Autor: Francisco Martín Cabrera, Departamento Matemática Fundamental, Universidad de La Laguna, Islas Canarias, España

T E M A II

2. VARIEDADES CUADRÁTICAS. ESTUDIO PROYECTIVO

2.1. Variedades cuadráticas reales.

Definición 2.1. Sea V un espacio vectorial real de dimensión mayor que 1 y sea el espacio vectorial $\mathcal{Q}(V,\mathbb{R})$ de las formas cuadráticas sobre V. Se denomina *variedad cuadrática* o *hipercuádrica* en el espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$, a todo punto $\langle\omega\rangle$ del espacio proyectivo $\mathcal{P}(\mathcal{Q}(V,\mathbb{R}))$. Los *ceros* de la variedad cuadrática $\langle\omega\rangle$ es el subconjunto de $\mathcal{P}(V)$ dado por

$$\mathcal{C}(\omega) = \{\langle\vec{x}\rangle \in \mathcal{P}(V)/\omega(\vec{x}) = 0\}.$$

Si $\dim \mathcal{P}(V) = 2$, la variedad cuadrática $\langle\omega\rangle$ se llama *cónica*.
Si $\dim \mathcal{P}(V) = 3$, la variedad cuadrática $\langle\omega\rangle$ se llama *cuádrica*.

Observación 2.2. En la definición anterior, hemos establecido que es diferente hablar de una variedad cuadrática $\langle\omega\rangle$ que considerar sus ceros $\mathcal{C}(\omega)$. Sin embargo, en lo sucesivo, por razón de simplicidad cometeremos un abuso de lenguaje diciendo $\mathcal{C}(\omega)$ para referirnos a la variedad cuadrática.

Al considerar variedades cuadráticas, las proyectividades descritas en la siguiente definición juegan un papel importante.

Definición 2.3. La *polaridad* de la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ es la proyectividad $\widetilde{f} : \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker \hat{f}) \to \mathcal{P}(V^*)$ que se deduce de la aplicación lineal de polaridad $\hat{f} : V \to V^*$ de la forma cuadrática no nula ω. Para un punto $Y \in \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker \hat{f})$, se dice que $\widetilde{f}(Y)$ es el *hiperplano polar* de Y y que Y es un *polo* de $\widetilde{f}(Y)$.

Ejemplo 2.4. En el plano proyectivo real $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ y respecto de una referencia proyectiva $\mathcal{R} = \{U_0, U_1, U_2; U\}$, consideramos la cónica

$$\mathcal{C}(\omega) \equiv x_0^2 - 2x_1x_2 = 0.$$

La matriz asociada a la forma cuadrática es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La aplicación lineal de polaridad, $\hat{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{3*}$, fijadas una base normalizada $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ de la referencia $\mathcal{R}$ y su dual $\{\vec{e}_0^*, \vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*\}$, está matricialmente dada por

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Nótese que $\ker \hat{f} = \{\vec{0}\}$, por lo que la polaridad $\widetilde{f}$ tiene todo $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ como conjunto de partida. Así, $\widetilde{g} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^{3*})$ y, fijadas la referencia $\mathcal{R}$ y su dual $\mathcal{R}^*$, $\widetilde{f}$ está matricialmente dada por

$$\rho \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Esto quiere decir que al punto P de coordenadas homogéneas (p_0, p_1, p_2) le corresponde su recta polar $\widetilde{f}(P)$ de coordenadas homogéneas $(a_0, a_1, a_2) = (p_0, -p_2, -p_1)$, calculadas a través de la ecuación matricial. Esto es, $\widetilde{f}(P) \equiv a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$.

Definición 2.5. Sea $\widetilde{f} : \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker \hat{f}) \to \mathcal{P}(V^*)$ una polaridad definida a partir de la forma cuadrática ω con forma polar f. Dos puntos $\langle \vec{x} \rangle = X$ e $\langle \vec{y} \rangle = Y$ de $\mathcal{P}(V)$ se dice que son *conjugados*, si $f(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Un punto $\langle \vec{x} \rangle = X \in \mathcal{P}(V)$ se dice que es *singular*, si es conjugado a todos los puntos de $\mathcal{P}(V)$, esto es, si $\vec{x} \in \ker \hat{f}$. El conjunto de los puntos singulares es $\mathcal{P}(\ker \hat{f})$.

