mu_C(z)\} / (x,y,z)$
-

El resultado C' es el siguiente:

$$C' = (A' \times B') \circ (A \times B \rightarrow C) = [A' \circ (A \rightarrow C)] \cap [B' \circ (B \rightarrow C)]$$

Esto es, el resultado del consecuente C' puede ser expresado como la intersección de $C_1' = [A' \circ (A \rightarrow C)]$ y $C_2' = [B' \circ (B \rightarrow C)]$, cada uno de estos términos corresponde a la inferencia borrosa para el caso más simple con un solo antecedente.

Utilizando el operador composiciona max-min tendremos:

$$\mu_{C'}(z) = \min\{\max_x \min[\mu_{A'}(x), \mu_A(x)], \max_y \min[\mu_{B'}(y), \mu_B(y)], \mu_C(z)\}$$

$$\mu_{C'}(z) = \min[w_{A,A'}, w_{B,B'}, \mu_C(z)]$$

Siendo $w_{A,A'}$ y $w_{B,B'}$ los grados de compatibilidad para los antecedentes A y B, respectivamente. El resultado de los grados de compatibilidad de los antecedentes se denomina fuerza de disparo de la regla:

$$f_u((A',B');(A,B)) = \min[w_{A,A'}, w_{B,B'}]$$

Una representación gráfica de este procedimiento se muestra en la figura 3-12, que utiliza el implicador de Mamdani y la regla composicional max-min. El resultado C' es igual a la función de pertenencia del conjunto borroso C recortada por la fuerza de disparo de la regla.

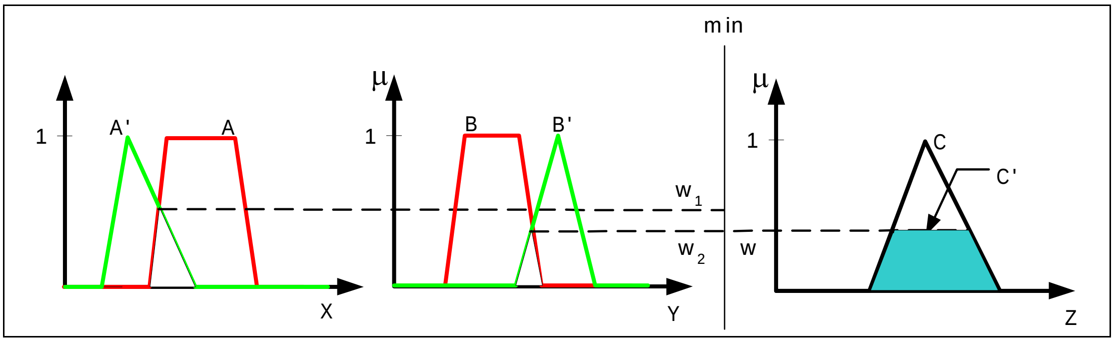

Figura 3-12.- Interpretación gráfica del Modus Ponens Generalizado en una regla con múltiples antecedentes, utilizando el implicador borroso de Mamdani (mínimo) y el operador composicional max-min.

1.9 *Múltiples reglas con múltiples antecedentes*

El siguiente grado de complejidad lo obtenemos cuando en lugar de una sola regla se tienen varias. En ese caso se interpreta la relación borrosa sobre la que debemos componer los hechos como la unión de las relaciones borrosas de cada una de las reglas individuales. De este modo, dado el siguiente problema:

Premisa 1 (Regla1):	SI x es A_1 Y y es B_1 ENTONCES	z es C_1
Premisa 2 (Regla1):	SI x es A_2 Y y es B_2 ENTONCES	z es C_2
Premisa 3 (Hecho):	x es A' Y y es B'	
Consecuente (Conclusión):		z es C'

Tendremos que C' se calcula mediante la siguiente expresión:

$$C' = (A' \times B') \circ (R_1 \cup R_2) = [(A' \times B') \circ R_1] \cup [(A' \times B') \circ R_2] = C_1' \cup C_2'$$

donde C_1' y C_2' son los conjuntos borrosos inferidos para la regla 1 y 2 respectivamente. Utilizando el operador composicional max-min resulta, en términos de los grados de compatibilidad, lo siguiente:

$$\mu_{C'}(z) = \max \{\min[w_{A1,A'}, w_{B1,B'}, \mu_{C1}(z)], \min[w_{A2,A'}, w_{B2,B'}, \mu_{C2}(z)]\}$$

y en términos de las fuerzas de disparo, tenemos:

$$\mu_{C'}(z) = \max\{\min[f((A',B');(A_1,B_1)), \mu_{C1}(z)], \min[f((A',B');(A_2,B_2)), \mu_{C2}(z)]\}$$

Denominamos consecuente cualificado al conjunto borroso que se obtiene cuando se opera la fuerza de disparo y el consecuente de una regla. Llamaremos salida conjunta a la agregación de todos los consecuentes cualificados.

