Universidad de La Laguna
Departamento de Economía Aplicada

Matemáticas II
Grados Economía y ADE

Ficha para el dominio de la teoría VI

Formas Cuadráticas

Marianela Carrillo Fernández
Domingo Israel Cruz Báez
Concepción González Concepción
Juan Carlos Moreno Piquero
Celina Pestano Gabino (coordinadora)
José Enrique Rodríguez Hernández

Definición 4.1: Dada una matriz $A \in M_n(\mathrm{IR})$, se define la **FORMA CUADRÁTICA real asociada a la matriz** A a la función $Q : \mathrm{IR}^n \to \mathrm{IR}$ dada por $Q(x) = x^T A x$ para todo $\mathrm{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \dots \\ \mathrm{x}_n \end{pmatrix} \in \mathrm{IR}^n$.

Esto es, una forma cuadrática es una expresión polinómica en n variables cuyos términos son todos de grado dos.

Ejemplo: $\mathrm{Q}(\mathrm{x}) = (\mathrm{x} \quad \mathrm{y}) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} = \mathrm{x}^2 + 5\mathrm{xy} + 4\mathrm{y}^2$

Nota: Toda Forma Cuadrática puede expresarse en términos de una matriz simétrica puesto que

$$x^T A x = x^T \frac{A + A^T}{2} x$$

Ejemplo: $\mathrm{Q}(\mathrm{x}) = (\mathrm{x} \quad \mathrm{y}) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} = \mathrm{x}^2 + 5\mathrm{xy} + 4\mathrm{y}^2 = (\mathrm{x} \quad \mathrm{y}) \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 5/2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix}$.

CLASIFICACIÓN DE FORMAS CUADRÁTICAS

Dada una matriz simétrica $A \in M_n(\mathrm{IR})$, se dice que la **Forma Cuadrática asociada a** A **es** (y del mismo modo, se dice que **la matriz** A **es**):

· **Definida Positiva** $\overset{Definicion}{\Longleftrightarrow}$ $x^T A x > 0$ para todo $x \in \mathrm{IR}^n$, $x \neq 0$

· **Semidefinida Positiva** $\overset{Definicion}{\Longleftrightarrow}$ $x^T A x \geq 0$ para todo $x \in \mathrm{IR}^n$

· **Definida Negativa** $\overset{Definicion}{\Longleftrightarrow}$ $x^T A x < 0$ para todo $x \in \mathrm{IR}^n$, $x \neq 0$

· **Semidefinida Negativa** $\overset{Definicion}{\Longleftrightarrow}$ $x^T A x \leq 0$ para todo $x \in \mathrm{IR}^n$

· **Indefinida** $\overset{Definicion}{\Longleftrightarrow}$ no es Semidefinida Positiva ni Semidefinida Negativa

Proposición 4.1: Dada una matriz simétrica $A \in M_n(\mathrm{IR})$, siendo A_i el determinante de la submatriz de orden i que se forma sobre la diagonal principal de A empezando en su primer elemento a_{11}, se tiene:

· Si $A_1 > 0,\ A_2 > 0, \dots,\ A_{n-1} > 0\ y\ A_n \geq 0 \implies A$ **Semidefinida Positiva**

· Si $A_1 < 0,\ A_2 > 0, \dots,$ (alterna el signo) pudiendo anularse sólo $A_n \implies A$ **Semidefinida Negativa**

Particularmente,

$A_1 > 0,\ A_2 > 0, \dots,\ A_{n-1} > 0\ y\ A_n > 0 \iff A$ **Definida Positiva**

$A_1 < 0,\ A_2 > 0, \dots,$ (alterna el signo) $\iff A$ **Definida Negativa**

· Si **no se verifica** $A_1 \geq 0, A_2 \geq 0, \ldots, A_n \geq 0$ **ni** $A_1 \leq 0, A_2 \geq 0, \ldots,$ (alterna el signo) $\Longrightarrow$ A **Indefinida**

No has entendido bien la teoría si a partir de ella crees que son ciertas, por ejemplo, las siguientes afirmaciones falsas:

i) Si hay algún A_i =0 con i≠n entonces la forma cuadrática es Indefinida
ii) Si hay algún A_i=0 y el resto son positivos la forma cuadrática es Semidefinida Positiva
iii) Si hay algún A_i=0 y el resto son negativos la forma cuadrática es Semidefinida Negativa

FORMAS CUADRÁTICAS RESTRINGIDAS

Definición 4.2: Sea una matriz simétrica $A \in M_n(\mathrm{IR})$**,** y una matriz $W \in M_{m \times n}(\mathrm{IR})$, con $rang(W) = m$**.** Consideremos el subespacio $S = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{IR}^n : Wx = 0 \right\}$.

