Universidad de La Laguna
Departamento de Economía Aplicada

Matemáticas II
Grados Economía y ADE

Ejercicios complementarios al Manual

Módulo I: Álgebra Matricial

Marianela Carrillo Fernández
Domingo Israel Cruz Báez
Concepción González Concepción
Juan Carlos Moreno Piquero
Celina Pestano Gabino (coordinadora)
José Enrique Rodríguez Hernández

1. Haz un breve resumen histórico de los orígenes de los determinantes, las matrices y los sistemas de ecuaciones.

2.- Según tu opinión, ¿cuáles son las cinco deferencias esenciales que existen entre matrices y determinantes? Comenta brevemente esas diferencias.

3. Pon ejemplos reales en los cuales se pueda aplicar la teoría de matrices.

4. ¿Cuáles son las condiciones para que dos matrices sean iguales? ¿Y cuándo dos determinantes son iguales?

5. ¿Cuál es la diagonal principal en una matriz rectangular? Pon un ejemplo en una matriz de orden 3x4.

6. ¿Existe alguna relación entre el orden de una matriz y su rango?

7. ¿Qué tienen en común una matriz y su traspuesta?

8. ¿Qué condición es necesaria para que una matriz cuadrada sea simétrica?

9. ¿Existe alguna condición básica para que una matriz cuadrada pueda ser antisimétrica?

10. Se dice que una matriz es idempotente si $A^2 = A$. Comprobar que si A (matriz cuadrada) es idempotente la matriz $B = I - A$, también es idempotente. Calcular A B y B A.

11. Sea A y B, matrices cuadradas de orden 5. Sabiendo que $|A|=2$ y $|B|=-1$. Calcular el valor de:

- **a)** $|5A|$
- **b)** $|-3B|$
- **c)** $|(B^t A^{-1} B^{-1})^t|$

12. ¿Tienen algo en común el producto de matrices cuadradas con el producto de sus correspondientes determinantes?

13. ¿Cómo se multiplica una matriz por un escalar?

14. ¿Cómo afecta a un determinante, su multiplicación por un escalar?

15. Toda matriz ¿tiene un determinante asociado a la misma?

16. Toda matriz cuadrada ¿tiene inversa? ¿Qué es una matriz cuadrada singular?

17. ¿Qué condición es necesaria para que una matriz cuadrada pueda ser regular?

18. Si una matriz cuadrada tiene inversa, ¿qué relación existe entre el determinante de esa matriz y el determinante de la matriz inversa?

19. Si una matriz cuadrada es regular, sus potencias ¿también son matrices regulares?

20. En una matriz cuadrada inversible ¿cómo calcularías fácilmente el rango de esa matriz?

21. Si cambiamos filas o columnas en una matriz ¿cambia el rango?

22. Si cambiamos alguna fila ó columna en un determinante ¿su valor sigue inalterable?

23. Explica con tus palabras, qué significa que dos matrices del mismo orden, son equivalentes.

24. Si dos matrices son equivalentes ¿existe alguna relación entre sus rangos?

25. ¿Por qué crees que es interesante trabajar con matrices particionadas por bloques?

26. Pon algunos ejemplos en economía y/o empresa, donde resulte útil aplicar la teoría de matrices y/o determinantes.

27. Comenta, brevemente, cómo se construye el modelo estático input-output de Leontief , y cuáles son las condiciones que se establece en el mismo, así como las ecuaciones fundamentales.

28. ¿Cuál es la interpretación económica de la inversa de Leontief? ¿y de sus potencias?

29. Dadas dos matrices **A** y **B** cuadradas y del mismo orden, indica (razonando) si son verdaderas o falsas las siguientes igualdades:

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$

b) tr (A+B) = tr (A) + tr (B)

c) tr (A B) = tr (A) tr (B)

d) tr (A) = tr (A^t)

30. Dada A, una matriz cualquiera cuadrada de orden 2, comprobar que se verifica la siguiente igualdad matricial:

$$A^2 - \text{tr}(A)\, A + |A|\, I = 0$$

siendo **I** la matriz identidad y **0** la matriz nula.

31. Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \textbf{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular:

a) $A - B^2$

b) $2A - 3B$

c) $(A B)^t - A^2$

d) A B – B A

e) $A^2 - B^2$

f) (A + B) (A – B)

g) $A B^2$

h) B A B

i) rang (A) y rang(B)

j) ¿Son inversibles algunas de las anteriores matrices? Calcula, en su caso, la matriz inversa de dos formas diferentes.

k) ¿Es $(A B)^{-1} = A^{-1} B^{-1}$?

l) ¿Es cierto que rang (A B) = rang (A) rang(B)?

m) Descompón esas dos matrices en matrices particionadas por bloques, y realiza su multiplicación, mediante los bloques que has elegido.

32. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **y** $C = \begin{pmatrix} -4 & 14 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula A C

b) Calcula A C

c) Se comprueba entonces que A B = A C. Pero es evidente que B ≠ C. ¿Por qué entonces A B = A C?

33. Dadas la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & a & 3 \\ -2 & 4 & b \end{pmatrix}$. Calcula cuánto han de valer a y b para que su rango sea 1.

34. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$. Calcula el rango de la misma según los distintos valores de a (número real).

35. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2a & b \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calcula, cuando sea posible, la inversa de la misma, según los distintos valores de a y b, números reales.

36. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 5 & 4 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & -1 & 4 & 9 \\ 11 & -4 & -3 & 10 & 21 \end{pmatrix}$$

Calcular:

a) A+B

b) A^t, B^t, A^t+B^t, $(A+B)^t$. Comenta los resultados.

c) AB y BA. Comenta los resultados.

d) rang A y rang B. Comenta los resultados.

e) |A| y |B|. Comenta los resultados.

f) Si es posible A^{-1} y B^{-1}.

Sugerencia: para algunas de las cuestiones anteriores, quizás sea interesante que realice operaciones elementales mediante el método de Gauss.

37. Plantea en lenguaje simbólico los ejercicios de los siguientes apartados; resuélvelos por Gauss y/o Cramer; luego convierte datos en parámetros y plantea preguntas reales interesantes y comenta las implicaciones en la/s soluciones si cambian los valores de esos parámetros. Para terminar, añádele al enunciado frases que impliquen que el problema tenga más ecuaciones y/o más variables. Resuelve también los nuevos problemas que tú plantees.

a) Se sabe que un inversor que disponía de 540000 € ha comprado 1420 acciones de dos empresas; cada acción de una de ellas cuesta 320 euros y de la otra 480 euros. ¿cómo ha distribuido el dinero?

b) Tres hermanos han recibido una herencia. Al pequeño le corresponde un 25% del total y al segundo un 30%. Si el mayor ha cobrado 3000€ más que el segundo, ¿cuánto ha percibido cada uno?

c) Una persona dispone de 15000 euros para invertir en bonos, fondos de inversión y acciones. La rentabilidad media de esos activos es de un 5%, 14% y 15%, respectivamente. El inversor quiere que un 20% del total de su capital se invierta en acciones y que se alcance una rentabilidad final del 10%. ¿Cuánto ha de invertir en cada uno de esos bienes?

d) Se desea cercar una superficie de 2002 m^2 para pasto en forma rectangular en un campo a lo largo de la ribera de un río, sin que se requiera cerca a lo largo del río. Si el material para la cerca cuesta 20€ el metro, calcular las dimensiones del terreno que se puede cercar con 6.000€.

e) Se ha comprado con 13.24 € un saco de gofio, obtenido de mezclar de 10 kilogramos de gofio de trigo con 2 kilogramos de gofio de millo. Calcula el precio del kilogramo de gofio de trigo y del kilogramo del de millo, sabiendo que si se mezclase 1 kilogramo de cada clase costaría la mezcla 1.82 euros.