La figura 3-13 muestra gráficamente el razonamiento borroso para múltiples reglas con múltiples antecedentes, utilizando el implicador borroso de Mamdani y la regla de inferencia composicional max-min. Como se puede apreciar, en cada una de las reglas se realiza la inferencia empezando por la obtención de los grados de compatibilidad (operación max-min) representado por $w_{A1,A'}$ y $w_{B1,B'}$ en la primera y $w_{A2,A'}$ y $w_{B2,B'}$ en la segunda. A continuación se aplica el operador "Y-lógico" mediante una T-norma, en este caso la T-norma mínimo. El resultado es la fuerza de disparo de la regla (w_1 y w_2 para la regla uno y dos respectivamente) que es utilizada junto a la función de pertenencia del consecuente y un método de inferencia para obtener el consecuente cualificado (C_1' y C_2' para la regla uno y dos respectivamente). La regla composicional de inferencia utilizada es la T-norma mínimo. Los consecuentes cualificados obtedios se observan a la derecha de cada una de las filas que representan las reglas. La agregación de los consecuentes cualificados se realiza en este caso mediante la aplicación de la S-norma máximo, cuyo resultado se observa en la parte inferior de la figura 32. El borde superior del área sombreada es la función de pertenencia asociada al conjunto borroso resultado de la inferencia con múltiples reglas y múltiples antecedentes.

