Universidad de La Laguna
Departamento de Economía Aplicada

Ficha para el dominio de la teoría VIII

(Continuación)

Optimización Condicionada no Lineal Caso General

Marianela Carrillo Fernández
Domingo Israel Cruz Báez
Concepción González Concepción
Juan Carlos Moreno Piquero
Celina Pestano Gabino (coordinadora)
José Enrique Rodríguez Hernández

Se plantea el siguiente problema de optimización (que contiene en particular el caso anterior, llamado clásico):

Problema de Optimización Condicionada (I)

$$\begin{aligned}&\textbf{Max. o Min. } F(x_1,\dots,x_n)\\ &\textbf{s.a.}\\ &h_1(x_1,\dots,x_n)=b_1\\ &\vdots\\ &h_m(x_1,\dots,x_n)=b_m\\ &g_1(x_1,\dots,x_n)\le c_1\\ &\vdots\\ &g_p(x_1,\dots,x_n)\le c_p\end{aligned}$$

Función Objetivo (se supone suficientemente diferenciable)

m restricciones. ($h_1,\dots,h_m$ se suponen suficientemente diferenciables)

p restricciones. ($g_1,\dots,g_p$ se suponen suficientemente diferenciables)

<u>Función Lagrangiana asociada a (I):</u>

$$L(x_1,\dots,x_n) = F(x_1,\dots,x_n) - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i(h_i(x_1,\dots,x_n)-b_i) - \sum_{i=1}^{p}\mu_i(g_i(x_1,\dots,x_n)-c_i).$$

Las constantes auxiliares $\lambda_1,\dots,\lambda_m$, $\mu_1,\dots,\mu_p$ se denominan **multiplicadores de Lagrange** asociados a (I) y su **interpretación económica** también es muy importante.

ÓPTIMOS LOCALES CONDICIONADOS

MÉTODO DE LAGRANGE

<u>Teorema 1.-</u> (Condiciones necesarias de primer orden. Condiciones de Kuhn-Tucker.)

"Bajo ciertas condiciones de regularidad", si $(a_1,\dots a_n)\in\mathbb{R}^n$ es un máximo (mínimo respectivamente) local del problema (I) $\Rightarrow$ $\exists\lambda_1,\dots,\lambda_m,\mu_1,\dots,\mu_p\in\mathbb{R}$ únicos tales que:

i) $(a_1,\dots a_n)$ es punto crítico de la función de Lagrange.

ii) $h_i(a_1,\dots,a_n)=b_i$ para todo $i=1,2,\dots,m$, y $g_j(a_1,\dots,a_n)\le c_j$ para todo $j=1,2,\dots,p$.

iii) $\mu_j\cdot(g_j(a_1,\dots,a_n)-c_j)=0$ para todo $j=1,2,\dots,p$.

iv) $\mu_j\ge 0$ si máximo, ($\mu_j\le 0$, si mínimo) para todo $j=1,2,\dots,p$.

(Esto quiere decir que $(a_1,\dots a_n)$ es un punto crítico condicionado o **candidato a máximo o mínimo local** del problema (I) y tendremos que confirmar de qué tipo de punto se trata).

Además, para $(a_1,\dots a_n)$, $\lambda_1,\dots,\lambda_m,\mu_1,\dots,\mu_p$ verificando **i)**, **ii)**, **iii)**, **iv)** se tiene que:

a) Si $(a_1,\dots a_n)$ es máximo local de $L(x_1,\dots x_n)$ $\Rightarrow$ $(a_1,\dots a_n)$ es un máximo local de (I).

b) Si $(a_1,...a_n)$ es mínimo local de $L(x_1,...x_n) \Rightarrow$ $(a_1,...a_n)$ es un mínimo local de (I).

c) En otro caso, existe una "duda".

MÉTODO DEL HESSIANO ORLADO

Teorema 2.- (Condiciones suficientes de segundo orden)

Sea $A=HL(a_1,...a_n)$ la matriz Hessiana de la función de Lagrange evaluada en el punto $(a_1,...a_n)$, y sea W la matriz cuyas filas se forman con las derivadas parciales primeras evaluadas en $(a_1,...a_n)$ de $h_i(x_1,...x_n)$ $(1\le i\le m)$ y $g_j(x_1,...x_n)$ $(1\le j\le p$ y tal que $\mu_j\neq 0)$ y sea q el número de filas de W.