f) Se tiene zumo de dos frutas exóticas que cuestan 6.50€/litro y 4.50€/litro respectivamente. ¿Cuántos litros de cada clase deben mezclarse para obtener 400 litros y que la mezcla resulte a 5€/litro?

g) Tres amigos gastan 440€ durante un fin de semana. Uno de ellos ha gastado 3/5 de lo hecho por otro, y el tercero, un 15% más que éste. ¿Cuánto ha desembolsado cada uno?

h) En un colegio privado hay 80 niños en primaria, de ellos unos pagan la mensualidad completa que vale 750 €, otros tienen descuento del 20% por ser familia numerosa y hay becados con el 40% por Caja Canarias (que son el triple que el resto). Si la recaudación fue de 39750 € calcule el número de alumnos de cada tipo.

i) Una empresa que fabrica cuatro productos (A, B, C, D) se compone de tres secciones de trabajo (I, II, III) por las cuales pasa la fabricación de cada producto. Los tiempos de fabricación para cada producto en cada sección y el tiempo máximo ininterrumpido de trabajo en cada sección están dados por el siguiente cuadro:

Sección	Producto				Tiempo máximo de trabajo
	A	B	C	D	
I	4	1	2	3	200
II	3	1	3	4	240
III	3	1	2	2	280

Calcule el número total de unidades que debe producirse de cada producto A, B, C, D para un total aprovechamiento del tiempo.

j) Costuras Pepi S.L. elabora 5 modelos de camisetas para uniformes: M1, M2, M3, M4 y M5. La dueña tiene previsto hacer al menos 700 unidades del modelo M1 y como máximo 1.200 unidades del modelo M2. Además, un colegio ha solicitado 400 unidades del modelo M3. Los modelos M4 yM5 se elaboran únicamente bajo pedido. Del M5 no puede hacer más de 250 unidades, y la suma de las unidades producidas del M1, M4 y M5 tiene que ser como mínimo el 60% de las unidades producidas del M3. Sabemos que la suma del total de camisetas puede ser como máximo 2.500. Otro dato a tener en cuenta es que por compromisos adquiridos durante años con los proveedores de tejidos al menos el 40% de las camisetas ha de ser del M1. Plantea este modelo utilizando algebra matricial.

38. Es el sistema: $\left.\begin{array}{r} -x+2y+z=4 \\ 3x-y-z=1 \end{array}\right\}$ equivalente a alguno de los siguiente apartados? ¿Por qué?

a) $\left.\begin{array}{r} -x+2y+z=4 \\ -4x+3y+2z=3 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} z-x+2y=4 \\ -z+3x-y=1 \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r} -x+y+z=4 \\ 3x+2y-z=1 \end{array}\right\}$.

39. Estudiar y resolver los sistemas que sean compatibles.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+y-3z=0 \\ 5x+2y-6z=1 \\ -x+y-3z=-3 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} a^2x+y+z=2+a^2 \\ x+a^2y+z=4-a \\ x+y+a^2z=3 \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r} ax+2y+z=a \\ ax+4y+z=6+a \\ a^2x-8y+z=-6 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} -ax+y+z+t=4 \\ x-ay+z+t=3 \\ x+y+z-at=2 \\ x+y+z+t=1 \end{array}\right\}$ **e)** $\left.\begin{array}{r} 5x+3y=2 \\ mx-2y=11 \end{array}\right\}$ **f)** $\left.\begin{array}{r} mx+4y+3z=3 \\ 3x+y+z=2 \\ 4x+3y+2z=0 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r} -2x+3z=1 \\ -x+2z=a \\ -4x+y+2z=a \\ x+y=6 \end{array}\right\}$ **h)** $\left.\begin{array}{r} ax+y+z=0 \\ x+y+3z=0 \\ 3x+4y+10z=0 \end{array}\right\}$ **i)** $\left.\begin{array}{r} ax+y=1 \\ x-z=2 \\ x+z=2 \end{array}\right\}$

j) $\left.\begin{array}{r} ax+by+z=1 \\ x+by+az=1 \\ x+ab\,y+z=b \end{array}\right\}$