Si f es la forma polar de una forma cuadrática no nula ω, entonces para $\langle \vec{y} \rangle = Y \in \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker \hat{f})$ se tiene

$$\widetilde{f}(Y) = \{ \langle \vec{x} \rangle \in \mathcal{P}(V) \,|\, 0 = \hat{f}(\vec{y})(\vec{x}) = f(\vec{y}, \vec{x}) \} = \mathcal{P}(\{\vec{y}\}^f),$$

donde $\{\vec{y}\}^f = \{\vec{x} \in V \,|\, f(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \}$. Esto es, el hiperplano polar $\widetilde{f}(Y)$ de Y está formado por los puntos X que son conjugados a Y.

Fijamos una referencia $\mathcal{R} = \{U_0, \ldots, U_n; U\}$ en $\mathcal{P}(V)$ y la referencia dual $\mathcal{R}^* = \{U_0^*, \ldots, U_n^*; U*\}$ en $\mathcal{P}(V^*)$ y tomamos bases normalizadas de dichas referencias $\{\vec{e}_0, \ldots, \vec{e}_n\}$ y su dual $\{\vec{e}_0^*, \ldots, \vec{e}*_n\}$. Para una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ se tiene una matriz. asociada A. Pues bien, para $X \in \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker \hat{f})$ con coordenadas homogéneas $(x_0, \ldots, x_n)$, si se tiene que $\widetilde{f}(X)$ tiene coordenadas homogéneas $(u_0, \ldots, u_n)$, entonces

$$\rho \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n0} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Esta es la ecuación matricial de la polaridad. Para hallar los puntos singulares, hay que determinar los puntos Q de cooordenadas homogéneas $(q_0, \ldots, q_n)$ tales que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n0} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}.$$

Observación 2.6. La variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ está constituida por todos aquellos puntos X que son conjugados consigo mismos, esto es, son autoconjugados. También se puede decir que la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ está formada por los puntos singulares y por aquellos puntos no singulares que pertenecen a su hiperplano polar.

Lema 2.7. *Hay puntos singulares, i.e.,* $\mathcal{P}(\ker \hat{f}) \neq \phi$*, si y sólo si* ω *es degenerada.*

Nótese que si $\dim \mathcal{P}(V) = n$ y rango de ω es r, entonces $\dim(\ker \hat{f}) + r = n+1$. Por lo que $\dim \mathcal{P}(\ker \hat{f}) = n - r$.

Ejemplo 2.8. En el espacio proyectivo real $\mathcal{P}(\mathbb{R}^4)$ y respecto de una referencia proyectiva $\mathcal{R} = \{U_0, U_1, U_2, U_3; U\}$, consideramos la cuádrica

$$\mathcal{C}(\omega) \equiv x_0^2 + 4x_0x_1 - 2x_1x_2 = 0.$$

La matriz asociada a la forma cuadrática es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de ω es 3. Por tanto, ω es degenerada. La aplicación lineal de polaridad, $\hat{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{4*}$, fijadas una base normalizada $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de la referencia $\mathcal{R}$ y su dual $\{\vec{e}_0^*, \vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3\}$, está matricialmente dada por

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Nótese que $\ker \hat{f} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_0 = x_1 = x_2 = 0\} = \{\lambda \vec{e}_3 \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Luego el conjunto de puntos singulares está dado por

$$\mathcal{P}(\ker \hat{f}) = \{Q\},$$

donde $(0,0,0,1)$ son unas coordendas homogéneas de del punto singular Q.