Se define la **Forma Cuadrática real restringida a** S **asociada a la matriz** A a la función $Q : \mathrm{S} \to \mathrm{IR}$ dada por $Q(x) = x^T Ax$ para todo $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{S}$.

Ejemplo: $Q(x) = (x \quad y)\begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 5/2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con (x y) verificando x+3y=0, esto es $(1 \quad 3)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$. En decir, $Q(x) = x^2 + 5xy + 4y^2$ con x=-3y, esto es, Q(x)=-2y^2 o, escrito en forma matricial, $Q(x) = (-3y \quad y)\begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 5/2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3y \\ y \end{pmatrix}$

CLASIFICACIÓN DE FORMAS CUADRÁTICAS RESTRINGIDAS

La **Forma Cuadrática** Q **restringida a** S **asociada a la matriz** A **es** (esto es, se dice que Q **restringida a** S **es**):

· **Definida Positiva** $\overset{Definicion}{\Longleftrightarrow}$ $x^T Ax > 0$ para todo $x \in S, x \neq 0$

· **Semidefinida Positiva** $\overset{Definicion}{\Longleftrightarrow}$ $x^T Ax \geq 0$ para todo $x \in S$

· **Definida Negativa** $\overset{Definicion}{\Longleftrightarrow}$ $x^T Ax < 0$ para todo $x \in S, x \neq 0$

· **Semidefinida Negativa** $\overset{Definicion}{\Longleftrightarrow}$ $x^T Ax \leq 0$ para todo $x \in S$

· **Indefinida** $\overset{Definicion}{\Longleftrightarrow}$ no es Semidefinida Positiva ni Semidefinida Negativa.

Proposición 4.2: En las condiciones de la definición anterior, consideremos la matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & W \\ W^T & A \end{pmatrix} \in M_{m+n}(\mathrm{IR})$ y simbolicemos B_i el determinante de la submatriz de orden i que se forma sobre la diagonal principal de B empezando en su primer elemento. Entonces, siendo *m*<*n*, se tiene:

· Si $B_{1+2m}, B_{2+2m}, \ldots, B_{n+m}$ tienen todos el signo de (-1)^m $\Longrightarrow$ Q restringida a S es **Definida Positiva**

• Si $B_{1+2m}, B_{2+2m}, \ldots, B_{n+m}$ alternan en signo comenzando por $(-1)^{m+1} \Longrightarrow Q$ restringida a S es **Definida Negativa**

O dicho de otra manera:

Proposición 4.3: En las condiciones de la definición anterior, consideremos la matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & W \\ -W^T & A \end{pmatrix} \in M_{m+n}(\mathrm{IR})$ y simbolicemos B_i el determinante de la submatriz de orden i que se forma sobre la diagonal principal de B empezando en su primer elemento. Entonces, siendo $m<n$, se tiene:

• Si $B_{1+2m} > 0, B_{2+2m} > 0, \ldots, B_{n+m} > 0 \Longrightarrow Q$ restringida a S es **Definida Positiva**

• Si $B_{1+2m} < 0, B_{2+2m} > 0, \ldots,$ (alterna el signo) $\Longrightarrow Q$ restringida a S es **Definida Negativa**

No has entendido bien la teoría si a partir de ella crees que son ciertas, por ejemplo, las siguientes afirmaciones falsas:

iii) Si todos los Bi son negativos la forma cuadrática restringida en cuestión es Indefinida
iv) Si todos los B_i son positivos menos el último que es nulo, la forma cuadrática restringida aen cuestión es Semidefinida Positiva
v) Si la forma cuadrática restringida a S es Definida Positiva entonces los B_i son todos positivos a partir del B_{1+2m}

C1) Escribe donde está el error en la interpretación de la teoría que se comente en las afirmaciones falsas marcadas en rojo.