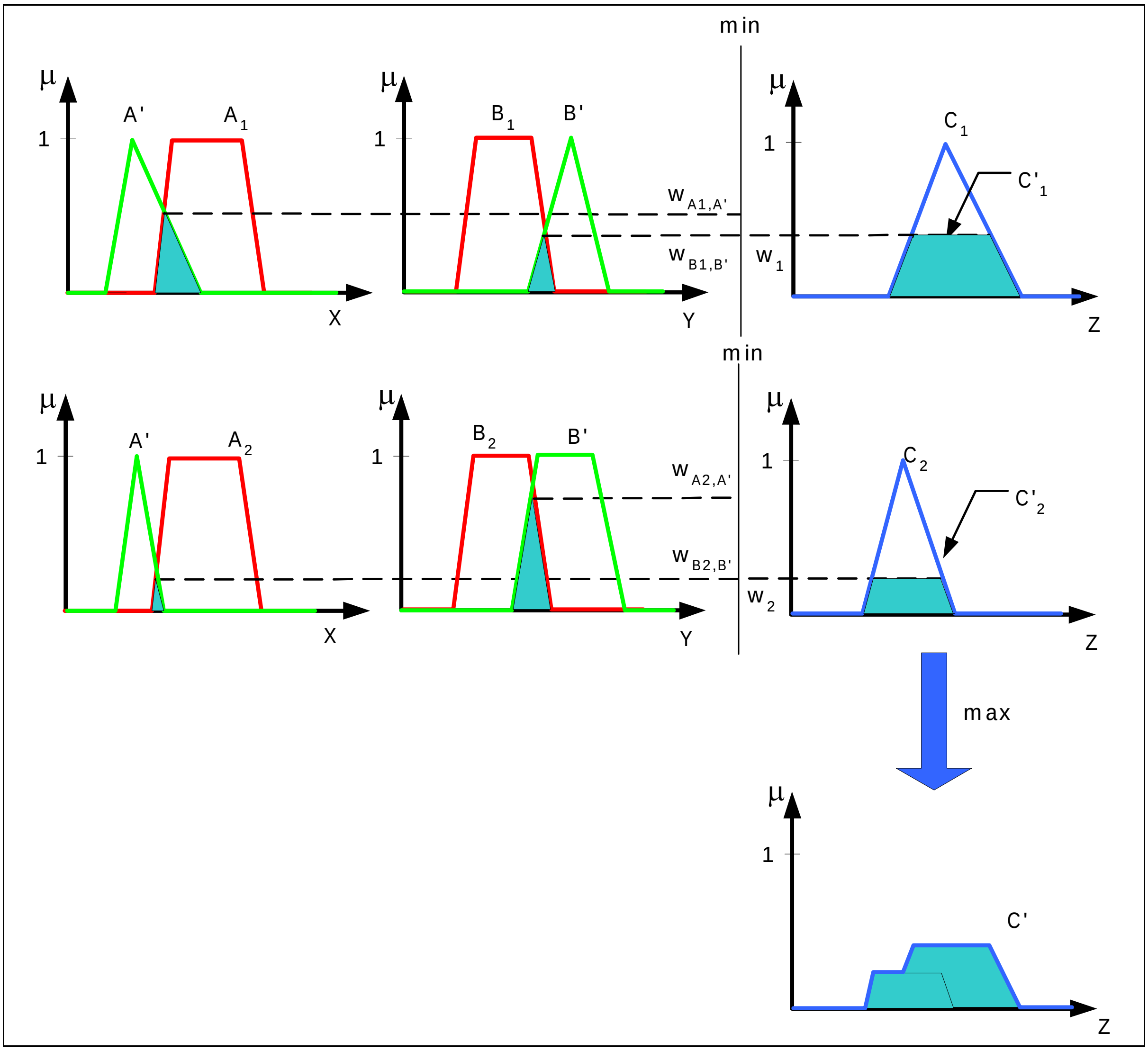

Figura 3-13.- Interpretación gráfica del Modus Ponens Generalizado para varias reglas con múltiples antecedentes, utilizando el implicador borroso de Mamdani (mínimo) y el operador composicional max-min.

1.10 Sistemas de inferencia borrosa

Los sistemas de inferencia borrosa constituyen una clase de algoritmos de cómputo basados en conjuntos borrosos y en el razonamiento aproximado.

Se componen de tres elementos. En primer lugar un conjunto de reglas lógicas, con múltiples antecedentes y un consecuente, denominado base de reglas. En segundo lugar el llamado diccionario que contiene la definición de los conjuntos borrosos asociados a los antecedentes y consecuentes de las reglas. Por último, hay que definir un mecanismo de inferencia.

Las entradas a este tipo de sistemas pueden ser tanto números concisos (*crisp*) como conjuntos borrosos. Cuando se trata de un número conciso hay que o bien considerarlo como un conjunto borroso particular, esto es, con pertenencia 1 para un solo valor de su universo y 0 en el resto (*singleton*), o bien convertirlo a un número borroso en un proceso llamado borrosificación (*fuzzyfication*). La salida del sistema es un conjunto borroso que se obtiene a partir de las entradas, las reglas y el mecanismo de inferencia elegido. Sin embargo, en muchas aplicaciones es necesario que la salida sea un valor numérico y no un número borroso. En esos casos se realiza un proceso de desborrosificación mediante el cual, el conjunto borroso se convierte a un valor del universo de salida representativo de la conclusión obtenida.

En la figura 3-14 se presenta el diagrama de bloques de un sistema de inferencia borroso [Jang 1997]. El proceso básico puede resumirse en las siguientes etapas: obtención de los grados de compatibilidad de las entradas con los antecedentes de las reglas, obtención de las fuerzas de disparo de las reglas, agregación de los consecuentes cualificados y finalmente, en los casos en los que se requiera la desborrosificación.

