Autor: Francisco Martín Cabrera, Departamento Matemática Fundamental, Universidad de La Laguna, Islas Canarias, España

T E M A I

1. FORMAS BILINEALES

1.1. Formas bilineales. A lo largo de este tema supondremos que los cuerpos en que trabajamos tienen característica distinta de dos (más particularmente, se puede leer el texto pensando que el cuerpo involucrado es el de los números reales).

Definición 1.1. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Una aplicación $f : V \times V \longrightarrow K$ se dice que es una *forma bilineal*, si satisface las siguientes condiciones:
(i) $f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{x}', \vec{y}) = \lambda f(\vec{x}, \vec{y}) + \mu f(\vec{x}', \vec{y})$,
(ii) $f(\vec{x}, \lambda\vec{y} + \mu\vec{y}') = \lambda f(\vec{x}, \vec{y}) + \mu f(\vec{x}, \vec{y}')$,
para todo $\vec{x}, \vec{x}', \vec{y}, \vec{y}' \in V$ y todo $\lambda, \mu \in K$.

Esto es, las aplicaciones parciales

$$\begin{array}{rcll} f_{\vec{x}_0} : V & \longrightarrow & K, & \vec{x}_0 \text{ fijo;} \\ \vec{y} & \longrightarrow & f(\vec{x}_0, \vec{y}), & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} f_{\vec{y}_0} : V & \longrightarrow & K, & \vec{y}_0 \text{ fijo;} \\ \vec{x} & \longrightarrow & f(\vec{x}, \vec{y}_0), & \end{array}$$

son formas lineales.

El conjunto de las formas bilineales de V, denotado por $\mathcal{L}^2(V, K)$, tiene estructura de espacio vectorial sobre K con las operaciones:

$$\begin{array}{rcl} (f + g)(\vec{x}, \vec{y}) & = & f(\vec{x}, \vec{y}) + g(\vec{x}, \vec{y}), \\ (\lambda f)(\vec{x}, \vec{y}) & = & \lambda f(\vec{x}, \vec{y}). \end{array}$$

Es evidente que $f(\vec{x}, \vec{0}) = 0$ y que $f(\vec{0}, \vec{y}) = 0$.

Ejemplo 1.2.
- La aplicación $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_2$$

es una forma bilineal. En efecto, fácilmente se puede comprobar que las condiciones de bilinealidad se satisfacen.

- Si V es un espacio vectorial sobre K, y $\alpha : V \to K$, $\beta : V \to K$ son dos formas lineales, entonces la siguiente aplicación f dada por

$$\begin{array}{rcl} f : V \times V & \longrightarrow & K \\ (\vec{x}, \vec{y}) & \longrightarrow & f(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha(\vec{x})\beta(\vec{y}), \end{array}$$

es una forma bilineal sobre V.

- Una forma bilineal sobre V se dice que es *simétrica*, si $f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x})$, para todo $\vec{x}, \vec{y} \in V$. El conjunto de las formas bilineales simétricas S^2V^* es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}^2(V, K)$.
- Una forma bilineal sobre V se dice que es *antisimétrica*, si $f(\vec{x}, \vec{y}) = -f(\vec{y}, \vec{x})$, para todo $\vec{x}, \vec{y} \in V$. El conjunto de las formas bilineales antisimétricas Λ^2V^* es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}^2(V, K)$.

El espacio $\mathcal{L}^2(V, K)$ de la formas bilineales es suma directa del espacio S^2V^* de formas simétricas y del espacio Λ^2V^* de formas antisimétricas. Esto es,

$$\mathcal{L}^2(V, K) = \mathsf{S}^2V^* \oplus \Lambda^2V^*.$$

Para $f \in \mathcal{L}^2(V, K)$, se tiene que $f = f_{\mathbf{s}} + f_{\mathbf{a}}$, donde

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{s}}(\vec{x}, \vec{y}) &= \frac{1}{2}(f(\vec{x}, \vec{y}) + f(\vec{y}, \vec{x})), \\ f_{\mathbf{a}}(\vec{x}, \vec{y}) &= \frac{1}{2}(f(\vec{x}, \vec{y}) - f(\vec{y}, \vec{x})). \end{aligned}$$

Teniéndose que $f_{\mathbf{s}} \in \mathsf{S}^2V^*$ y $f_{\mathbf{a}} \in \Lambda^2V^*$.

Ejemplo 1.3. Para la forma lineal $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_2$ sobre $\mathbb{R}^2$, se tiene que

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{s}}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= \frac{1}{2}(3x_1y_2 + 3y_1x_2), \\ f_{\mathbf{a}}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= \frac{1}{2}(3x_1y_2 - 3y_1x_2). \end{aligned}$$

Matriz asociada a una forma bilineal

Supongamos que *dim* $V = n$, y sea $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ una base de V. Si f es una forma bilineal sobre V, entonces

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\textstyle\sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i, \sum_{j=1}^n y_j\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_iy_jf(\vec{e}_i, \vec{e}_j).$$

Si consideramos la matriz $A = (a_{ij})$, donde $a_{ij} = f(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, obtenemos, por un lado, que la expressión de la forma bilineal f está dada por

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_iy_j, \tag{1.1}$$

y, por otro, que matricialmente f se expresa

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^tAY.$$

Por tanto, tenemos definida una aplicación

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}^2(V,K) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n\times n}(K) \\ f & \longrightarrow & A=(a_{ij}), \qquad a_{ij}=f(\vec{e}_i,\vec{e}_j), \end{array}$$

que es un isomorfismo de espacios vectoriales.

