Autor: Francisco Martín Cabrera, Departamento Matemática Fundamental, Universidad de La Laguna, Islas Canarias, España

2.5. Ejercicios.

Observación 2.19. La siguiente lista puede contener algún ejercicio que plantee un problema de variedades cuadráticas en el espacio afín E. Dicho tipo de ejercicio está aquí inluido porque los conceptos involucrados no son puramente afines. En realidad, un tal ejercicio únicamente involucra conceptos proyectivos, considerando las variedades cuadráticas en el espacio proyectivo $\mathcal{P}(V) = E \cup H_\infty$, donde H_∞ es el hiperplano del infinito.

Si $\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ es una referencia afín de E, entonces $\{O, \langle\vec{e}_1\rangle, \ldots, \langle\vec{e}_n\rangle; O+(\vec{e}_1+\cdots+\vec{e}_n)\}$ es una referencia proyectiva de $\mathcal{P}(V)$ con la relación usual entre coordenadas afines y coordenadas homogéneas. El hiperplano H_∞ admite por ecuación $x_0 = 0$ con respecto a dicha referencia proyectiva.

1. Sea la cuádrica $4x^2 + 4y^2 - z^2 + 4z - 4 = 0$. Se pide:
   a) Dar la ecuación de la polaridad de la cuádrica.
   b) Hallar los puntos singulares.
   c) El plano polar de $P = (1, 1, 2)$ respecto de la cuádrica.
   d) Clasificar la cuádrica desde el punto de vista proyectivo.
2. En el plano afín real y respecto de una referencia afín, considérese la cónica $\mathcal{C}$ dada por la ecuación:
   $$2 + x^2 + 2y^2 - 2x + 2axy = 0.$$
   Clasificar $\mathcal{C}$ desde el punto de vista proyectivo para los distintos valores de a.
3. Dada, en el espacio afín real y respecto de una referencia afín, la cuádrica $\mathcal{C}$ que, para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$, admite por ecuación:
   $$a + x^2 + 2y^2 + bz^2 + 2xy + yz = 0.$$
   Se pide clasificar $\mathcal{C}$ desde el punto de vista proyectivo para los distintos valores de a y b.
4. En el espacio afín y respecto de una referencia afín, considérense las cuádricas que admiten por ecuaciones:
   $$2 - 2y^2 - 3x + 3xy - z + xz = 0,$$
   $$1 + 25x^2 + 4y^2 - 10x + 4y - 20xy = 0.$$
   Pruébese que dichas cuádricas son pares de planos y hallarlos.
5. ¿Qué valor hay que dar al parámetro λ para que la cónica
   $$x^2 + 2y^2 - \lambda xy - x - 2 = 0$$
   esté formada por dos rectas?. Obtener además las rectas.

6. Demostrar que si una recta r está contenida en una cuádrica de rango 3, entonces r pasa por el punto singular de la cuádrica.
7. En el espacio afín y respecto de una referencia afín, considérense las cuádricas que, para $\lambda \in \mathbb{R}$, están dadas por la ecuación:

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2\lambda xy + 2yz - 2x + 4y + 2z = 0.$$

   Hallar el lugar geométrico de los puntos tales que, para dichas cuádricas, sean polos del plano $x - y = 0$.