Autor: Francisco Martín Cabrera, Departamento Matemática Fundamental, Universidad de La Laguna, Islas Canarias, España

T E M A III

3. VARIEDADES CUADRÁTICAS. ESTUDIO PROYECTIVO: CONTINUACIÓN

3.1. Subespacios proyectivos tangentes a una variedad cuadrática.

Proposición 3.1. *Dado un subespacio proyectivo $\mathcal{P}(W)$ de dimensión ≥ 1 de $\mathcal{P}(V)$ y una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ en $\mathcal{P}(V)$, entonces se tienen dos alternativas:*

- $\mathcal{C}(\omega) \cap \mathcal{P}(W)$ *es una variedad cuadrática en el espacio* $\mathcal{P}(W)$, *ó*
- $\mathcal{P}(W) \subseteq \mathcal{C}(\omega)$.

Demostración. En efecto, si consideramos la restricción de la forma cuadrática ω al subespacio vectorial W, $\omega_{|W} : W \longrightarrow \mathbb{R}$ es también una forma cuadrática. Si $\omega_{|W}$ es nula, entonces $\mathcal{P}(W) \subseteq \mathcal{C}(\omega)$. Por el contrario, si $\omega_{|W}$ es no nula, entonces

$$\mathcal{C}(\omega) \cap \mathcal{P}(W) = \mathcal{C}(\omega_{|W})$$

expresará una variedad cuadrática en el espacio $\mathcal{P}(W)$. □

Definición 3.2. Se dice que el subespacio proyectivo $\mathcal{P}(W)$ de dimensión ≥ 1 es *tangente* a la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$, si existe un punto $P \in \mathcal{P}(W) \cap \mathcal{C}(\omega)$ tal que para todo $X \in \mathcal{P}(W) - \{P\}$, la recta PX es tangente a $\mathcal{C}(\omega)$.

Proposición 3.3. *Dado un subespacio proyectivo $\mathcal{P}(W)$ de dimensión ≥ 1. Entonces $\mathcal{P}(W)$ es tangente a una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ si y sólo si existe un punto $\langle \vec{p} \rangle = P \in \mathcal{P}(W)$ tal que para todo $\langle \vec{x} \rangle = X \in \mathcal{P}(W)$, se tiene $f(\vec{p}, \vec{x}) = 0$. Un tal punto P se denomina* punto de tangencia *del subespacio proyectivo $\mathcal{P}(W)$.*

Demostración. " $\Rightarrow$ "

Si $\mathcal{P}(W)$ es tangente a $\mathcal{C}(\omega)$, según la definición esto quiere decir que existe un punto $\langle \vec{p} \rangle = P \in \mathcal{P}(W) \cap \mathcal{C}(\omega)$ tal que para todo $\langle \vec{x} \rangle = X \in \mathcal{P}(W) - \{P\}$ la recta PX es tangente a $\mathcal{C}(\omega)$. Pero la condición de tangencia exige que el discriminante sea cero, luego

$$\Delta = (f(\vec{p}, \vec{x}))^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{x}) = 0.$$

Como $P \in \mathcal{C}(\omega)$, será $\omega(\vec{p}) = 0$, por lo que $f(\vec{p}, \vec{x}) = 0$.

" $\Leftarrow$ "

Si existe $\langle\vec{p}\rangle = P \in \mathcal{P}(W)$ tal que para todo $\langle\vec{x}\rangle = X \in \mathcal{P}(W)$ se tiene $f(\vec{p},\vec{x}) = 0$. En particular será $f(\vec{p},\vec{p}) = 0$, es decir $P \in \mathcal{P}(W) \cap \mathcal{C}(\omega)$. Además, para todo $X \in \mathcal{P}(W) - \{P\}$, la ecuación

$$\lambda^2\omega(\vec{p}) + \mu^2\omega(\vec{x}) + 2\lambda\mu f(\vec{p},\vec{x}) = 0,$$

tiene discriminante $(f(\vec{p},\vec{x}))^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{x}) = 0$, puesto que $f(\vec{p},\vec{x}) = 0$ y $\omega(\vec{p}) = 0$. En conclusión, la recta PX es tangente a la variedad cuadrática, para todo $X \in \mathcal{P}(W)$, es decir, $\mathcal{P}(W)$ es tangente a la variedad cuadrática. □