El conjunto de partida de la polaridad $\widetilde{f}$ es $\mathcal{P}(\mathbb{R}^4) - \{Q\}$. Así, $\widetilde{f} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^4) - \{Q\} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^{4*})$ y, fijadas la referencia $\mathcal{R}$ y su dual $\mathcal{R}^*$, $\widetilde{g}$ está matricialmente dada por

$$\rho \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

En particular, si un punto P tiene coordenadas homogéneas $(1, -1, 2, 1)$, le corresponde su plano polar $\widetilde{f}(P)$ de coordenadas homogéneas $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-1, 0, 1, 0)$, calculadas a través de la ecuación matricial. Esto es, $\widetilde{f}(P) \equiv -x_0 + x_2 = 0$.

Dados un espacio vectorial V y W un subespacio vectorial de V, recordamos que el *anulador* W^o de W es el conjunto de formas lineales α tales que $\alpha(\vec{w}) = 0$, para todo $\vec{w} \in W$. W^o es un subespacio vectorial del espacio vectorial dual V^*. Si $\dim V$ es finita, $\dim W + \dim W^o = \dim V$.

Asimismo, se prueba que $\mathcal{P}(W^o)$, subespacio proyectivo de $\mathcal{P}(V^*)$, está constituido por el conjunto de hiperplanos que contienen a $\mathcal{P}(W)$.

Lema 2.9. *Para $\mathcal{P}(V)$ con dimensión finita, el conjunto imagen de la polaridad $\widetilde{f}$ es igual al conjunto de hiperplanos que contienen los puntos singulares $\mathcal{P}(\ker \hat{f})$. Esto es, $\operatorname{Im} \widetilde{f} = \mathcal{P}((\ker \hat{f})^o)$.*

Demostración. El hiperplano polar U de un punto no singular P está formado por los puntos que son conjugados a P. En particular, los puntos singulares son conjugados P, luego $\mathcal{P}(\ker \hat{f}) \subseteq U = \widetilde{g}(P)$. Por tanto, $\widetilde{f}(P) = U \in \mathcal{P}((\ker \hat{f})^o)$. En conclusión, $\operatorname{Im} \widetilde{f} = \mathcal{P}(\operatorname{Im} \hat{f}) \subseteq \mathcal{P}((\ker \hat{f})^o)$.

Veamos que las respectivas dimensiones son coincidentes. Por un lado,

$$\dim(\operatorname{Im} \widetilde{f}) = \operatorname{rango}(\omega) - 1.$$

Por otro, $\dim(\ker \hat{f}) + \dim(\ker \hat{f})^o = n + 1$, lo que implica

$$\dim(\mathcal{P}((\ker \hat{f})^o) = \dim(\ker \hat{f})^o - 1 = n + 1 - \dim(\ker \hat{f}) - 1 = \operatorname{rango}(\omega) - 1.$$

Por tanto, $\operatorname{Im} \widetilde{f} = \mathcal{P}((\ker \hat{f})^o)$. □

Ejemplo 2.10. En el caso del ejemplo 2.8, el conjunto imagen de la polaridad $\widetilde{f}$ es el conjunto de planos que contienen al punto Q de coordenadas homogéneas $(0, 0, 0, 1)$.

$$\operatorname{Im} \widetilde{f} = \{\pi \mid \pi \text{ es un plano y } Q \in \pi\}.$$

En este caso, $\operatorname{Im} \widetilde{f}$ es el haz de planos que contienen a Q y es un subespacio proyectivo de dimensión 2 del espacio dual $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{4*})$.

2.2. Clasificación proyectiva de las variedades cuadráticas.

Desde el punto de vista proyectivo, las variedades cuadráticas se clasifican en la siguiente forma:

- $\mathcal{C}(\omega)$ es *ordinaria*, si ω es ordinaria. A su vez, teniendo en cuenta la signatura (p, q) de ω, una $\mathcal{C}(\omega)$ ordinaria puede ser
  a) *Real*, si $p \neq 0$ y $q \neq 0$.
  b) *Totalmente imaginaria*, si $p = 0$ ó $q = 0$.
- $\mathcal{C}(\omega)$ es *degenerada*, si ω es degenerada. Teniendo en cuenta la signatura (p, q) de ω, una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ degenerada puede ser
  (a) *Imaginaria*, si $p + q = r > 1$ y $p = 0$ ó $q = 0$.
  (b) *Real*, si $p \neq 0$ y $q \neq 0$.
  (c) *Producto de dos hiperplanos imaginarios*, si ω tiene rango 2 y signatura $(2, 0)$ ó $(0, 2)$.
  (d) *Producto de dos hiperplanos reales*, si ω tiene rango 2 y signatura es $(1, 1)$.
  (e) *Hiperplano doble*, si el rango de ω es 1.

Ejemplo 2.11. Se puede comprobar que la cónica del ejemplo 2.4 tiene rango 3 y con signatura $(2, 1)$. Por tanto, $\mathcal{C}(\omega) \equiv x_0^2 - 2x_1x_2 = 0$ es una cónica ordinaria real.

Ejemplo 2.12. La cuádrica del ejemplo 2.8 tiene rango 3 y con signatura $(1, 2)$. Por tanto, $\mathcal{C}(\omega) \equiv x_0^2 + 4x_0x_1 - 2x_1x_2 = 0$ es una cuádrica degenerada real de rango 3.

Ejemplo 2.13. La cuádrica $\mathcal{C}(\omega) \equiv x_1^2 + x_3^2 = 0$ es una cuádrica degenerada imaginaria de rango 2. Más concretamente, es el producto de dos planos imaginarios.

2.3. Apéndice: clasificaciones proyectivas de las cónicas y de las cuádricas.

Clasificación proyectiva de las cónicas. Dada una cónica $\mathcal{C}(\omega)$ en el plano proyectivo definida por la forma cuadrática ω y sea A su matriz asociada respecto de una cierta referencia proyectiva. Desde el punto de vista proyectivo, se tienen las siguientes alternativas:

i) Si $\operatorname{rango} A = 3$, la cónica es *ordinaria* y no tiene puntos singulares. Por tanto, hay dos posibilidades:

   a) La signatura de la forma cuadrática sea $\operatorname{sig}\omega = (3,0)$ ó $(0,3)$. Una ecuación canónica de la cónica es
   $$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0.$$
   En este caso se dice que la cónica es *totalmente imaginaria*.

   b) La signatura de la forma cuadrática sea $\operatorname{sig}\omega = (2,1)$ ó $(1,2)$. Una ecuación canónica de la cónica es
   $$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0.$$
   En este caso se dice que la cónica es *ordinaria real*.

ii) Si $\operatorname{rango} A = 2$, la cónica es *degenerada* y tiene un sólo punto singular. Hay dos alternativas:

   a) La signatura de la forma cuadrática sea $\operatorname{sig}\omega = (2,0)$ ó $(0,2)$. Una ecuación canónica de la cónica es
   $$x_0^2 + x_1^2 = 0.$$
   En este caso se dice que la cónica es *dos rectas imaginarias*. El punto singular es el único punto real de la cónica.

   b) La signatura de la forma cuadrática sea $\operatorname{sig}\omega = (1,1)$. Una ecuación canónica de la cónica es
   $$x_0^2 - x_1^2 = 0.$$
   En este caso se dice que la cónica es *dos rectas reales*. El punto singular es el punto de corte de las dos rectas.

iii) Si $\operatorname{rango} A = 1$, la cónica tiene una recta de puntos singulares. En este caso una ecuación canónica de la cónica es una expresión del tipo
$$x_0^2 = 0.$$
Lo que representa una *recta doble*.