Para $(a_1,...a_n)$, $\lambda_1,...,\lambda_m,\mu_1,...,\mu_p$ verificando **i)**, **ii)**, **iii)**, **iv)** en Teorema 1 y suponiendo que el punto es regular, si denotamos la matriz B= $\begin{pmatrix} 0 & W \\ -W^T & A \end{pmatrix} \in M_{n+q}(\mathrm{IR})$, se tiene:

a) Si los n-q últimos menores principales de B son todos de signo positivo $\Rightarrow$ $(a_1,...a_n)$ es un mínimo local de (I).

b) Si los n-q últimos menores principales de B alternan en signo empezando por negativo $\Rightarrow$ $(a_1,...a_n)$ es un máximo local de (I).

c) En otro caso, existe una "duda".

Nota: En el caso q=n, no tiene sentido la secuencia anterior (formada por los "últimos" n-q menores principales de B), pero podemos confirmar que $(a_1,...a_n)$ es un mínimo o máximo local de (I) directamente si es candidato a mínimo o máximo local de (I) según el Teorema 1.

ÓPTIMOS GLOBALES CONDICIONADOS

Teorema 3. Si el conjunto factible de (I) es acotado, entonces existe máximo y mínimo global de (I).

Teorema 4. Para $(a_1,...a_n)$, $\lambda_1,...,\lambda_m,\mu_1,...,\mu_p$ verificando i), ii), iii), iv) en Teorema 1 se tiene que:

Si $HL(x_1,...x_n)$ es Semidefinida Positiva (Semidefinida Negativa) para **todo** $(x_1,...x_n)\in \mathrm{IR}^n$

$$\Downarrow$$

$(a_1,...a_n)$ es un mínimo (máximo) global de (I).

Y si además $HL(a_1,...a_n)$ es Definida Positiva (Definida Negativa)

$$\Downarrow$$

$(a_1,...a_n)$ es el único mínimo (máximo) global de (I).

Recordar que:

. Si todos los menores principales de HL(x) son positivos podemos asegurar que HL(x) es definida positiva. Si los menores principales son positivos salvo el último que también podría ser cero podemos afirmar que es Semidefinida positiva.

. Si todos los menores principales de HL(x) alternan en signo empezando por negativo podemos asegurar que HL(x) es definida negativa. Si lo menores alternan en signo empezando por negativo y el último es nulo podemos afirmar que es Semidefinida negativa.

No has entendido bien la teoría si a partir de ella crees que son ciertas, por ejemplo, las siguientes afirmaciones falsas:

i) En un problema de optimización clásica (sin restricciones de desigualdad), los puntos críticos de la función lagrangiana con algún multiplicador positivo no pueden ser candidatos a mínimo.

ii) Las condiciones de Kuhn-Tucker sólo las verifican los puntos regulares de la región factible.

iii) En un problema del tipo (I) si un punto verifica las condiciones de Kuhn-Tucker de candidato a mínimo con algún multiplicador de los asociados a restricción de desigualdad negativo, y los menores principales del hessiano de L alternan en signo empezando por negativo, entonces el punto es máximo relativo.

iv) Si conocemos todos los candidatos a máximo y a mínimo de Kuhn-Tucker, uno de ellos ha de ser el mínimo absoluto y otro el máximo absoluto, aunque estudiando los signos de los menores principales del hessiano asociado sólo podamos afirmar que es relativo.

v) El método del hessiano orlado sólo se puede utilizar cuando la conclusión que obtenemos de estudiar los signos de HL(a) es que a es punto de silla o nos quedemos en duda.

vi) Si (a,b) es punto crítico de $f(x,y)$ y f_{xx} y f_{yy} son negativas en (a,b) entonces (a,b) es un máximo relativo de $f(x,y)$

vii) Si $f_x(a,b)=0$ y $f_y(a,b)=0$ entonces (a,b) es siempre máximo relativo de $f(x,y)$.

viii) Si f_{xx}, f_{yy} son positivas en (a,b) entonces (a,b) es un mínimo relativo de $f(x,y)$.

C1) Para cada una de las "propiedades falsas" (en rojo) da un contraejemplo en el que se vea que es falsa en general. Además resalta en las que te parezca interesante la razón que tú crees que es la causante de que se cometa por algunos el error de creer que es cierta.

C2) Para las "propiedades falsas" (en rojo) que puedas, da un ejemplo en el que sí se verifique "por casualidad".