- Una matriz A es *simétrica*, si para todo término a_{ij} de ella es tal que $a_{ij}=a_{ji}$. Se tiene que una matriz A es simétrica si y sólo si $A^{\mathrm{t}}=A$, donde A^{t} denota la traspuesta de A. También se tiene que una forma bilineal sobre V es simétrica si y sólo si está asociada a una matriz simétrica.
- Una matriz A es *antisimétrica*, si para todo término a_{ij} de ella es tal que $a_{ij}=-a_{ji}$. Se tiene que una matriz A es simétrica si y sólo si $A^{\mathrm{t}}=-A$. También se tiene que una forma bilineal sobre V es antisimétrica siy sólo si está asociada a una matriz antisimétrica.

Observación 1.4. Si V^* es el espacio vectorial de V. Se puede demostrar que el producto tensorial $V^*\otimes V^*$ es isomorfo a $\mathcal{L}^2(V,K)$. Por eso, es frecuente ver el conjunto de las formas bilineales denotado por $\otimes^2V^*=V^*\otimes V^*$. Así, la forma bilineal dada por la expresión (1.1), se puede poner

$$f=\textstyle\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\vec{e}_i^{\,*}\otimes\vec{e}_j^{\,*},$$

donde $\{\vec{e}_1^{\,*},\dots,\vec{e}_n^{\,*}\}$ es la base dual de $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$.

Recordamos la siguiente definición.

Definición 1.5. Dados dos espacios vectoriales V y W sobre el cuerpo K, se llama *producto tensorial* de V y W al par $(V\otimes W,\otimes)$ formado por un espacio vectorial $V\otimes W$ y una aplicación bilineal $\otimes: V\times W\to V\otimes W$ que satisface:

(i) $\otimes(V\times W)$ genera $V\otimes W$.
(ii) (*Propiedad de factorización universal*) Para todo espacio vectorial L y toda aplicación bilineal $f: V\times W\to L$, existe una única aplicación lineal $\hat{f}: V\otimes W\to L$ tal que $f=\hat{f}\circ\otimes$.

Se puede demostrar la existencia y unicidad, salvo isomorfismo, de $V\otimes W$ y, en general, se denota $\otimes(\vec{v},\vec{w})=\vec{v}\otimes\vec{w}$. En particular, $V^*\otimes V^*=\mathcal{L}^2(V,K)$, donde $\otimes(\alpha,\beta): V\times V\to K$ se define por $\otimes(\alpha,\beta)(\vec{x},\vec{y})=\alpha\otimes\beta(\vec{x},\vec{y})=\alpha(\vec{x})\beta(\vec{y})$. Asimismo, por el isomorfismo visto anteriormente, se puede decir que $\mathcal{M}_{n\times n}(K)=\mathcal{L}^2(V,K)=V^*\otimes V^*$.

Las formas bilineales simétricas S^2V^* es el subespacio vectorial de $\otimes^2V^*$ engendrado por los elementos $\alpha\otimes\beta+\beta\otimes\alpha$, donde $\alpha,\beta\in V^*$. Asimismo, las formas bilineales antisimétricas Λ^2V^* es el subespacio vectorial de $\otimes^2V^*$ engendrado por los elementos $\alpha\otimes\beta-\beta\otimes\alpha$, donde $\alpha,\beta\in V^*$.

Finalmente, dados dos espacios vectoriales V y W, el espacio $\mathcal{L}(V,W)$ de las aplicaciones lineales desde V en W se puede identificar con el producto tensorial $V^*\otimes W$. En efecto, si $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$ y $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_m\}$ son bases de V y W, respectivamente, y nos dan una aplicación lineal $f: V\to W$, entonces dicha aplicación está determinada por las imágenes

$$f(\vec{e}_j)=a_{1j}\vec{u}_1+\cdots+a_{mj}\vec{u}_m,$$

para $j=1,\dots,n$. Para un vector $\vec{x}=\sum_{j=1}^n x_j\vec{e}_j$ su imagen $f(\vec{x})$ viene dada por

$$f(\vec{x})=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^m x_ja_{ij}\vec{u}_i=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^m a_{ij}\vec{e}_j^{\,*}(\vec{x})\vec{u}_i=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^m a_{ij}(\vec{e}_j^{\,*}\otimes\vec{u}_i)(\vec{x}).$$

Así, f se expresa

$$f = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{e}_j^{\,*} \otimes \vec{u}_i.$$

Cambios de base

Sean $f : V \times V \longrightarrow K$ una forma bilineal y $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ bases de V. Supongamos A y B son las matrices asociadas a la forma bilineal con respecto de las bases dadas. Es decir, $A = (a_{ij}) = (f(\vec{e}_i, \vec{e}_j))$ y $B = (b_{ij}) = (f(\vec{u}_i, \vec{u}_j))$. Veamos como están relacionadas las matrices A y B.

Para ello, supongamos que la segunda base viene dada en función de la primera, esto es, para $j = 1, \ldots, n$ se tiene

$$\vec{u}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \vec{e}_i.$$

Denotemos por $P = (p_{ij})$ la matriz cuya columna j está formada por las componentes del vector $\vec{u}_j$ respecto de la primera base. Entonces sabemos que el cambio de componentes viene dado por

$$X = PX'.$$

Así, tenemos que

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = X^t AY = (PX')^t A(PY') = X'^t P^t APY' = X'^t BY'.$$

Como la igualdad $X'^t P^t APY' = X'^t BY'$ se satisface para todo X', Y', se tiene que

$$B = P^t AP.$$

Definición 1.6. Se dice que dos matrices cuadradas A y B de orden n son *congruentes*, si existe una matriz cuadrada regular P de orden n tal que $B = P^t AP$.