Clasificación proyectiva de las cuádricas. Dada una cuádrica $\mathcal{C}(\omega)$ en el espacio proyectivo tridimensional definida por la forma cuadrática ω y sea A su matriz asociada respecto de una cierta referencia proyectiva. Desde el punto de vista proyectivo, se tienen las siguientes alternativas:

I) Si $\det(A) \neq 0$, la cuádrica es *ordinaria* y no tiene puntos singulares. A su vez, teniendo en cuenta la signatura, la cuádricas ordinarias se clasifican en el modo siguiente:

   i) *Cuádrica totalmente imaginaria.* En este caso, la signatura de la forma cuadrática es $\operatorname{sig}\omega = (4,0)$ ó $(0,4)$ y la cuádrica admite la ecuación canónica
   $$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

   ii) *Cuádrica ordinaria real no reglada.* En este caso, la signatura de la forma cuadrática es $\operatorname{sig}\omega = (3,1)$ ó $(1,3)$ y la cuádrica admite la ecuación canónica
   $$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Se puede probar que una cuádrica de este tipo no puede contener rectas.

iii) *Cuádrica ordinaria real reglada.* En este caso, la signatura de la forma cuadrática es $\operatorname{sig}\omega = (2,2)$ y la cuádrica admite la ecuación canónica

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Veremos mas adelante que una cuádrica de este tipo está formada por rectas.

II) Si det $(A) = 0$, la cuádrica es *degenerada*. Dependiendo del rango, las cuádricas degeneradas se clasifican en el modo siguiente:

i) Si rango $(A) = 3$, la cuádrica admite un único puntos singular. En este caso hay dos posibilidades:

a) *Cuádrica imaginaria de rango* 3, cuando la signatura $\operatorname{sig}\omega = (3,0)$ ó $(0,3)$ y admite la ecuación canónica $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$.

b) *Cuádrica real de rango* 3, cuando la signatura *sig* $\omega = (2,1)$ ó $(1,2)$ y admite la ecuación canónica $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$.

ii) Si rango $(A) = 2$, la cuádrica admite una recta de puntos singulares. En este caso hay dos posibilidades:

a) *Dos planos imaginarios*, cuando la signatura $\operatorname{sig}\omega = (2,0)$ ó $(0,2)$ y admite la ecuación canónica $x_0^2 + x_1^2 = 0$.

b) *Dos planos reales*, cuando la signatura $\operatorname{sig}\omega = (1,1)$ y admite la ecuación canónica $x_0^2 - x_1^2 = 0$. La recta común de los dos planos está formada por los puntos singulares.

iii) Si rango $(A) = 1$, la cuádrica es un *plano doble* que está formado por los puntos singulares y admite la ecuación canónica $x_0^2 = 0$.

Veamos ahora algunas propiedades de las variedades cuadráticas en general.

Lema 2.14. *Sea una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ que contiene un hiperplano, entonces el rango de ω es a lo sumo* 2.

Demostración. Sea H un hiperplano que está contenido en una variedad cuadrática, entonces podemos considerar una referencia proyectiva $\{P_0, P_1, \ldots, P_n; S\}$ de modo que $P_1 = \langle \vec{p}_1 \rangle$, ..., $P_n = \langle \vec{p}_n \rangle$ sean puntos de H. Nótese que $\omega(\vec{p}_1) = 0, \ldots, \omega(\vec{p}_n) = 0$ y

$$f(\vec{p}_i, \vec{p}_j) = \frac{1}{2}\{\omega(\vec{p}_i + \vec{p}_j) - \omega(\vec{p}_i) - \omega(\vec{p}_j)\} = 0,$$

para $i, j = 1, \ldots, n$. Por lo que la ecuación de la variedad cuadrática para la referencia considerada es

$$a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + \cdots + 2a_{0n}x_0x_n = 0.$$

Luego se trata de una variedad cuadrática de rango 2 a lo sumo. □

Como consecuencia, una cónica ordinaria no puede contener una recta. Por el mismo argumento, una cuádrica ordinaria o una cuádrica degenerada de rango 3 no puede contener un plano.