Proposición 3.4. *Dado un subespacio proyectivo $\mathcal{P}(W)$ de dimensión ≥ 1. Entonces $\mathcal{P}(W)$ es tangente a una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ si y sólo si $\mathcal{P}(W) \cap \mathcal{C}(\omega)$ es una variedad cuadrática degenerada en el espacio $\mathcal{P}(W)$ ó $\mathcal{P}(W) \subseteq \mathcal{C}(\omega)$.*

Demostración.
" $\Rightarrow$ "
Si existe $\langle\vec{p}\rangle = P \in \mathcal{P}(W)$ tal que para todo $\langle\vec{x}\rangle = X \in \mathcal{P}(W)$ se tiene $f(\vec{p},\vec{x}) = 0$, entonces $\omega_W : W \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma cuadrática degenerada, ya que $\vec{p}$ es no nulo y está en el núcleo de su aplicación de polaridad. Por tanto, si ω_W es no nula

$$\mathcal{C}(\omega_W) = \mathcal{P}(W) \cap \mathcal{C}(\omega)$$

es una variedad cuadrática degenerada. Si ω_W es nula, $\mathcal{P}(W) \subseteq \mathcal{C}(\omega)$.
" $\Leftarrow$ "
Si $\mathcal{P}(W) \subseteq \mathcal{C}(\omega)$, entonces para $P \in \mathcal{P}(W)$ se tiene que la recta PX, donde $X \in \mathcal{P}(W)$, está contenida en $\mathcal{C}(\omega)$. Por consiguiente, PX es tangente. Lo que implica que $\mathcal{P}(W)$ es un subespacio proyectivo tangente a $\mathcal{C}(\omega)$.

Si $\mathcal{C}(\omega_W) = \mathcal{P}(W) \cap \mathcal{C}(\omega)$ es una variedad cuadrática degenerada, entonces ω_W es una forma cuadrática degenerada, lo cual quiere decir que existe $\vec{p} \in W$ no nulo tal que para todo $\vec{x} \in W$ se tiene $f(\vec{p},\vec{x}) = 0$. Por consiguiente, para $\langle\vec{p}\rangle = P \in \mathcal{P}(W)$ se tiene que para todo $\langle\vec{x}\rangle = X \in \mathcal{P}(W)$ se verifica $f(\vec{p},\vec{x}) = 0$. Lo que implica que $\mathcal{P}(W)$ es tangente a $\mathcal{C}(\omega)$. □

Proposición 3.5. *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática degenerada de un espacio proyectivo de dimensión mayor que 1. Entonces un hiperplano es tangente si y sólo si el hiperplano contiene un punto singular.*

Demostración. Si un hiperplano contiene un punto singular Q, entonces existe un punto Q del hiperplano que es conjugado a todos los puntos de dicho hiperplano. Por tanto, el hiperplano es tangente.

Supongamos que un hiperplano U es tangente, entonces existe un punto $P \in U$ tal que P es conjugado a todo punto de U.

Si P es singular, se tiene lo afirmado.

Si P no es singular, entonces U es el hiperplano polar de P. Por consiguiente, U está en el conjunto imagen de la polaridad y debe contener a todos los puntos singulares. □

Unas consecuencias del último resultado son las siguientes.

Corolario 3.6. *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática con un único punto singular Q de un espacio proyectivo de dimensión mayor que 1 y sea U un hiperplano. Entonces son equivalentes:*

(i) *U es tangente.*

(ii) *U contiene a Q.*

Demostración. Es inmediato a partir de los resultados anteriores. □

Corolario 3.7. *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática de un espacio proyectivo de dimensión mayor que 1 con un único punto singular Q y sea U un hiperplano, entonces son equivalentes:*

i) U no contiene a Q.

ii) $U \cap \mathcal{C}(\omega)$ es una variedad cuadrática ordinaria en el espacio U.