Proposición 1.7. *Dos matrices están asociadas a una misma forma bilineal si y sólo si son congruentes.*

1.2. Formas cuadráticas.

Definición 1.8. Dada $f : V \times V \longrightarrow K$ una forma bilineal simétrica. Se llama *forma cuadrática* asociada a la forma bilineal f, a la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \omega : V & \longrightarrow & K \\ \vec{x} & \longrightarrow & \omega(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x}). \end{array}$$

En este caso, la forma bilineal simétrica f se denomina *forma polar* de ω.

Como consecuencia de la definición de forma cuadrática tenemos las siguientes propiedades.

Proposición 1.9. *Si ω es una forma cuadrática de V con forma polar f, entonces para todo $\vec{x}, \vec{y} \in V$ y todo $\lambda \in K$ se satisfacen:*

(i) $\omega(\lambda \vec{x}) = \lambda^2 \omega(\vec{x})$,
(ii) $\omega(\vec{0}) = 0$,
(iii) $\omega(\vec{x} + \vec{y}) = \omega(\vec{x}) + \omega(\vec{y}) + 2f(\vec{x}, \vec{y})$.

Demostración. Se siguen fácilmente a partir de las condiciones dadas en las definiciones de forma cuadrática y de forma bilineal simétrica. □

De la propiedad (iii) de la proposición anterior se deduce la siguiente fórmula que permite calcular la forma polar a partir de la expresión de la forma cuadrática,

$$f(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}\left(\omega(\vec{x}+\vec{y}) - \omega(\vec{x}) - \omega(\vec{y})\right). \tag{1.2}$$

Por consiguiente, si dos formas bilineales simétricas definen la misma forma cuadrática, entonces son iguales. Por tanto, podemos afirmar que existe una correspondencia biyectiva entre formas cuadráticas y formas bilineales simétricas de modo que a cada forma cuadrática ω se le hace corresponder su forma polar.

Ejemplo 1.10. Dada una aplicación $\omega : V \to K$, para verificar que ω es forma cuadrática, se determina la correspondiente polar f de ω utilizando la ecuación (1.2). Si f resultáse bilineal y $f(\vec{x},\vec{x}) = \omega(\vec{x})$, para todo $\vec{x}$, entonces se podría afirmar que ω es forma cuadrática. En caso contrario, ω no sería forma cuadrática.

Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x,y) = x^2 + y$, la correspondiente forma polar sería:

$$f((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = x_1x_2.$$

La aplicación f es bilineal. Sin embargo, como $f((x,y),(x,y)) = x^2 \neq \varphi(x,y)$, φ no es forma cuadrática.

En cambio, si tomamos $\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\omega(x,y) = x^2$, la correspondiente forma polar es bilineal y dada por $((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = x_1x_2$. Como $f((x,y),(x,y)) = x^2 = \omega(x,y)$, ω es forma cuadrática.

A veces la correspondiente f ni siquiera resulta bilineal. En tal caso, ya se podría afirmar que la aplicación ω no es forma cuadrática. Por ejemplo, si $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está dada por $\psi(x,y) = x^2+3$

Se comprueba sin dificultad que el conjunto $\mathcal{Q}(V,K)$ de las formas cuadráticas sobre un espacio vectorial V tiene estructura de espacio vectorial sobre K con las operaciones

$$\begin{aligned}(\omega+\omega')(\vec{x}) &= \omega(\vec{x}) + \omega'(\vec{x}),\\ (\lambda\omega)(\vec{x}) &= \lambda\omega(\vec{x}).\end{aligned}$$

Definición 1.11. Sea $\omega : V \longrightarrow K$ una forma cuadrática y $f : V \times V \longrightarrow K$ su forma polar. Se denomina *aplicación lineal de polaridad* de ω, a la aplicación definida en el modo siguiente:

$$\begin{aligned}\hat{f} : V &\longrightarrow V^*\\ \vec{v} &\longrightarrow \hat{f}(\vec{v}),\end{aligned}$$

donde $\hat{f}(\vec{v})$ es la forma lineal dada por:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\vec{v}) : V &\longrightarrow K\\ \vec{x} &\longrightarrow \hat{f}(\vec{v})(\vec{x}) = f_{\vec{x}}(\vec{v}) = f(\vec{x},\vec{v}).\end{aligned}$$

Se demuestra sin dificultad que la aplicación $\hat{f} : V \longrightarrow V^*$ es una aplicación lineal.

Si $dim\ V = n$, sea $\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$ una base de V y $\{\vec{e}_1^{\,*},\ldots,\vec{e}_n^{\,*}\}$ su base dual. Denotemos por $A = (a_{ij})$ la matriz asociada a la aplicación lineal $\hat{f}$ con respecto a dichas bases. Es decir, la matriz tal que

$$\hat{f}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \vec{e}_i^{\,*}.$$

Entonces se tiene que

$$a_{ij} = \hat{f}(\vec{e}_j)(\vec{e}_i) = f(\vec{e}_i, \vec{e}_j),$$

por lo que la matrices de la forma polar y de la aplicación de polaridad coinciden.