Corolario 2.15. *Sea una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ de un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ de dimensión $n > 1$ y tal que la dimensión del conjunto de puntos singulares es menor que $n-2$, entonces $\mathcal{C}(\omega)$ no puede contener un hiperplano.*

Demostración. Si hay un hiperplano contenido en la variedad cuadrática, entonces

$$\dim \mathcal{P}(\ker \hat{f}) = n - \text{rango}(\omega) \geq n - 2,$$

contradicción. $\square$

Proposición 2.16. *Si Q es un punto singular de una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ y P es un punto de $\mathcal{C}(\omega)$ distinto de Q, entonces la recta PQ que une los puntos P y Q está contenida en la variedad cuadrática.*

Demostración. En efecto, sea $\langle \vec{x} \rangle = X \in PQ$, con $P = \langle \vec{p} \rangle$ y $Q = \langle \vec{q} \rangle$, entonces $\vec{x} = \lambda\vec{p} + \mu\vec{q}$. Luego,

$$\omega(\vec{x}) = \omega(\lambda\vec{p} + \mu\vec{q}) = \lambda^2\omega(\vec{p}) + \mu^2\omega(\vec{q}) + 2\lambda\mu f(\vec{p}, \vec{q}),$$

donde f es la forma polar de ω. Si Q es singular, $\omega(\vec{q}) = 0$ y $f(\vec{p}, \vec{q}) = 0$. Además, si $P \in C(\omega)$ se tiene que $\omega(\vec{p}) = 0$. Por tanto, $\omega(\vec{x}) = 0$, lo que implica $X \in \mathcal{C}(\omega)$. $\square$

2.4. Incidencia de una recta y una variedad cuadrática.

Dada la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ y la recta PQ que une los puntos $P = \langle \vec{p} \rangle$ y $Q = \langle \vec{q} \rangle$. La intersección de la variedad cuadrática y la recta estará formada por los puntos $X = \langle \lambda\vec{p} + \mu\vec{q} \rangle$ que satisfagan la ecuación

$$\omega(\lambda\vec{p} + \mu\vec{q}) = 0,$$

es decir,

$$\lambda^2\omega(\vec{p}) + 2\lambda\mu f(\vec{p}, \vec{q}) + \mu^2\omega(\vec{q}) = 0,$$

recordemos que $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

a) Si $\omega(\vec{p}) \neq 0$, entonces toda solución (λ, μ) de la ecuación verifica que $\mu \neq 0$. En este caso, podemos dividir por μ^2 y se tiene

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \omega(\vec{p}) + 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) f(\vec{p}, \vec{q}) + \omega(\vec{q}) = 0.$$

Cuyas soluciones dependen de

$$\Delta = (f(\vec{p}, \vec{q}))^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{q}).$$

Así, si $\Delta > 0$, habrá dos puntos comunes a la variedad cuadrática y a la recta. En cambio, si $\Delta < 0$ la variedad cuadrática y la recta no tienen ningún punto en común. Finalmente, si $\Delta = 0$, la variedad cuadrática y la recta tendrán un sólo punto en común.

b) Si $\omega(\vec{q}) \neq 0$, entonces toda solución (λ, μ) de la ecuación verifica que $\lambda \neq 0$. En este caso, podemos dividir por λ^2 y se tiene

$$\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \omega(\vec{q}) + 2\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) f(\vec{p}, \vec{q}) + \omega(\vec{p}) = 0.$$

Igualmente, las soluciones dependen de

$$\Delta = (f(\vec{p}, \vec{q}))^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{q}).$$

Si $\Delta > 0$, habrá dos puntos comunes a la variedad cuadrática y a la recta. Si $\Delta < 0$ la variedad cuadrática y la recta no tienen ningún punto en común. Finalmente, si $\Delta = 0$, la variedad cuadrática y la recta tendrán un sólo punto en común.

c) Si $\omega(\vec{p}) = 0$ y $\omega(\vec{q}) = 0$, entonces se tiene la ecuación

$$2\lambda\mu f(\vec{p}, \vec{q}) = 0.$$

En esta situación tenemos dos alternativas:

i) Si $f(\vec{p}, \vec{q}) \neq 0$, esto es, $\Delta > 0$, entonces $\mu = 0$ ó $\lambda = 0$. Por tanto, P y Q son los únicos puntos de la recta r que están en $\mathcal{C}(\omega)$.

ii) Si $f(\vec{p}, \vec{q}) = 0$, esto es, $\Delta = 0$, entonces cualquier (λ, μ) satisface la ecuación. Por tanto, todos los puntos de la recta r están en $\mathcal{C}(\omega)$.