3.2. Variedad cuadrática tangente desde un punto a una variedad cuadrática.

Lema 3.8. *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática de un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ y sea P un punto de dicho espacio, se tiene:*

i) $\omega_P(\vec{x}) = (f(\vec{p},\vec{x}))^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{x})$, es una forma cuadrática.

ii) Si $P \in \mathcal{C}(\omega)$, la forma cuadrática ω_P es nula si y sólo si P es un punto singular de $\mathcal{C}(\omega)$.

iii) Si $P \notin \mathcal{C}(\omega)$, la forma cuadrática ω_P es nula si y sólo si $\mathcal{C}(\omega)$ es un hiperplano (doble).

Demostración. i) En efecto, si consideramos

$$f_P(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}\left(\omega_P(\vec{x}+\vec{y}) - \omega_P(\vec{x}) - \omega_P(\vec{y})\right),$$

se obtiene

$$f_P(\vec{x},\vec{y}) = f(\vec{p},\vec{x})f(\vec{p},\vec{y}) - f(\vec{x},\vec{y})\omega(\vec{p})).$$

De lo que se deduce que f_P es una forma bilineal simétrica. Además,

$$f_P(\vec{x},\vec{x}) = f(\vec{p},\vec{x})^2 - \omega(\vec{x})\omega(\vec{p}) = \omega_P(\vec{x}).$$

Por tanto, ω_P es una forma cuadrática.

ii) Si ω_P es nula y $P \in \mathcal{C}(\omega)$, entonces

$$f(\vec{p},\vec{x})^2 = \omega(\vec{p})\omega(\vec{x}) = 0,$$

para todo punto $X = \langle\vec{x}\rangle$. Por consiguiente, P es punto singular de $\mathcal{C}(\omega)$. Lo recíproco es inmediato.

iii)Si $P \notin \mathcal{C}(\omega)$ y la forma cuadrática ω_P es nula, entonces

$$\frac{f(\vec{p},\vec{x})^2}{\omega(\vec{p})} = \omega(\vec{x}).$$

Luego $\mathcal{C}(\omega)$ es el conjunto de puntos $X = \langle\vec{x}\rangle$ tales que $f(\vec{p},\vec{x})^2 = 0$, por lo que la variedad cuadrática es igual al hiperplano polar de P. Esto es,

$$\mathcal{C}(\omega) = \mathcal{C}(f(\vec{p},\vec{x})^2) = \widetilde{f}(P)^2.$$

Recíprocamente, si $\mathcal{C}(\omega)$ es un hiperplano. Una recta cualquiera PX que pase por P interseca con el hiperplano en un único punto, puesto que P no está en dicho hiperplano. Por tanto, la recta PX satisface la condición de tangencia

$$\omega_P(\vec{x}) = f(\vec{p},\vec{x})^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{x}) = 0.$$

Nótese que X es un punto arbitrario, por lo que ω_P es nula. □

Definición 3.9. Dados una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ que no sea un hiperplano doble y un punto P no singular. La variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega_P)$ se denomina *variedad cuadrática tangente* a $\mathcal{C}(\omega)$ desde P.

Observación 3.10. Según lo que vimos anteriormente, la ecuación de la variedad cuadrática tangente a $\mathcal{C}(\omega)$ desde P vendrá dada por:

$$f(\vec{p},\vec{x})^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{x}) = 0.$$

Es decir, la variedad tangente está formada por los puntos X tales que la recta PX es tangente a $\mathcal{C}(\omega)$.

Ejemplo 3.11. En el plano proyectivo, dada la cónica $\mathcal{C}(\omega)$ de ecuación

$$\mathcal{C}(\omega) \equiv -x_0^2 + 2x_1x_2 = 0.$$

Si consideramos el punto $P(1,1,1)$, la cónica tangente desde P a $\mathcal{C}(\omega)$ viene dada por

$$\mathcal{C}(\omega_P) \equiv (-x_0 + x_1 + x_2)^2 - 1\,(-x_0^2 + 2x_1x_2) = 0 \equiv (x_0 - x_1)^2 + (x_0 - x_2) = 0.$$

Esta cónica $\mathcal{C}(\omega_P)$ es el producto de dos rectas imaginarias.