Observación 1.12. Si $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ es una base de V y la forma polar f viene dada por $f = \sum_{i=1,j=1}^{n} a_{ij} \vec{e}_i^{\,*} \otimes \vec{e}_j^{\,*}$, entonces la aplicación de polaridad $g : V \to V^*$ está dada por

$$\hat{f} = \sum_{j=1,i=1}^{n} a_{ij} \vec{e}_j^{\,*} \otimes \vec{e}_i^{\,*},$$

donde $\{\vec{e}_j\}_{j=1}^{n}$ y $\{\vec{e}_i^{\,*}\}_{i=1}^{n}$ son las bases fijadas en V y V^*, respectivamente.

Definición 1.13. Se llama *rango de una forma cuadrática*, al rango de su aplicación de polaridad, o lo que es lo mismo, al rango de una matriz asociada a la forma polar.

Una forma cuadrática se dice que es *ordinaria*, si su rango es igual a la dimensión del espacio vectorial sobre el que está definida. Esto es, si su matriz asociada respecto de una base es regular.

Una forma cuadrática se dice que es *degenerada*, si su rango es menor que la dimensión del espacio vectorial sobre el que está definida. Esto es, si su matriz asociada respecto de una base es singular.

Sea $\omega : V \longrightarrow K$ una forma cuadrática sobre un espacio vectorial V, $\mathit{dim}\ V = n$, y sea $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ una base de V. Para todo $\vec{x} \in V$, se tiene

$$\omega(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j f(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = X^t A X = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Por tanto, una forma cuadrática puede ser expresada por la ecuación homogénea de segundo grado

$$\omega(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

o bien, en forma matricial

$$\omega(\vec{x}) = X^t A X.$$

1.3. Diagonalización de formas cuadráticas.

En esta sección veremos que para toda forma cuadrática se puede busca una base de modo que, respecto de la cual, la forma cuadrática se expresa como suma de únicamente términos cuadráticos. Un resultado básico para ello es el siguiente.

Proposición 1.14. *Sea $\omega : V \longrightarrow K$ una forma cuadrática con forma polar f y sea $\vec{x} \in V$ tal que $\omega(\vec{x}) \neq 0$, entonces el conjunto $\{\vec{x}\}^f = \{\vec{y} \in V \mid f(\vec{x}, \vec{y}) = 0\}$ es un subespacio vectorial de V tal que*

$$V = \langle \vec{x} \rangle \oplus \{\vec{x}\}^f.$$

Demostración. En efecto, se sigue fácilmente que $\{\vec{x}\}^f$ es un subespacio vectorial. En efecto, si f es la forma polar de ω y g la aplicación de polaridad, entonces $g(\vec{x}) = f_{\vec{x}} \neq 0$ y $\{\vec{x}\}^f = \ker f_{\vec{x}}$.

Además, para todo $\vec{v} \in V$ se tiene

$$\vec{v} = \left(\vec{v} - \frac{f(\vec{x},\vec{v})}{\omega(\vec{x})}\vec{x}\right) + \frac{f(\vec{x},\vec{v})}{\omega(\vec{x})}\vec{x},$$

teniéndose que

$$f\left(\vec{x}, \left(\vec{v} - \frac{f(\vec{x},\vec{v})}{\omega(\vec{x})}\vec{x}\right)\right) = f(\vec{x},\vec{v}) - f(\vec{x},\vec{v}) = 0.$$

Por consiguiente, $V = \langle\vec{x}\rangle + \{\vec{x}\}^f$.

Veamos ahora que esta suma es directa. Sea $\vec{v} \in \langle\vec{x}\rangle \cap \{\vec{x}\}^f$, entonces $\vec{v} = \lambda\vec{x}$ y

$$0 = f(\vec{x},\vec{v}) = \lambda f(\vec{x},\vec{x}).$$

Lo que implica que $\lambda = 0$, ya que $\omega(\vec{x}) \neq 0$. Esto es, $\vec{v} = \vec{0}$. □

Lo que afirma la proposición anterior será esencial para demostrar que para toda forma cuadrática existe una base de modo que la matriz asociada con respecto a tal base es diagonal.

Proposición 1.15. *Dada una forma cuadrática $\omega : V \longrightarrow K$, $\dim V = n$, siempre existe una base de V respecto de la cual la matriz asociada es diagonal.*

Demostración. Supongamos que para todo $\vec{x} \in V$ es $\omega(\vec{x}) = 0$. Entonces, fijando una base cualquiera, la matriz asociada A es la matriz nula. En este caso, ya habríamos terminado la demostración puesto que la matriz nula es evidentemente diagonal.

Supongamos entonces que existe $\vec{x}_1 \in V$ tal que $\omega(\vec{x}_1) \neq 0$.

Según vimos en la proposición anterior podremos descomponer el espacio vectorial V de la siguiente manera:

$$V = \langle\vec{x}_1\rangle \oplus \{\vec{x}_1\}^f.$$

Sea $\{\vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ una base de $\{\vec{x}_1\}^f$. Entonces $f(\vec{x}_1,\vec{x}_i) = 0$, para $i = 2,\ldots,n$, y la matriz asociada respecto de dicha base quedará de la forma

$$\begin{pmatrix} \omega(\vec{x}_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\vec{x}_2,\vec{x}_2) & \cdots & f(\vec{x}_2,\vec{x}_n) \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & f(\vec{x}_n,\vec{x}_2) & \cdots & f(\vec{x}_n,\vec{x}_n) \end{pmatrix}.$$

LLamemos A_1 a la matriz $A_1 = (f(\vec{x}_i,\vec{x}_j))$, para $i,j = 2,\ldots n$.

