Universidad de La Laguna
Departamento de Economía Aplicada

**Matemáticas II**
**Grados Economía y ADE**

Marianela Carrillo Fernández
Domingo Israel Cruz Báez
Concepción González Concepción
Juan Carlos Moreno Piquero
Celina Pestano Gabino (coordinadora)
José Enrique Rodríguez Hernández



# Ficha para el dominio de la teoría VIII

# Optimización Clásica Condicionada

Se plantea el siguiente problema de optimización:

**Problema de Optimización Clásica Condicionada (I)**

$$\begin{array}{l}\textbf{Max. o Min. } F(x_1,\ldots,x_n) \\ \textbf{s.a.} \\ \qquad h_1(x_1,\ldots,x_n)=0 \\ \qquad \vdots \\ \qquad h_m(x_1,\ldots,x_n)=0\end{array}$$

Función Objetivo (se supone suficientemente diferenciable)

m restricciones. ($g_1,\ldots,g_m$ se suponen suficientemente diferenciables)

**Función Lagrangiana asociada al problema (I):** $L(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = F(x_1,\ldots,x_n) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i(x_1,\ldots,x_n)$ .

Las variables auxiliares ,$\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ se denominan **multiplicadores de Lagrange** asociados al problema (I).

## Óptimos Locales Condicionados

**Teorema (de los Multiplicadores de Lagrange).-** "Bajo ciertas condiciones de regularidad (esto es, que la matriz formada por las derivadas de primer orden de las restricciones tiene rango máximo en los puntos factibles), si $(a_1,\ldots a_n)\in\mathbb{R}^n$ es un óptimo local del problema (I) $\Rightarrow$ $\exists\bar\lambda_1,\ldots,\bar\lambda_m \in\mathbb{R}$ tales que $(a_1,\ldots a_n,\bar\lambda_1,\ldots,\bar\lambda_m)$ es un punto crítico de la función Lagrangiana asociada al problema (I). Además:

- **a)** Si $(a_1,\ldots a_n,\bar\lambda_1,\ldots,\bar\lambda_m)$ es mínimo local de $L(x_1,\ldots x_n,\bar\lambda_1,\ldots,\bar\lambda_m)$ (*como función sólo de* $x_1,\ldots,x_n$) $\Rightarrow$ $(a_1,\ldots a_n)$ es un mínimo local del problema (I).
- **b)** Si $(a_1,\ldots a_n,\bar\lambda_1,\ldots,\bar\lambda_m)$ es máximo local de $L(x_1,\ldots x_n,\bar\lambda_1,\ldots,\bar\lambda_m)$ (*como función sólo de* $x_1,\ldots,x_n$) $\Rightarrow$ $(a_1,\ldots a_n)$ es un máximo local del problema (I).
- **c)** En otro caso, existe una duda. "

*Algunos de los casos en los que existe una duda por el Teorema de los Multiplicadores de Lagrange (Apartado c)) pueden ser solucionados a través del método del Hessiano Orlado que utiliza los resultados correspondientes a formas cuadráticas condicionadas:*

### Método del Hessiano Orlado:

**Caso 1:** $\begin{array}{l}\textbf{Max. o Min. } F(x,y) \\ \qquad \textbf{s.a.} \quad h(x,y)=0\end{array}$

**Teorema (del Hessiano Orlado 1).-** Si $(a,b\bar\lambda)$ es un punto crítico de la función lagrangiana asociada al problema (Caso 1) que verifica que: $h_x(a,b)\neq 0$, o, $h_y(a,b)\neq 0$, y siendo $B_3$=**HO**= $\begin{vmatrix} 0 & h_x(a,b) & h_y(a,b) \\ h_x(a,b) & L_{xx}(a,b,\bar\lambda) & L_{xy}(a,b,\bar\lambda) \\ h_y(a,b) & L_{xy}(a,b,\bar\lambda) & L_{yy}(a,b,\bar\lambda)\end{vmatrix}$,

se verifica que:

**a)** $B_3>0 \;\Rightarrow\;$ (a,b) es un máximo local del problema (Caso 1).

**b)** $B_3<0 \;\Rightarrow\;$ (a,b) es un mínimo local del problema (Caso 1).

**c)** En otro caso, existe duda.

O equivalentemente, siendo $B_3=\mathbf{HO}=\begin{vmatrix} 0 & h_x(a,b) & h_y(a,b) \\ -h_x(a,b) & L_{xx}(a,b,\bar{\lambda}) & L_{xy}(a,b,\bar{\lambda}) \\ -h_y(a,b) & L_{xy}(a,b,\bar{\lambda}) & L_{yy}(a,b,\bar{\lambda}) \end{vmatrix}$, se verifica que:

**a)** $B_3<0 \;\Rightarrow\;$ (a,b) es un máximo local del problema (Caso 1).

**b)** $B_3>0 \;\Rightarrow\;$ (a,b) es un mínimo local del problema (Caso 1).

**c)** En otro caso, existe duda.

**<u>Caso 2:</u>**

| |
|---|
| **Max. o Min. F(x,y,z)** |
| **s.a. h(x,y,z)=0** |

**<u>Teorema (del Hessiano Orlado 2).-</u>** Si $(a,b,c,\bar{\lambda})$ es un punto crítico de la función lagrangiana asociada al problema (Caso 2) que verifica que: $h_x(a,b,c)\neq 0$, o, $h_y(a,b,c)\neq 0$, o, $h_z(a,b,c)\neq 0$, y siendo

**$B_3$**

$$B_4=\mathbf{HO}=\begin{vmatrix} 0 & h_x(a,b,c) & h_y(a,b,c) & h_z(a,b,c) \\ h_x(a,b,c) & L_{xx}(a,b,c,\bar{\lambda}) & L_{xy}(a,b,c,\bar{\lambda}) & L_{xz}(a,b,c,\bar{\lambda}) \\ h_y(a,b,c) & L_{xy}(a,b,c,\bar{\lambda}) & L_{yy}(a,b,c,\bar{\lambda}) & L_{yz}(a,b,c,\bar{\lambda}) \\ h_z(a,b,c) & L_{xz}(a,b,c,\lambda) & L_{yz}(a,b,c,\lambda) & L_{zz}(a,b,c,\bar{\lambda}) \end{vmatrix}$$, se verifica que:

**a)** $B_3>0$ y $B_4<0 \;\Rightarrow\;$ (a,b,c) es un máximo local del problema (Caso 2).

**b)** $B_3<0$ y $B_4<0 \;\Rightarrow\;$ (a,b,c) es un mínimo local del problema (Caso 2).

**c)** En otro caso, existe duda.

**$B_3$**

O equivalentemente, siendo $B_4=\mathbf{HO}=\begin{vmatrix} 0 & h_x(a,b,c) & h_y(a,b,c) & h_z(a,b,c) \\ -h_x(a,b,c) & L_{xx}(a,b,c,\bar{\lambda}) & L_{xy}(a,b,c,\bar{\lambda}) & L_{xz}(a,b,c,\bar{\lambda}) \\ -h_y(a,b,c) & L_{xy}(a,b,c,\bar{\lambda}) & L_{yy}(a,b,c,\bar{\lambda}) & L_{yz}(a,b,c,\bar{\lambda}) \\ -h_z(a,b,c) & L_{xz}(a,b,c,\bar{\lambda}) & L_{yz}(a,b,c,\bar{\lambda}) & L_{zz}(a,b,c,\bar{\lambda}) \end{vmatrix}$, se verifica que:

**a)** $B_3<0$ y $B_4>0 \;\Rightarrow\;$ (a,b,c) es un máximo local del problema (Caso 2).

**b)** $B_3>0$ y $B_4>0 \;\Rightarrow\;$ (a,b,c) es un mínimo local del problema (Caso 2).

**c)** En otro caso, existe duda.

**<u>Caso 3:</u>**

| |
|---|
| **Max. o Min. F(x,y,z)** |
| **s.a. $h_1$(x,y,z)=0** |
| **$h_2$(x,y,z)=0** |

**Teorema (del Hessiano Orlado 3).-** Si $(a,b,c,\bar{\lambda},\bar{\mu})$ es un punto crítico de la función lagrangiana asociada al problema (Caso 3) que verifica que Rango$\begin{pmatrix} h_{1_x}(a,b,c) & h_{1_y}(a,b,c) & h_{1_z}(a,b,c) \\ h_{2_x}(a,b,c) & h_{2_y}(a,b,c) & h_{2_z}(a,b,c) \end{pmatrix}$=2; y siendo

$$B_5=\mathbf{HO}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & h_{1_x}(a,b,c) & h_{1_y}(a,b,c) & h_{1_z}(a,b,c) \\ 0 & 0 & h_{2_x}(a,b,c) & h_{2_y}(a,b,c) & h_{2_z}(a,b,c) \\ h_{1_x}(a,b,c) & h_{2_x}(a,b,c) & L_{xx}(a,b,c,\bar{\lambda},\bar{\mu}) & L_{xy}(a,b,c,\bar{\lambda},\bar{\mu}) & L_{xz}(a,b,c,\bar{\lambda},\bar{\mu}) \\ h_{1_y}(a,b,c) & h_{2_y}(a,b,c) & L_{xy}(a,b,c,\bar{\lambda},\bar{\mu}) & L_{yy}(a,b,c,\bar{\lambda},\bar{\mu}) & L_{yz}(a,b,c,\bar{\lambda},\bar{\mu}) \\ h_{1_z}(a,b,c) & h_{2_z}(a,b,c) & L_{xz}(a,b,c,\bar{\lambda},\bar{\mu}) & L_{yz}(a,b,c,\bar{\lambda},\bar{\mu}) & L_{zz}(a,b,c,\bar{\lambda},\bar{\mu}) \end{vmatrix}$$

Entonces se verifica que:

**a)** $B_5<0 \Rightarrow$ (a,b,c) es un máximo local del problema (Caso 3).

**b)** $B_5>0 \Rightarrow$ (a,b,c) es un mínimo local del problema (Caso 3).

**c)** En otro caso, existe duda.

O equivalentemente siendo

$$B_5=\mathbf{HO}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & h_{1_x}(a,b,c) & h_{1_y}(a,b,c) & h_{1_z}(a,b,c) \\ 0 & 0 & h_{2_x}(a,b,c) & h_{2_y}(a,b,c) & h_{2_z}(a,b,c) \\ -h_{1_x}(a,b,c) & -h_{2_x}(a,b,c) & L_{xx}(a,b,c,\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2) & L_{xy}(a,b,c,\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2) & L_{xz}(a,b,c,\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2) \\ -h_{1_y}(a,b,c) & -h_{2_y}(a,b,c) & L_{xy}(a,b,c,\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2) & L_{yy}(a,b,c,\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2) & L_{yz}(a,b,c,\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2) \\ -h_{1_z}(a,b,c) & -h_{2_z}(a,b,c) & L_{xz}(a,b,c,\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2) & L_{yz}(a,b,c,\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2) & L_{zz}(a,b,c,\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2) \end{vmatrix}$$

Entonces se verifica que:

**a)** $B_5<0 \Rightarrow$ (a,b,c) es un máximo local del problema (Caso 3).

**b)** $B_5>0 \Rightarrow$ (a,b,c) es un mínimo local del problema (Caso 3).

**c)** En otro caso, existe duda.

**Caso General:** **Max. o Min. $F(x_1,...,x_n)$**

**s.a.** $\mathbf{h_1(x_1,...,x_n)=0}$

$\vdots$

$\mathbf{h_m(x_1,...,x_n)=0}$

**Teorema (del Hessiano Orlado).-** Si $(a_1,a_2\ldots a_n,\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2...\bar{\lambda}_m)$ es un punto crítico de la función lagrangiana asociada al problema (Caso general) que verifica que RangoW=m con W=$\begin{pmatrix} h_{1_{x_1}}(a_1...a_n) & ... & h_{1_{x_n}}(a_1...a_n) \\ ... & ... & ... \\ h_{m_{x_1}}(a_1...a_n) & ... & h_{m_{x_n}}(a_1...a_n) \end{pmatrix}$.

Siendo A= $HL(a_1,a_2\ldots a_n,\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2...\bar{\lambda}_m)$ y B=$\begin{pmatrix} 0 & W \\ W^T & A \end{pmatrix}$ y $B_r$ el menor principal de orden r de la matriz B, se verifica:

**a)** Si $B_{1+2m}, B_{2+2m},\ldots, B_{n+m}$ alternan en signo comenzando por $(-1)^{m+1} \Rightarrow (a_1,a_2\ldots a_n)$ es un máximo local de problema inicial.

**b)** Si $B_{1+2m}, B_{2+2m}, \ldots, B_{n+m}$ tienen todos el signo de $(-1)^m \Rightarrow (a_1,a_2\ldots a_n)$ es un mínimo local de problema inicial.

**c)** En otro caso, existe duda.

O equivalentemente, siendo $B=\begin{pmatrix} 0 & W \\ -W^T & A \end{pmatrix}$ y $B_r$ el menor principal de orden r de la matriz B, se verifica:

**a)** $B_{1+2m} < 0, B_{2+2m} > 0, \ldots$ (alternan en signo empezando en negativo) $\Rightarrow (a_1,a_2\ldots a_n)$ es un máximo local de problema inicial.

**b)** $B_{1+2m} > 0, B_{2+2m} > 0, \ldots, B_{n+m} > 0 \Rightarrow (a_1,a_2\ldots a_n)$ es un mínimo local de problema inicial.

**c)** En otro caso, existe duda.

## ÓPTIMOS GLOBALES CONDICIONADOS

**Teorema 3.** Si el conjunto factible de (I) es acotado, entonces existe máximo y mínimo global de (I).

**Teorema 4.** Suponiendo que todos los puntos de la región factible son regulares se tiene que:

**a)** Si $HL(x_1,...x_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2... \bar{\lambda}_m)$ es semidefinida positiva (negativa) para **todo** $(x_1,...x_n)$ factible

$$\Downarrow$$

$(a_1,...a_n)$ es un mínimo (máximo) global de (I).

**b)** Si $(a_1,...a_n)$ es candidato a mínimo (máximo) local de (I) por el Teorema 1, $F(x_1,...x_n)$ es Convexa (Cóncava) para **todo** $(x_1,...x_n)\in\mathbb{R}^n$, y las $h_i$ son lineales

$$\Downarrow$$

$(a_1,...a_n)$ es mínimo (máximo) global de (I).

**c)** Si el conjunto factible es acotado y $(a_1,...a_n)$ es el único punto crítico el cual es mínimo (máximo) local de (I)

$$\Downarrow$$

$(a_1,...a_n)$ es el único mínimo (máximo) global de (I)

**d)** Si el conjunto factible es acotado y hay varios mínimos (máximos) locales de (I)

$$\Downarrow$$

Será mínimo (máximo) global de (I) aquel que determine el menor (mayor) valor posible de la función objetivo.