Autor: Francisco Martín Cabrera, Departamento Matemática Fundamental, Universidad de La Laguna, Islas Canarias, España

1.5. Ejercicios.

1. Determinar cuales de las siguientes aplicaciones son formas lineales sobre $\mathbb{R}^3$. Escribimos $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. En caso afirmativo, hallar el núcleo y conjunto imagen correpondiente.
   (i) $f(\vec{u}) = 2x_1 - 3x_2$; (ii) $f(\vec{u}) = x_1 + x_2 + x_3$; (iii) $f(\vec{u}) = 3x_1 + x_2 + x_3^2$;
   (iv) $f(\vec{u}) = -x_1 + x_2 + 2x_3 + 1$; (v) $f(\vec{u}) = 5$; (vi) $f(\vec{u}) = 0$.
2. Para las formas lineales obtenidas en el ejercicio anterior, determinar sus componentes respecto de la base dual de $\{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$.
3. Para las formas lineales consideradas en los dos ejercicios anteriores, determinar sus componentes respecto de la base dual de $\{\vec{u}_1 = (1,0,0), \vec{u}_2 = (1,1,0), \vec{u}_3 = (1,1,1)\}$.
4. Determinar cuales de las siguientes aplicaciones son formas bilineales sobre $\mathbb{R}^2$. Escribimos $\vec{u} = (x_1, x_2), \vec{v} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.
   (i) $f(\vec{u}, \vec{v}) = 2x_1y_2 - 3x_2y_1$; (ii) $f(\vec{u}, \vec{v}) = x_1 + y_2$; (iii) $f(\vec{u}, \vec{v}) = 3x_2y_2$;
   (iv) $f(\vec{u}, \vec{v}) = x_1x_2 + y_1y_2$; (v) $f(\vec{u}, \vec{v}) = 1$; (vi) $f(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.
5. Fijando la base $\{\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)$ en $\mathbb{R}^2$. Para las formas bilineales obtenidas en el ejercicio anterior, hallar las correspondientes expresiones matriciales respecto de dicha base. Asímismo, hallar las correspondientes partes simétrica y antisimétrica de cada forma bilineal.
6. Fijando ahora la base $\{\vec{u}_1 = (1,-1), \vec{u}_2 = (1,1)$ en $\mathbb{R}^2$. Para las mismas formas bilineales consideradas en los dos ejercicios anteriores, hallar las correspondientes expresiones matriciales de las formas bilineales respecto de la nueva base.
7. Sea f la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^2$ definida por $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 4x_2y_1 - x_2y_2$.
   (i) Hallar la matriz A de f en la base $\{\vec{u}_1 = (1,1), \vec{u}_2 = (1,2)\}$.
   (ii) Hallar la matriz B de f en la base $\{\vec{v}_1 = (1,-1), \vec{v}_2 = (3,1)\}$.
   (iii) Hallar la matriz P tal que $P^tAP = B$.
   (iv) Hallar la parte simétrica de f.
   (v) Hallar la parte antisimétrica de f.
8. Dada la forma bilineal f sobre $\mathbb{R}^3$ definida por
   $$f(\vec{u}, \vec{v}) = 2x_1y_1 - x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2,$$
   para todo $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, donde $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$ y $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3)$, se pide:
   a) Demostrar que f es simétrica.
   b) Dar la forma cuadrática ω que se define f.

c) Dar la aplicación lineal de polaridad $\hat{f}$ de ω. En particular, si $\vec{p} = (0,1,1)$, calcular $\hat{f}(\vec{p})$

d) Obtener el núcleo y el conjunto imagen de $\hat{f}$.

e) Si se considera el vector $\vec{p} = (1,0,0)$, hallar el conjunto $\{\vec{p}\}^f$ que consiste en todos los vectores $\vec{u}$ tales $f(\vec{p},\vec{u}) = 0$.

9. Dada la aplicación $\omega : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida mediante:

$$\omega(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 2xy + 2yz,$$

Se pide:

a) Demostrar que ω es una forma cuadrática.

b) En caso afirmativo, hallar la aplicación lineal $\hat{f}$ de polaridad de ω. Asímismo, calcular la imagen de vector $(1,-1,0)$ mediante dicha aplicación $\hat{f}$.

10. Dada la forma cuadrática $\omega : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida mediante:

$$\omega(x,y,z,t) = x^2 + 2y^2 + t^2 - 2xy + 2xt + 2yz + \alpha zt,$$

hállese $\alpha \in \mathbb{R}$ para que ω sea degenerada. Asimismo, hállese la forma polar y la aplicación lineal de polaridad de ω.

11. Dada la forma cuadrática $\omega : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\omega(x,y,z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

hállese su forma polar, su aplicación lineal de polaridad y diagonalícese.

12. Exprésar la forma cuadrática $\omega : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\omega(x,y,z,t) \quad = \quad 2z^2 + t^2 - 2xy + 2xz + 4xt + 2yz - 4yt,$$

como *suma de cuadrados*.

13. Dada la forma cuadrática $\omega : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\omega(x,y,z) \quad = \quad x^2 + ay^2 + az^2 + 2yz,$$

hállese $a \in \mathbb{R}$ para que w sea semidefinida, indicando si lo es positiva o negativamente.

14. Dada la forma cuadrática $\omega : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\omega(x,y,z) \quad = \quad ax^2 + ay^2 - (a-1)z^2 + 2xy,$$

con $a \in \mathbb{R}$ fijo, hállense el rango y la signatura de w para los distintos valores de a.

15. Estúdiese si son definidas o semidefinidas las formas cuadráticas de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$:

$$\omega_1(x,y,z) = x^2 - z^2 - 2xy + zx, \qquad \omega_2(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 5z^2 - 2xy + 6xz - 2yz,$$
$$\omega_3(x,y,z) = -x^2 - 2y^2 - z^2 + 2xy + 2yz.$$

16. Obténgase la forma canónica correspondiente a la forma cuadrática

$$\omega(x_1,x_2,x_3) = -7x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 10x_1x_2 - 10x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

17. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 3 y $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base de V. Dada la familia de formas cuadráticas $\omega_\alpha : V \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\omega_\alpha(\vec{x}) = 2x_1^2 + (\alpha+2)x_2^2 + (2\alpha-1)x_3^2 + 4x_1x_2 + 2(2-\alpha)x_2x_3 + 4x_1x_3,$$

para todo $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \in V$. Se pide:

(a) Dar las expresiones matriciales respecto de la base $\mathcal{E}$ de ω_α y su forma polar f_α correspondiente.

(b) Hallar la imagen del vector $\vec{e}_2 - \vec{e}_3$ mediante la aplicación lineal $\hat{f}_\alpha$ de polaridad de ω_α.

(c) Utilizando el método de los cuadrados de Gauss, diagonalizar ω_α.

(d) Dar la base de modo respecto de la cual ω_α está asociada a la matriz diagonal obtenida en el apartado (c).

(e) Dar el rango y la signatura de ω_α, para los distintos valores de α.

(f) Dar la expresión canónica de ω_0 y la base correspondiente a dicha expresión.

(g) Obtener el núcleo de la aplicación lineal $\hat{f}_0$ de polaridad de ω_0.

(h) Si se tiene el vector $\vec{y} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_3$, hallar la componente del vector $\vec{z} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ en $\{\vec{y}\}^f = \{\vec{x} \in V \mid f_1(\vec{y}, \vec{x}) = 0\}$, donde f_1 es la forma polar de ω_1.