Si ahora consideramos el punto $N(1,0,0)$, entonces $\mathcal{C}(\omega_N)$ está dada por

$$\mathcal{C}(\omega_N) \equiv (-x_0)^2 - (-1)(-x_0^2 + 2x_1x_2) = 0 \equiv x_1x_2 = 0.$$

La cónica $\mathcal{C}(\omega_N)$ es el producto de dos rectas reales que se cortan en N.

Lema 3.12. *Sea una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ que no sea un hiperplano doble y sea un punto P no singular.*

i) La variedad cuadrática tangente $\mathcal{C}(\omega_P)$ es degenerada y P es un punto singular de $\mathcal{C}(\omega_P)$.
ii) Si Q es un punto singular de $\mathcal{C}(\omega)$, entonces Q es punto singular de $\mathcal{C}(\omega_P)$.

Demostración. Al ser

$$f_P(\vec{p},\vec{y}) = f(\vec{p},\vec{p})f(\vec{p},\vec{y}) - f(\vec{p},\vec{y})\omega(\vec{p})) = 0,$$

se tiene que P es un punto singular de $\mathcal{C}(\omega_P)$.

Si $Q = \langle \vec{q} \rangle$ es punto singular de $\mathcal{C}(\omega)$, entonces

$$f_P(\vec{q},\vec{y}) = f(\vec{p},\vec{q})f(\vec{p},\vec{y}) - f(\vec{q},\vec{y})\omega(\vec{p})) = 0.$$

Por tanto, Q es punto singular de $\mathcal{C}(\omega_P)$. □

Observación 3.13. Nótese que para un punto P no singular y una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ que no sea hiperplano, la intersección de la variedad cuadrática tangente $\mathcal{C}(\omega_P)$ con la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ coincide con la intersección del hiperplano polar de P con $\mathcal{C}(\omega)$. En efecto, la primera intersección viene dada por

$$\left.\begin{array}{c} f(\vec{p},\vec{x})^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{x}) = 0, \\ \omega(\vec{x}) = 0, \end{array}\right\}$$

y la segunda intersección está dada por el siguiente sistema equivalente al anterior

$$\left.\begin{array}{c} f(\vec{p},\vec{x}) = 0, \\ \omega(\vec{x}) = 0, \end{array}\right\}.$$

Proposición 3.14. *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática que no sea un hiperplano y sea P un punto no singular. Entonces*

i) *Si $P \in \mathcal{C}(\omega)$, entonces $\mathcal{C}(\omega_P)$ es un hiperplano coincidente con el hiperplano polar de P. Esto es, $\mathcal{C}(\omega_P) = \widetilde{f}(P)^2$.*

ii) *Si $P \notin \mathcal{C}(\omega)$, entonces el conjunto de puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega_P)$ es igual al subespacio proyectivo que resulta de sumar el punto P a los puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega)$. En particular, en este caso se tiene* $\text{rango}(\omega_P) = \text{rango}(\omega) - 1$.

Demostración.

i) Al ser $P \in \mathcal{C}(\omega)$, entonces $\mathcal{C}(\omega_P) \equiv (f(\vec{p}, \vec{x}))^2 = 0$. Sabemos que $f(\vec{p}, \vec{x}) = 0$ representa el hiperplano polar de P.

ii) Denotamos por $\mathcal{Q}$ el subespacio proyectivo formado por los puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega)$. Supongamos que $S = \langle \vec{s} \rangle$ es un punto singular de $\mathcal{C}(\omega_P)$, entonces $f_P(\vec{s}, \vec{y}) = 0$, para todo $\vec{y}$. Por consiguiente,
$$f(\vec{p}, \vec{s}) f(\vec{p}, \vec{y}) = \omega(\vec{p}) f(\vec{s}, \vec{y}).$$
Denotando $\lambda = f(\vec{p}, \vec{s})$ y $\mu = \omega(\vec{p}) \neq 0$, obtenemos la identidad $\lambda f(\vec{p}, \vec{y}) = \mu f(\vec{s}, \vec{y})$, para todo punto Y. Por tanto, $f(\lambda\vec{p} + \mu\vec{s}, \vec{y}) = 0$, para todo Y. Si $\lambda\vec{p} + \mu\vec{s} = 0$, entonces $S = \langle \frac{\lambda}{\mu}\vec{p} \rangle = P$ y S estaría en $P + \mathcal{Q}$. Si $\lambda\vec{p} + \mu\vec{s} = \vec{q} \neq 0$, entonces $Q = \langle \vec{q} \rangle$ sería un punto singular de $\mathcal{C}(\omega)$ y $S = \langle \mu\vec{s} \rangle = \langle -\lambda\vec{p} + \vec{q} \rangle \in P + \mathcal{Q}$.