40. ¿Para qué valores de a podemos encontrar solución del siguiente sistema con alguna coordenada no nula?

$$\left.\begin{array}{r} ax-y+z=0 \\ 3x+4y+10z=0 \\ x+y+3z=0 \end{array}\right\}$$

41. Estudiar y resolver, en los casos en que sea posible el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} -2x+y=1 \\ -x+2y+z=a \\ 3x-3y-z=b \\ x+y+z=6 \end{array}\right\}$$

42. a) **Si** $\mathbf{X}=(\mathbf{B}-\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}+\mathbf{I})^{-1}\mathbf{C}$ es la solución de un sistema de ecuaciones lineales expresado matricialmente cual podría ser el sistema lineal del que proviene si sabes que $\mathbf{A},\mathbf{B}\in M_n(\mathrm{R})$, $\mathbf{X},\mathbf{C}\in M_{n\times 1}(\mathrm{R})$.

b) ¿Cómo calcularías x_1, x_2, …,x_n sabiendo que $\mathbf{AX}^2=\mathbf{C}$, con $\mathbf{A}\in M_n(\mathrm{R})$, $\mathbf{C}\in M_{n\times 1}(\mathrm{R})$, $\mathbf{X}^2=\begin{pmatrix} x_1^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{pmatrix}\in M_{n\times 1}(\mathrm{R})\in M_{n\mathrm{x}1}(\mathrm{P})$ en caso de que **A** sea inversible?

43. En el modelo de demanda-oferta las funciones de demanda y oferta de cada uno de los dos bienes:

$$\left.\begin{matrix} Q_{d1} = 40 - 3p_1 + 5p_2 \\ Q_{s1} = 55 + 4p_1 - 3p_2 \end{matrix}\right\} \text{ y } \left.\begin{matrix} Q_{d2} = 37 + 6p_1 - 4p_2 \\ Q_{s2} = 55 - 8p_1 + 6p_2 \end{matrix}\right\}$$

Hallar los valores de equilibrio.

44. Para fabricar una unidad de cada uno de 3 productos se necesitan, 10, 5 y 8 unidades del input 1, y, 6, 8 y 5 unidades del input 2, respectivamente. Se dispone de 200 u. del input 1 y 150 del 2. Considerando que utilizamos todos los recursos disponibles se llega a que la combinación posible de las producciones de los 3 productos es única ¿Por qué?

45. Sea la tabla de intercambio entre tres industrias:

Compras / Ventas	Industrias I	II	III	Producción total
I	166	484	44	1035
II	211	2095	448	5133
III	58	440	366	2840

a) Determine la máxima demanda final que puede ser alcanzada por la industria en al situación actual.

b) Construya la matriz de coeficientes técnicos.

c) Demuestre que la economía es productiva.

d) Halle el nivel de producción de las industrias I, II y III necesario para alcanzar una demanda final en el futuro de 400, 2500 y 2000, respectivamente.

46. Consideremos la tabla de transacciones industriales en una economía dividida en tres sectores productivos, expresada en millones de euros:

Output / Input	1	2	3	Demanda final	Producción total
1. Agrario y Pesquero	175	160	20	798	1153
2. Industrial	148	2056	574	2425	5203
3. Servicios	40	550	310	1904	2804
Inputs primarios	790	2437	1900		

a) Calcule la matriz **A** de coeficientes técnicos.

b) Halle la matriz inversa de Leontief y razone, a partir de ella, si la matriz **A** genera una economía productiva. Ratifíquese la respuesta utilizando la condición de Hawkins-Simon.

c) Halle, para cada sector, los requerimientos del único input primario (trabajo) por unidad producida.

d) Calcule los niveles de producción total necesarios en cada sector para alcanzar una demanda final de: $D = (800, 2600, 2200)^t$.

e) Halle, suponiendo que los requerimientos de inputs primarios por unidad se mantienen constantes, la cantidad de este input por sector necesaria para producir los niveles de producción total resultantes en el apartado d).