Si $A_1 = (0)$, ya habríamos terminado , puesto que ya habríamos obtenido una base respecto de la cual la matriz asociada es diagonal.

Si $A_1 \neq (0)$, consideramos la restricción de la forma cuadrática ω al subespacio vectorial $\{\vec{x}_1\}^f$. Es decir, consideramos la forma cuadrática

$$\omega_1 : \{\vec{x}_1\}^f \longrightarrow K$$

Evidentemente la matriz asociada a ω_1 es la matriz A_1. Como $A_1 \neq (0)$, existirá un vector $\vec{y}_2 \in \{\vec{x}_1\}^f$ tal que $\omega_1(\vec{y}_2) \neq 0$. Entonces podemos descomponer $\{\vec{x}_1\}^f$ de la siguiente manera:

$$\{\vec{x}_1\}^f = \langle\vec{y}_2\rangle \oplus \{\vec{y}_2\}^f.$$

Tomamos ahora la base $\{\vec{y}_3, \ldots, \vec{y}_n\}$ de $\{\vec{y}_2\}^f$. De esta forma tenemos la base de V

$$\{\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \ldots, \vec{y}_n\}$$

respecto de la cual, la matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} \omega(\vec{x}_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega(\vec{y}_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & f(\vec{y}_3, \vec{y}_3) & \cdots & f(\vec{y}_3, \vec{y}_n) \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & f(\vec{y}_n, \vec{y}_3) & \cdots & f(\vec{y}_n, \vec{y}_n) \end{pmatrix}.$$

Realizando este procedimiento un número finito de veces llegaremos a obtener una matriz diagonal. □

El resultado anterior es equivalente a la siguiente proposición relativa a matrices.

Proposición 1.16. *Dada una matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$, existe alguna matriz regular $P \in GL(n; K)$ tal que $P^T AP$ es diagonal. Es decir, para toda matriz simétrica se puede encontrar una matriz diagonal congruente con ella.*

Método de Gauss de descomposición en cuadrados

Consideremos la forma cuadrática $\omega : V \longrightarrow K$ y $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ una base de V tal que la expresión de la forma cuadrática respecto de esa base sea

$$\omega(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

En primer lugar supongamos que $a_{11} \neq 0$. Si no fuera así, pero existiera algún $a_{ii} \neq 0$, entonces consideraríamos como nueva base $\{\vec{e}_i, \ldots, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, esto es, haríamos el cambio de coordenadas siguiente:

$$\begin{aligned} x'_i &= x_1, \\ x'_1 &= x_i, \\ x'_j &= x_j \ , \ j \neq 1 \ j \neq i. \end{aligned}$$

En el nuevo sistema de coordenadas será $a_{11} \neq 0$.

Si ocurriera el caso de que todos los a_{ii} fueran iguales a cero, pero existiera un $a_{ij} \neq 0$, haríamos el siguiente cambio:

$$\begin{aligned} x_j &= x'_i + x'_j, \\ x_k &= x'_k \ , \ k \neq j. \end{aligned}$$

Esto es, consideraríamos la base $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_i + \vec{e}_j, \ldots, \vec{e}_j, \ldots, \vec{e}_n\}$.

De esta forma el término $2a_{ij}x_ix_j$ quedaría,

$$2a_{ij}x'_i(x'_i + x'_j) = 2a_{ij}(x'_i)^2 + 2a_{ij}x'_ix'_j,$$

con lo cual ya habríamos conseguido un término en $(x'_i)^2$ con coeficiente no nulo. Es decir, con $a'_{ii} \neq 0$, y haríamos el cambio que indicamos al principio.

Por lo tanto, podemos suponer que $a_{11} \neq 0$. En este caso pondremos:

$$\begin{aligned}
\omega(\vec{x}) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + \alpha(x_2, \ldots, x_n) \\
&= a_{11}\left[x_1^2 + \frac{2a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + \cdots + \frac{2a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n\right] + \alpha(x_2, \ldots, x_n) \\
&= a_{11}\left[x_1^2 + 2x_1\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right) + \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2\right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2\right] + \alpha(x_2, \ldots, x_n) \\
&= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 - a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + \alpha(x_2, \ldots, x_n) \\
&= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + \beta(x_2, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n, \\
x_2' &= x_2, \\
&\cdots \\
x_n' &= x_n,
\end{aligned}$$

se obtiene la ecuación siguiente con respecto al nuevo sistema de coordenadas

$$\omega(\vec{x}) = a_{11}(x_1')^2 + \beta(x_2', \ldots, x_n').$$

Realizando este proceso con $\beta(x_2', \ldots, x_n')$, llegaríamos a

$$\omega(\vec{x}) = a_{11}(x_1'')^2 + b_{22}(x_2'')^2 + \gamma(x_3'', \ldots, x_n'').$$

Es evidente que después de un número finito de pasos llegaríamos a la expresión de $\omega(\vec{x})$ como suma de cuadrados.

Si deseamos obtener la base respecto de la cual ω tiene esta expresión, si C es la matriz tal que

$$X' = CX,$$

despejando de esta expresión obtenemos, $X = C^{-1}X'$, es decir, la matriz de cambio de coordenadas $P = (p_{ij})$, tal que $X = PX'$ es la matriz C^{-1}. Por tanto la nueva base vendrá relacionada con la primera de la forma,

$$\vec{u}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\vec{e}_i.$$

Es decir, el vector $\vec{u}_j$ de la nueva base es aquel cuyas coordenadas vienen dadas por la columna "j" de la matriz C^{-1}.