Recíprocamente, es inmediato ver que todos los puntos de $P + \mathcal{Q}$ son puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega_P)$.

□

Ejemplo 3.15. En el espacio proyectivo tridimensional, sea el punto $P(1, 0, -1, 1)$ y la cuádrica $\mathcal{C}(\omega) \equiv -2x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. Como P está en $\mathcal{C}(\omega)$, se tiene que la cuádrica tangente desde P es su plano polar $\widetilde{f}(P)$ doble. Esto es,
$$\mathcal{C}(\omega_P) \equiv (-2x_0 - x_2 + x_3)^2 = 0.$$
En cambio, si consideramos el punto $A = (1, 2, 0, 0)$, la cuádrica tangente $\mathcal{C}(\omega_A)$ desde A será degenerada con un único punto singular A y vendrá dada por
$$\mathcal{C}(\omega_A) \equiv (-2x_0 + 2x_1)^2 - 2(-2x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0 \equiv 4x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 4x_0x_1 = 0.$$

3.3. $n + 1$-vértices autoconjugados.

Definición 3.16. Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ definida en un espacio proyectivo de dimensión n, P_0, P_1, ... P_n forman un $n + 1$-*vértice autoconjugado* respecto de la variedad cuadrática, si son independientes y, además, son conjugados dos a dos. Esto es, $f(\vec{p_i}, \vec{p_j}) = 0$, para todo $i, j = 0, 1, \ldots, n$, con $i \neq j$.

Proposición 3.17. *Los puntos básicos de una referencia proyectiva $\mathcal{R}$ del espacio $\mathcal{P}(V)$ forman un $n+1$-vértice autoconjugado respecto de una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ si y sólo si la ecuación de la variedad cuadrática respecto de dicha referencia es $a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 = 0$. En tal caso la referencia $\mathcal{R}$ se dice que es autoconjugada.*

Demostración. Si $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \ldots, P_n; P\}$ es una referencia proyectiva del espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ tal que P_0, P_1, ... , P_n es un $n + 1$-vértice autoconjugado respecto de una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$. Puesto que $f(\vec{p}_i, \vec{p}_j) = 0$, para $i \neq j$, la ecuación de la variedad cuadrática con respecto a $\mathcal{R}$ es

$$a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 = 0.$$

Recíprocamente, si para una referencia $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \ldots, P_n; P\}$ tenemos para la variedad cuadrática una ecuación como la anterior, entonces $f(\vec{p}_i, \vec{p}_j) = 0$, para $i \neq j$. Por tanto, los puntos básicos de la referencia forman un $n+1$-vértice autoconjugado. $\square$

Si P_0, P_1, $\ldots$, P_n es un $n+1$-*vértice autoconjugado* respecto de la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$, podemos elegir vectores $\vec{p}_i$ que definan P_i tales que $\omega(\vec{p}_i) = \pm 1$ ó 0. En efecto, si $\omega(\vec{p}_i') = \pm a_i^2 \neq 0$, tomamos $\vec{p}_i = \dfrac{1}{a_i}\vec{p}_i'$ como representante de P_i. La referencia proyectiva $\{P_0, P_1, \ldots, P_n; \langle \vec{p}_0 + \vec{p}_1 + \cdots + \vec{p}_n\rangle\}$ se denomina *referencia canónica de la variedad cuadrática*. Para esta referencia la ecuación de la variedad cuadrática es

$$\xi_0 x_0^2 + \xi_1 x_1^2 + \cdots + \xi_n x_n^2 = 0,$$

donde $\xi_i = \pm 1$ ó 0, esta ecuación se denomina *ecuación canónica* de la variedad cuadrática.