47. Consideremos la siguiente matriz de coeficientes técnicos de una Economía:

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Cuál es el significado económico del elemento a_{12}? Y ¿del elemento de la matriz inversa de Leontief c_{12} ¿

b) Completar la tabla de relaciones industriales, teniendo en cuenta que la demanda final viene dada por $D = (360 \;\; 2400 \;\; 2000)^t$.

c) ¿Cómo debe comportarse cada sector productivo para abastecer una demanda final proyectada $D = (380 \;\; 2450 \;\; 2040)^t$ ¿ Resolverlo de dos formas (una de ellas tiene que ser por el método de Gauss)

d) Comprobar que A genera una economía productiva, de cuatro formas diferentes.

48. Consideremos el modelo de relaciones intersectoriales dado por la tabla:

	I	II	III	IV	V	D	P
I	10	5	20	3	1	10	49
II	20	10	5	2	30	13	80
III	0	0	10	20	15	15	60
IV	0	0	4	3	2	18	27
V	0	0	5	4	3	20	32

a) Hallar la matriz de transacciones.
b) Hallar la matriz A, de coeficientes técnicos. Interpretar los coeficientes a_{34} y a_{55}.
c) Demostrar que la economía es productiva.

49. Indicar cuáles de las siguientes funciones son formas cuadráticas:

- **a)** $q:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $q(x, y) = xy$
- **b)** $q:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z$
- **c)** $q:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $q(x, y, z) = 2x + 3y - 5z$
- **d)** $q:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $q(x, y, z) = 2x^2 - 3y^2 + 5xy - 3xz + z^2$
- **e)** $q:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $q(x, y) = x^2 - 3y^2 + 1$
- **f)** $q:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida por $q(x, y, z, t) = \ln(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)$

50. Dada la forma cuadrática $q(x, y, z) = 2x^2 - 3xy + y^2 + yz - z^2$, se pide

- **a)** Comprobar que q se puede representar matricialmente de la forma $q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}$, siendo A cualquiera de las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -5 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

- **b)** Dar una expresión genérica para todas las matrices $A \in M_3(\mathbb{R})$ que verifican $q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} \ \forall \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$.
- **c)** Obtener la única matriz simétrica asociada a la forma cuadrática dada.

51. Escribir matricialmente, de tres formas diferentes, la forma cuadrática $q(x,y,z)=-2x^2-2y^2-2z^2+2yz$. Elige en una de las formas el caso simétrico.

52. Clasificar, cuando sea posible, las siguientes formas cuadráticas:

- **a)** $q(x_1, x_2) = -2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$
- **b)** $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$
- **c)** $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + x_3^2$
- **d)** $q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3$
- **e)** $q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + 3x_2x_3 + 2x_3^2$
- **f)** $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1^2 + 6x_1x_4 + x_2^2 + 4x_2x_4 + 2x_2x_3 + 6x_3x_4 + 2x_3^2 + 8x_4^2$

53. Razonar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

- **a)** Una forma cuadrática Q(x,y,z) que verifica Q(1,1,1)=2, Q(2,3,4)= -3 es definida, bien definida positiva o bien definida negativa.
- **b)** Una forma cuadrática Q(x,y,z) que verifica Q(1,1,1)=2, Q(2,3,4)= -3 es indefinida.
- **c)** Una forma cuadrática Q(x,y,z) que verifica Q(1,1,1)=2, Q(2,3,4)=3 es definida positiva.
- **d)** Una forma cuadrática Q(x,y,z) que verifica Q(1,1,1)= -2, Q(2,3,4)= -3 es definida negativa.
- **e)** Una forma cuadrática Q(x,y,z) que verifica Q(1,1,1)=2, Q(2,3,4)=0, es semidefinida positiva.
- **f)** La forma cuadrática $Q(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2$ es definida positiva para todo valor real de los coeficientes a,b,c.
- **g)** La forma cuadrática $Q(x,y,z)= -ax^2-by^2-cz^2$ es definida negativa para todo valor real de los coeficientes a,b,c.