Ejercicios:

Diagonalizar las siguientes formas cuadráticas:

1. $\omega_1(\vec{x}) = x_0^2 + 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_0x_1 - 6x_1x_2 - 2x_0x_2$.

2. $\omega_2(\vec{x}) = x_0^2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_0x_1 + 4x_1x_2 - 2x_0x_2$.
3. $\omega_3(\vec{x}) = x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2$.

Diagonalización mediante operaciones elementales

Definición 1.17. Una *operación elemental* en una matriz consiste en lo siguiente:

(i) Permutar dos filas o columnas entre si.
(ii) A una fila o columna sumarle una combinación lineal de las demás.
(iii) Multiplicar una fila o columna por un escalar no nulo.

Dada la matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, llamaremos,
$E_f(A) =$ matriz que resulta de hacer la operación elemental E a las filas de la matriz A.
$E_c(A) =$ matriz que resulta de hacer la operación elemental E a las columnas de la matriz A.

Si I denota la matriz identidad, se tiene que:

$$E_f(A) = E_f(I)A, \quad E_c(A) = AE_c(I).$$

Por ejemplo. Si intercambiamos las filas i y j en las matriz A, resulta una matriz que es igual al producto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \dots & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0^{(ii)} & \dots & 1^{(ij)} & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \dots & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1^{(ji)} & \dots & 0^{(jj)} & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \dots & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ & & \dots & & \\ & & \dots & & \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

donde el superíndice entre paréntesis indica la posición del término en la matriz (para los demás casos, comprobarlo como ejercicio).

Denotaremos por $E(A)$ la matriz que resulta de hacer la operación elemental E, primero a las filas y después a las columnas de la matriz A. Entonces se verifica,

$$E(A) = E_c(E_f(A)) = E_c(E_f(I)A) = E_f(I)AE_c(I).$$

Además, se comprueba sin dificultad que $E_c(I) = (E_f(I))^T$.

Por tanto, la matriz $E(A)$ es congruente con la matriz A, es decir son matrices asociadas a una misma forma cuadrática respecto de distintas bases.

En conclusión, si mediante operaciones elementales efectuadas en las filas y luego en las columnas de una matriz A, llegamos a una matriz diagonal, esa matriz lo será respecto de la misma forma cuadrática, respecto de otra base.

Si queremos encontrar la base, respecto de la cual, la matriz asociada es $E(A)$, como $E(A) = E_f(I)AE_c(I) = P^TAP$, la matriz del cambio de base será $P = (p_{ij}) = E_c(I)$, es decir la nueva base tendrá como vector $\vec{u}_j$ aquel cuyas coordenadas correspondan con la columna "j" de la matriz $E_c(I)$, es decir

$$\vec{u}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\vec{e}_i.$$

Ejercicio:

Dada la forma cuadrática,

$$\begin{array}{rcl} \omega : \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z,t) & \longrightarrow & \omega(x,y,z,t) = 2x^2+8y^2+2z^2+t^2+8xy+6xz+4xt+8yz-2yt+6zt, \end{array}$$

diagonalizarla mediante operaciones elementales y dar una base respecto de la cual ω admita una expresión diagonal.

1.4. Formas cuadráticas reales. Teorema de Sylvester. Una forma cuadrática $\omega : V \longrightarrow K$, se dice que es *real*, si el cuerpo K es el de los números reales, esto es, $K = \mathbb{R}$.

Sea $\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\dim V = n$. Como ya sabemos, el rango de ω es el rango de su aplicación de polaridad y coincide con el rango de la matriz asociada a ω respecto de cualquier base.

Si $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ es una base tal que la matriz asociada es diagonal,

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_r & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

entonces $r = rango(\omega)$, podemos ordenar los d_i de tal manera que primero están los positivos y luego los negativos.

Definición 1.18. Se llama *signatura* de ω, al par (p,q), donde p es el número de elementos positivos que hay en la diagonal principal de una cualquiera de las matrices diagonales asociadas a la forma cuadrática y q el el número de elementos negativos.

Para que esta definición tenga sentido, tendremos que probar la siguiente proposición:

Teorema 1.19 (de Sylvester o Ley de inercia)**.** *El número de elementos positivos que hay en la diagonal principal de una cualquiera de las matrices diagonales asociadas a una forma cuadrática real, es el mismo; tal número no depende, pues, de la diagonalización que se considere de ω, sino que es un número intrínsecamente ligado a la forma cuadrática.*

Observación 1.20. Obsérvese que como consecuencia, también el número de elementos negativos ha de coincidir, puesto que $p+q = r = rango(\omega)$.

Demostración. Supongamos que existen dos bases $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, tales que

i) Respecto de la primera base es:

$$\omega(\vec{x}) = a_1^2 x_1^2 + \cdots + a_p^2 x_p^2 - a_{p+1}^2 x_{p+1}^2 - \cdots - a_r^2 x_r^2.$$

ii) Respecto de la segunda base es:

$$\omega(\vec{x}) = b_1^2 y_1^2 + \cdots + b_{p'}^2 y_{p'}^2 - b_{p'+1}^2 y_{p'+1}^2 - \cdots - b_r^2 y_r^2.$$

Supongamos que es $p > p'$. Consideremos los siguientes subespacios vectoriales de V,

$$\begin{aligned} U_1 &= \langle \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p \rangle, \\ U_2 &= \langle \vec{v}_{p'+1}, \ldots, \vec{v}_p, \vec{v}_{p+1}, \ldots, \vec{v}_r, , \vec{v}_{r+1}, \ldots, \vec{v}_n \rangle. \end{aligned}$$