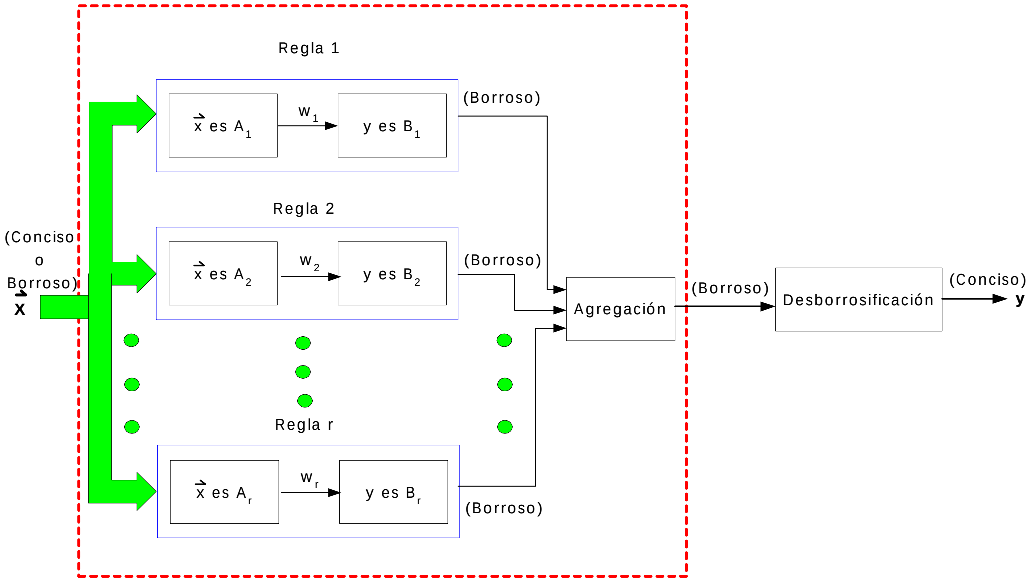

Figura 3-14.- Diagrama de bloques de un sistema de inferencia borrosa. El cuadro rojo agrupa los componentes de un sistema de inferencia básico con salida borrosa.

Una clasificación de los tipos más usuales de sistemas de inferencia borrosa se basa en el modelo utilizado para representar el consecuente de las reglas y en el método de agregación aplicado. Uno de los más utilizados y que es el que hemos utilizado en el planificador instruccional es el de Mamdani.

1.10.1 MODELO BORROSO DE MAMDANI

Este sistema fue propuesto [Mamdani 1975] para el control de una máquina de vapor mediante un conjunto de reglas de control lingüísticas obtenidas de la experiencia de los operadores de la máquina.

Este modelo toma como representación de los consecuentes, conjuntos borrosos que representan las valoraciones de una variable lingüística. Se admiten múltiples reglas con múltiples antecedentes. Cada regla debe tener el mismo conjunto de variables lingüísticas representadas en sus antecedentes. El método de inferencia borrosa, como se ha indicado anteriormente, admite un número de variantes. Concretamente en el modelo de Mamdani, estas variantes se refieren al operador "Y-lógico" donde normalmente se toma una T-norma, el operador "O-lógico" se suele emplear una S-norma, el operador implicación normalmente implementado con una T-norma para calcular el consecuente cualificado y el operador de agregación corrientemente definido por una S-norma. En la figura 3-15 se puede observar un ejemplo.