54. Demostrar que si q_1 y q_2 son dos formas cuadráticas de n variables definidas positivas, entonces $q_1 + q_2$ también es una forma cuadrática definida positiva.

55. Demostrar que si $q:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática dada por la expresión matricial $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x}$, siendo $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz no simétrica, entonces q se puede expresar también como $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t B\mathbf{x}$, siendo $B = \frac{1}{2}(A + A^t) \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica.

56. Demostrar que si $B \in M_n(\mathbb{R})$ es una matriz inversible, entonces la forma cuadrática dada por $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t B^t B\mathbf{x}$ es definida positiva.

57. Demostrar que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es definida positiva y $P \in M_n(\mathbb{R})$ es inversible, entonces P^tAP también es definida positiva.

58. ¿Para qué valores de a la forma cuadrática $Q(x,y,z)=ax^2+4y^2-2z^2+xz$ es semidefinida negativa pero no definida negativa?

59. ¿Qué condiciones tienen que verificar los valores a,b,c para que la forma cuadrática $Q(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2axy+2bxz+2cyz$ sea definida positiva? ¿Y para que sea definida negativa?

60. Clasificar las siguientes formas cuadráticas restringidas a los conjuntos que se indican:

a) $q(x,y) = x^2 - 2y^2 + 6xy$, $S = \{(x,y) \in R^2 / y = x\}$

b) $q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_3^2$, $S = \{(x_1,x_2,x_3) \in R^3 / x_1 + 4x_3 = 3x_2\}$

c) $q(x,y,z) = 4xy + 4xz + 4yz$, $S = \{(x,y,z) \in R^3 / x + y + z = 0\}$

d) $q(x,y,z) = 12x^2 - y^2$, $S = \{(x,y,z) \in R^3 / x = 0, y - z = 0\}$

e) $q(u,v,w,t) = u^2 + v^2 + w^2 - t^2 + 2uv - 2ut + 2vw - 2wt$, $S = \{(u,v,w,t) \in R^4 / u - t = 0, v + t = 0\}$

61. La función de beneficios de una empresa que oferta tres productos distintos en cantidades x, y, z viene dada por la forma cuadrática $B(x,y,z)=6x^2-24xy+6y^2+z^2$ (alguna cantidad x,y,z podría ser cero pero no las tres a la vez). ¿Existe alguna combinación de productos que de beneficios negativos y alguna que de beneficios positivos? Si la empresa decidiera ofertar la misma cantidad del primer y del segundo producto ¿se podría asegurar que los beneficios siempre serían positivos? Y ¿si, por el contrario, decidiera ofertar cinco veces más del tercero que del primero?

62. Una empresa debe tomar una decisión sobre la posible producción de cuatro bienes en cantidades x, y, z, t, respectivamente. La función de beneficios, en función de las cantidades producidas, se estima que sería $B(x,y,z,t)=x^2-y^2+z^2-t^2+2xz$. La cantidad producida y influye en la x de forma que por cada unidad de y se obtiene a de x y la cantidad producida t influye en la z de forma que por cada unidad de t se obtiene b de z. ¿Entre qué valores deberán variar a y b para que la empresa obtenga beneficios positivos. Interpretar los resultados.

63. Una tienda de golosinas pretende ampliar su cuota de mercado lanzando tres nuevos tipos de golosinas: un tipo de caramelos para diabéticos, papas fritas sin sal y un tipo de dulces apto para celiacos. Se espera obtener con ellos unos beneficios $B(x,y,z)=x^2-6xy+6y^2+4z^2$ donde, x, y, z representan las cantidades vendidas de los tres productos. ¿Se puede garantizar que cualquier combinación de las cantidades vendidas ofrece beneficios a la empresa? ¿Y si vende el doble de caramelos para diabéticos que de dulces para celiacos?