En resumen, se tienen las siguientes posibilidades:

i) Si $\Delta > 0$, habrá únicamente dos puntos comunes a la variedad cuadrática y a la recta. En este caso se dice que la recta es *secante* a la variedad cuadrática.

ii) Si $\Delta < 0$, la variedad cuadrática y la recta no tienen ningún punto en común. En este caso se dice que la recta es *exterior* a la variedad cuadrática.

iii) Cuando $\Delta = 0$ hay dos posibilidades:

a) $\omega(\vec{p}) \neq 0$ ó $\omega(\vec{q}) \neq 0$, entonces la recta y la variedad cuadrática tiene un único punto común.

b) $\omega(\vec{p}) = 0$ y $\omega(\vec{q}) = 0$, entonces la recta está contenida en la variedad cuadrática.

Definición 2.17. Una recta se dice que es *tangente* a una variedad cuadrática, si interseca a dicha variedad en un punto o bién la recta está totalmente contenida en la variedad cuadrática.

Lema 2.18. *Una recta PQ es tangente a la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ si y sólo si*

$$(f(\vec{p}, \vec{q}))^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{q}) = 0,$$

donde $P = \langle\vec{p}\rangle$ y $Q = \langle\vec{q}\rangle$.

Demostración. Aunque este lema sigue de lo dicho anteriormente, vamos a mostrar una demostración explícita. Si una recta es tangente entonces se tienen dos alternativas:

(i) $r \subseteq \mathcal{C}(\omega)$. En este caso, si $r = PQ$, se tiene que

$$\lambda^2\omega(\vec{p}) + 2\lambda\mu f(\vec{p}, \vec{q}) + \mu^2\omega(\vec{q}) = 0, \tag{2.3}$$

para todo $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. De esto se deduce, $\omega(\vec{p}) = \omega(\vec{q}) = f(\vec{p}, \vec{q}) = 0$.

(ii) $r \cap \mathcal{C}(\omega)$ es un único punto X. Entonces $\omega(\vec{p}) \neq 0$ ó $\omega(\vec{q}) \neq 0$. Supongamos que $\omega(\vec{p}) \neq 0$. Ello implica que $X = \langle\lambda\vec{p} + \mu\vec{q}\rangle \neq P$. Por tanto, $\mu \neq 0$ y en la ecuación (2.3) podemos dividir por μ^2 para obtener

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \omega(\vec{p}) + 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) f(\vec{p}, \vec{q}) + \omega(\vec{q}) = 0. \tag{2.4}$$

El punto X se determinará a partir de las soluciones de esta ecuación para $\frac{\lambda}{\mu}$. Como X es único, el discriminante de la ecuación será nulo. Esto es, $4((f(\vec{p}, \vec{q}))^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{q})) = 0$.

Recíprocamete, si $(f(\vec{p}, \vec{q}))^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{q}) = 0$, entonces se tienen dos alternativas

(i) $\omega(\vec{p}) = \omega(\vec{q}) = 0$. En este caso, también debe ser $f(\vec{p}, \vec{q}) = 0$. Ello implica que $r \subseteq \mathcal{C}(\omega)$.

(ii) $\omega(\vec{p}) \neq 0$ ó $\omega(\vec{q}) \neq 0$. Si $\omega(\vec{p}) \neq 0$, entonces P no está en $r \cap \mathcal{C}(\omega)$. Por lo que si (λ, μ) es solución de la ecuación (2.3), entonces $\mu \neq 0$. Dividiendo dicha ecuación por μ^2, se obtiene la ecuación (2.4) de segundo grado con discriminante nulo por hipótesis. Por tanto, tiene una única solución y $r \cap \mathcal{C}(\omega)$ es un único punto.

$\square$