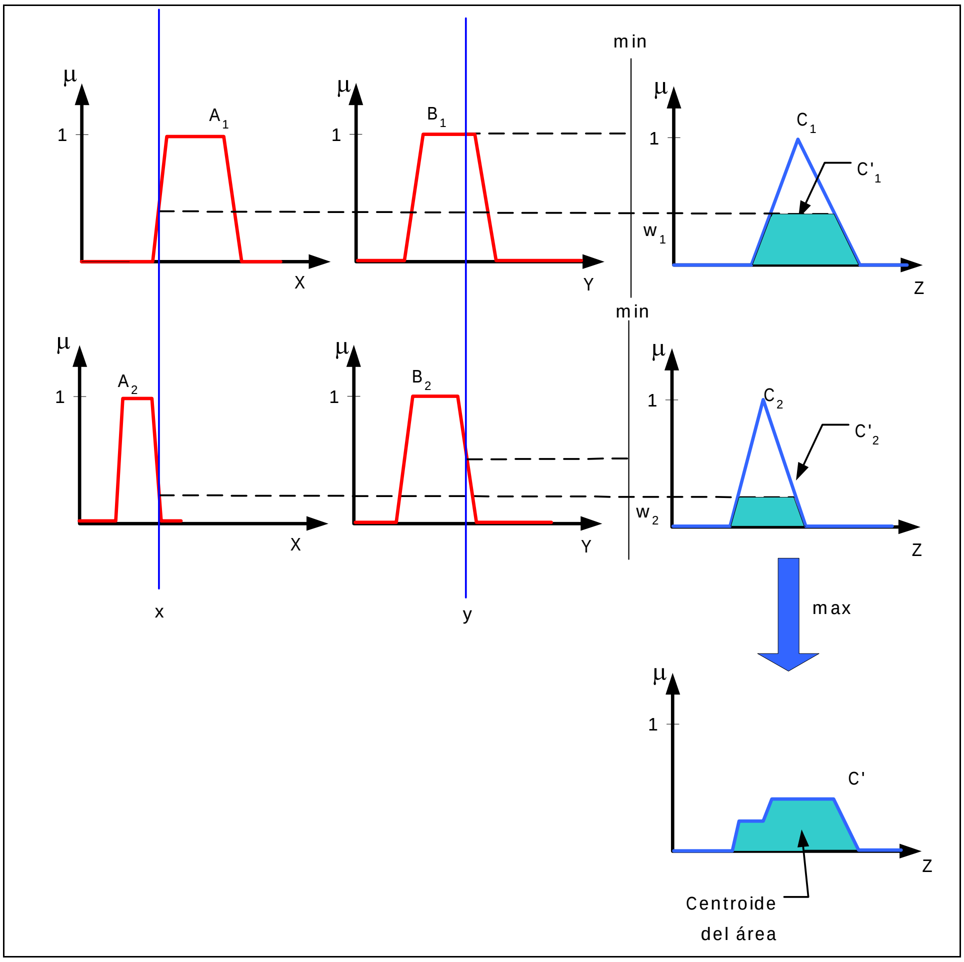

Figura 3-15.- Sistema de inferencia borroso de Mamdani utilizando el mínimo y máximo para la T-norma y S-norma, respectivamente.

En este modelo se suele utilizar un desborrosificador para convertir el conjunto borroso de salida en un valor conciso. Existen diversos métodos para realizar este proceso, cuyos resultados se pueden ver en la figura 3-16:

- Desborrosificación basada en el centroide del área: se trata de calcular el centroide del conjunto borroso resultado de la agregación de todos los consecuentes cualificados.

$$z_{ca} = \frac{\int_Z z\mu_A(z)dz}{\int_Z \mu_A(z)dz}$$

- Bisector del área: se trata de encontrar el valor numérico del elemento del universo del discurso que separa el área del conjunto borroso en dos mitades iguales.
- Media de los máximos: se buscan aquellos elementos del universo del discurso en donde la función de pertenencia del conjunto borroso tome su valor máximo, y se calcula la media de estos puntos.
- Mínimo de los máximos: el procedimiento es igual al anterior, únicamente varia en que se toma el menor de los puntos del universo del discurso en lugar de la media.
- Mayor de los máximos: Idem caso anterior pero esta vez se toma el mayor de los puntos.

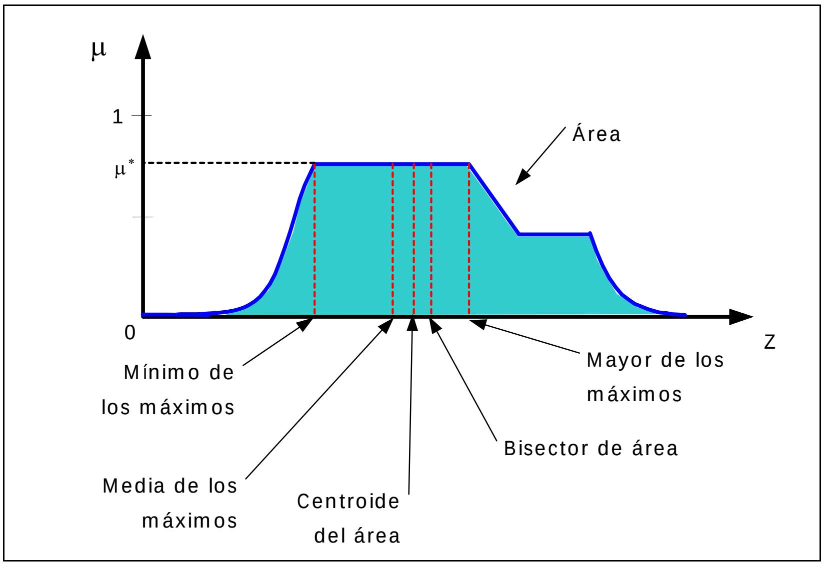

Figura 3-16.- Diferentes métodos de desborrosificación para obtener una valor conciso a la salida.