Sabemos que, $dim(U_1 \cap U_2) = dim\, U_1 + dim\, U_2 - dim(U_1 + U_2)$, y puesto que $dim\ U_1 = p$ y $dim\ U_2 = n - p'$, se obtiene,

$$dim(U_1 \cap U_2) = p + n - p' - dim(U_1 + U_2) = (p - p') + (n - dim(U_1 + U_2) \geq p - p' > 0.$$

Por tanto existe un vector $\vec{x} \neq \vec{0}$ tal que $\vec{x} \in U_1 \cap U_2$. Ahora bién,

$$\vec{x} \in U_1 \Rightarrow \vec{x} = x_1 \vec{u}_1 + \cdots + x_p \vec{u}_p,$$

por tanto,

$$\omega(\vec{x}) = a_1^2 x_1^2 + \cdots + a_p^2 x_p^2 > 0.$$

Nótese que algún sumando tiene que ser no nulo. Pero por otra parte,

$$\vec{x} \in U_2 \Rightarrow \vec{x} = y_{p'+1} \vec{v}_{p'+1} + \cdots + y_p \vec{v}_p + y_{p+1} \vec{v}_{p+1} + \cdots + y_r \vec{v}_r + y_{r+1} \vec{v}_{r+1} + \cdots + y_n \vec{v}_n,$$

y por tanto,

$$\omega(\vec{x}) = -b_{p'+1}^2 y_{p'+1}^2 - \cdots - b_r^2 y_r^2 \leq 0.$$

Por tanto, hemos llegado a la cotradicción: $\omega(\vec{x}) > 0$ y $\omega(\vec{x}) \leq 0$. $\square$

Observación 1.21. Nótese que $\omega(\vec{x})$ es mayor estrictamente que cero (en la primera expresión) puesto que si fuera cero se deduciría que todas las coordenadas de $\vec{x}$ respecto de la base $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ serían cero, con lo cual llegaríamos a que $\vec{x} = \vec{0}$. Sin embargo, $\omega(\vec{x})$ puede ser cero (en la segunda expresión), sin necesidad de que el vector sea nulo, puesto que las componentes que aparecen en la expresión de ω no son todas las coordenadas del vector, pudiendo ser esas coordenadas nulas.

Expresión canónica de una forma cuadrática

Sea $\omega : V \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática sobre el espacio vectorial real V con dim $V = n$; sean rango$(\omega) = r$ y sig$(\omega) = (p, q)$. Por tanto existe una base de V, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, con respecto a la cual la matriz asociada a ω es diagonal,

$$\begin{pmatrix} a_1^2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_p^2 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{p+1}^2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_r^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

Si tomamos la base,

$$\vec{e}_1' = \frac{\vec{e}_1}{a_1}, \dots, \vec{e}_r' = \frac{\vec{e}_r}{a_r}, \vec{e}_{r+1}' = \vec{e}_{r+1}, \dots, \vec{e}_n' = \vec{e}_n,$$

entonces

$$\omega(\vec{e}_i) = \frac{\omega(\vec{e}_i)}{a_i^2} = \pm\frac{a_i^2}{a_i^2} = \pm 1.$$

Por tanto, respecto de esta nueva base, la expresión de ω quedará,

$$\omega(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2,$$

para $i = 1, \dots, r$, y esta expresión recibe el nombre de *expresión canónica* de ω.

Definición 1.22. Una forma cuadrática real ω se dice que es *definida*, si $\omega(\vec{x}) = 0$ implica que $\vec{x} = \vec{0}$.

Proposición 1.23. *Si $\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma cuadrática real definida, entonces $\omega(\vec{x})$ tiene signo constante para todo $\vec{x} \in V - \{\vec{0}\}$.*

Demostración. Supongamos que la proposición fuese falsa, que existiesen dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de V, no nulos, tales que $\omega(\vec{x}) > 0$ y $\omega(\vec{y}) < 0$. En esta hipótesis, se pretende probar que ω se anularía en un vector no nulo; a este fin, considérese el vector $\lambda\vec{x} + \vec{y}$, donde λ es un número real cualquiera. Se tiene que $\omega(\lambda\vec{x} + \vec{y}) = \lambda^2\omega(\vec{x}) + 2\lambda f(\vec{x}, \vec{y}) + \omega(\vec{y})$, donde f es la forma polar de ω. Para que $\omega(\lambda\vec{x} + \vec{y})$ fuese cero es necesario y suficiente que λ sea una raíz de la ecuación

$$\lambda^2\omega(\vec{x}) + 2\lambda f(\vec{x}, \vec{y}) + \omega(\vec{y}) = 0,$$

cuyo discriminante, $4f(\vec{x}, \vec{y})^2 - 4\omega(\vec{x})\omega(\vec{y})$ es positivo, ya que $\omega(\vec{x}).\omega(\vec{y}) < 0$. Por tanto, existen dos raices distintas λ_1 y λ_2 tales que $\omega(\lambda_1\vec{x} + \vec{y}) = 0$ y $\omega(\lambda_2\vec{x} + \vec{y}) = 0$. Como ω es definida, se sigue que $\lambda_1\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$ y $\lambda_2\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$. Por tanto, $(\lambda_1 - \lambda_2)\vec{x} = \vec{0}$. De ahí que $\vec{x} = \vec{0}$, contradicción. Pues, $\omega(\vec{x}) > 0$ implica $\vec{x} \neq \vec{0}$. □