Ejemplo 3.18. En el espacio proyectivo tridimensional y respecto de una cierta referencia $\mathcal{R} = \{U_0, U_1, U_2, U_3; U\}$, se considera la cuádrica dada por

$$\mathcal{C}(\omega) \equiv -2x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Como la ecuación de $\mathcal{C}(\omega)$ sólo tiene términos cuadráticos, los puntos básicos U_0, U_1, U_2, U_3 forman un 4-vértice autoconjugado. Sin embargo, la referencia $\mathcal{R}$ no es canónica. Para obtener una referencia canónica de la cuádrica se toma una base normalizada $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathcal{R}$. A continuación, se consideran los vectores

$$\{\tfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$$

que son una base normalizada de una referencia canónica de la cuádrica

$$\{U_0, U_1, U_2, U_3; \langle \tfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_0 + \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\rangle\}.$$

La ecuación canónica de la cuádrica dada es $\mathcal{C}(\omega) \equiv -(x_0')^2 + (x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2 = 0$.

Ejemplo 3.19. Para una cierta referencia proyectiva $\mathcal{R} = \{U_0, U_1, U_2, U_3; U\}$, una cuádrica está dada por $\mathcal{C}(\omega) \equiv 2x_0^2 + 2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 4x_0x_1 = 0$. Deseamos encontrar un 4-vértice autoconjugado respecto de ella. Para construirlo, comenzamos con un punto P_0 que no pertenezca a $\mathcal{C}(\omega)$. Por ejemplo, $P_0 = U_0$ de coordenadas $(1, 0, 0, 0)$ respecto de $\mathcal{R}$. Su hiperplano polar es $\widetilde{f}(P_0) \equiv x_0 - x_1 = 0$. Tomamos ahora un punto P_1 de $\widetilde{f}(P_0)$ que no esté en $\mathcal{C}(\omega)$. Sea $P_1 = U_2$ de coordenadas $(0, 0, 1, 0)$ respecto de $\mathcal{R}$. Su hiperplano polar es $\widetilde{f}(P_1) \equiv x_2 = 0$. El punto P_2 lo tomamos en $\widetilde{f}(P_0) \cap \widetilde{f}(P_1)$ y de modo que no esté en $\mathcal{C}(\omega)$. Sea $P_2 = U_3$ de coordenadas $(0, 0, 0, 1)$ respecto de $\mathcal{R}$. Su hiperplano polar es $\widetilde{f}(P_2) \equiv x_3 = 0$. El punto P_3 necesariamente tiene que ser $P_3 = \widetilde{f}(P_0) \cap \widetilde{f}(P_1) \cap \widetilde{f}(P_2)$ con coordenadas $(1, 1, 0, 0)$ respecto de $\mathcal{R}$. Un 4-vértice autoconjugado es $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$. Nótese que la cuádrica es de rango 3. Por eso, únicamente tres P_0, P_1, P_2 de los cuatro vértices no están en $\mathcal{C}(\omega)$. El cuarto vértice, $P_3(1, 1, 0, 0)$, es el punto singular de $\mathcal{C}(\omega)$. Una referencia proyectiva autoconjugada es $\{P_0, P_1, P_2, P_3; U'(2, 1, 1, 1)\}$. Para esta referencia , la cuádrica está dada por $\mathcal{C}(\omega) \equiv 2(x_0')^2 - (x_1')^2 - (x_2')^2 = 0$.

Un referencia proyectiva canónica es $\{P_0, P_1, P_2, P_3; U''(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, 1, 1, 1)\}$. La correspondiente ecuación canónica es $\mathcal{C}(\omega) \equiv (x_0'')^2 - (x_1'')^2 - (x_2'')^2 = 0$.

3.4. Proyectividad inducida por una variedad cuadrática en una recta no tangente.

Sea r una recta de $\mathcal{P}(V)$ no tangente a la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$. Dicha recta no puede contener un punto singular, pues en tal caso verificaría la condición de tangencia. Por tanto, $r \subseteq \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker \hat{f})$, donde $\hat{f}$ es la aplicación de polaridad de ω. Si $X \in r$, entonces tiene sentido considerar su hiperplano polar $\widetilde{f}(X)$. Además, $r \not\subseteq \widetilde{f}(X)$. Pues, en caso contrario, para todo $Y \in r$, se tendría $f(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Por consiguiente,

$$f(\vec{x}, \vec{y})^2 - \omega(\vec{x})\omega(\vec{y}) = 0 - 0 = 0.$$

Resultando que r es tangente, contradicción. Del hecho $r \not\subseteq \widetilde{f}(X)$, se tiene que $r \cap \widetilde{f}(X)$ es un punto.