Definición 1.24. Dada una forma cuadrática $\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$, se tienen las siguientes definiciones:

(i) Se dice que ω es una forma cuadrática *definida positiva*, si $\omega(\vec{x}) > 0$, para todo $\vec{x} \in V - \{\vec{0}\}$.
(ii) Se dice que ω es una forma cuadrática *definida negativa*, si $\omega(\vec{x}) < 0$, para todo $\vec{x} \in V - \{\vec{0}\}$.
(iii) Se dice que ω es una forma cuadrática *semidefinida positiva*, si $\omega(\vec{x}) \geq 0$, para todo $\vec{x} \in V$ y no es definida.
(iv) Se dice que ω es una forma cuadrática *semidefinida negativa*, si $\omega(\vec{x}) \leq 0$, para todo $\vec{x} \in V$ y no es definida.
(vi) Se dice que ω es una forma cuadrática *positiva*, si $\omega(\vec{x}) \geq 0$, para todo $\vec{x} \in V$.
(vii) Se dice que ω es una forma cuadrática *negativa*, si $\omega(\vec{x}) \leq 0$, para todo $\vec{x} \in V$.

Proposición 1.25. *Sea $\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$, con* $\dim V = n$.

(i) *ω es definida positiva si y sólo si* $\operatorname{sig}(\omega) = (n, 0)$.
(ii) *ω es definida negativa si y sólo si* $\operatorname{sig}(\omega) = (0, n)$.
(iii) *ω es semidefinida positiva si y sólo si* $\operatorname{sig}(\omega) = (r, 0)$, *con $r < n$.*
(iv) *ω es semidefinida negativa si y sólo si* $\operatorname{sig}(\omega) = (0, r)$, *con $r < n$.*
(v) *ω es positiva si y sólo si* $\operatorname{sig}(\omega) = (r, 0)$, *con $r \leq n$.*
(vi) *ω es negativa si y sólo si* $\operatorname{sig}(\omega) = (0, r)$, *con $r \leq n$.*

Demostración.

i) " $\Rightarrow$ ". Supongamos que $\text{sig}(\omega) = (p, q)$, con $q \neq 0$, entonces sería $\omega(\vec{e}_{p+q}) = -1$. Contradicción, puesto que es definida positiva. Por tanto debe de ser $\text{sig}(\omega) = (p, 0)$. Si $p < n$, entonces sería $\omega(\vec{e}_n) = 0$, lo cual es también absurdo por ser definida. Así, tendrá que ser $\text{sig}(\omega) = (n, 0)$.

" $\Leftarrow$ ". $\text{sig}(\omega) = (n, 0)$ implica que $\omega(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 > 0$, para todo vector $\vec{x}$ no nulo. Por tanto, la forma cuadrática es definida positiva.

ii) Se demuestra de modo análogo al anterior.

iii) " $\Rightarrow$ ". Supongamos que $\text{sig}(\omega) = (p, q)$, con $q \neq 0$, entonces sería $\omega(\vec{e}_{p+q}) = -1$. Contradicción, puesto que es semidefinida positiva. Por tanto debe de ser $\text{sig}(\omega) = (p, 0)$. Si $p = n$, entonces sería definida positiva. Luego para que ω sea semidefinida positiva necesariamente $p < n$.

" $\Leftarrow$ ". $\text{sig}(\omega) = (p, 0)$, $p < n$ implica que $\omega(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 \geq 0$. Además, $\omega(\vec{e}_n) = 0$. Por tanto, la forma cuadrática es semidefinida positiva.

iv) Se demuestra de forma análoga al anterior.

v) Es consecuencia de los anteriores.

vi) Es consecuencia de los anteriores.

$\square$

Formas cuadráticas sobre espacios vectoriales euclídeos. Diagonalización ortogonal de una forma cuadrática

Sea $\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática y V un espacio vectorial euclídeo. Es decir, hay un producto escalar definido sobre V.

Sean $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ y $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ dos bases ortonormales. Entonces sabemos que la matriz de cambio de base es una matriz ortogonal. Esto es, una matriz P tal que $P^{-1} = P^T$.

Luego, si es

$$\omega(\vec{x}) = X^T A X = X'^T A' X' \quad \Rightarrow \quad A' = P^T A P = P^{-1} A P,$$

y entonces las matrices A y A', además de ser congruentes, son semejantes.

Recordemos que:

Toda matriz real y simétrica es ortogonalmente diagonalizable. Esto es, existe una matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal y, además, los elementos de la diagonal principal son los autovalores de A, contados tantas veces como indique su multiplicidad.

Ejercicios:

1. Sea ω una forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^3$ equipado con el producto escalar usual y, respecto de la base ortonormal, $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, ω está dada por
$$\omega(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\sqrt{3}x_2x_3.$$
Diagonalizar ortogonalmente ω.
2. Dado V un espacio vectorial euclídeo de dimensión 3 y, para $\alpha \in \mathbb{R}$, considérese la familias de formas cuadráticas sobre $\mathbb{R}^3$ dadas por
$$\omega_\alpha(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + (1 - \alpha)x_2^2 + (1 + \alpha)x_3^2 + 2\alpha x_1x_2 - 2\alpha x_1x_3,$$
respecto de la base ortonormal $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$. Consideremos $\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$, la forma cuadrática que respecto de la base canónica tiene asociada la matriz A.

(a) Diagonalícese ortogonalmente la forma cuadrática ω_α.
(b) Obténgase los valores de α para los que ω_α es definida y semidefinida.