Proposición 3.20. *Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ y una recta r no tangente a ella. La aplicación $\varphi : r \to r$ dada por $\varphi(X) = r \cap \widetilde{f}(X)$, donde $\widetilde{f}$ es la polaridad de $\mathcal{C}(\omega)$, es una proyectividad biyectiva de r en si misma, denominada* proyectividad inducida *por $\mathcal{C}(\omega)$ en r. Los puntos dobles de φ son $r \cap \mathcal{C}(\omega)$.*

Como r es no tangente, si φ tiene puntos dobles, entonces necesariamente hay dos. Es decir, r es secante y $r \cap \mathcal{C}(\omega) = \{\text{dos puntos}\}$.

Demostración. Consideramos en r la referencia $\{P = \langle\vec{p}\rangle, Q = \langle\vec{q}\rangle\, ; \langle\vec{p} + \vec{q}\rangle\}$. Por tanto, se tiene $\{\vec{p}, \vec{q}\}$ es una base normalizada con respecto a dicha referencia de r. Sea $X = \langle\lambda_0\vec{p} + \lambda_1\vec{q}\rangle$ un punto cualquiera de la recta r. Supongamos que $\varphi(X) = \langle\mu_0\vec{p} + \mu_1\vec{q}\rangle$, entonces

$$f(\lambda_0\vec{p} + \lambda_1\vec{q}, \mu_0\vec{p} + \mu_1\vec{q}) = 0.$$

Por tanto,

$$\mu_1(\lambda_0\omega(\vec{p}) + \lambda_1 f(\vec{p}, \vec{q})) + \mu_0(\lambda_0 f(\vec{p}, \vec{q}) + \lambda_1\omega(\vec{q})) = 0.$$

De donde se deduce que el par (μ_0, μ_1) es proporcional al par $(\lambda_0 f(\vec{p}, \vec{q}) + \lambda_1\omega(\vec{q}), -\lambda_0\omega(\vec{p}) - \lambda_1 f(\vec{p}, \vec{q}))$. Luego se tiene la ecuación matricial

$$\rho\begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\vec{p}, \vec{q}) & \omega(\vec{q}) \\ -\omega(\vec{p}) & -f(\vec{p}, \vec{q}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente, la aplicación φ es una proyectividad biyectiva, puesto que el determinante de una matriz asociada es igual a $-f(\vec{p}, \vec{q})^2 + \omega(\vec{p})\omega(\vec{q}) \neq 0$.

Además, si $\varphi(X) = X$, se tiene que $\{X\} = r \cap \widetilde{f}(X)$. Como X está en su hiperplano polar $\widetilde{f}(X)$, X pertenece a la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$. Recíprocamente, si $X \in r \cap \mathcal{C}(\omega)$, entonces $\varphi(X) = r \cap \widetilde{f}(X) = X$. □

Proposición 3.21. *La proyectividad φ inducida por una variedad cuadrática sobre una recta r no tangente es una involución. Además, si r es secante con $r \cap \mathcal{C}(\omega) = \{A, B\}$ y $\varphi(X) = X'$, con $X \neq X'$, entonces $(ABXX') = -1$.*

Demostración. Considerando la matriz asociada a φ obtenida en la demostración de la proposición anterior, tiene que

$$\begin{pmatrix} f(\vec{p},\vec{q}) & \omega(\vec{q}) \\ -\omega(\vec{p}) & -f(\vec{p},\vec{q}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(\vec{p},\vec{q}) & \omega(\vec{q}) \\ -\omega(\vec{p}) & -f(\vec{p},\vec{q}) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} f(\vec{p},\vec{q})^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{q}) & 0 \\ 0 & f(\vec{p},\vec{q})^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{q}) \end{pmatrix}.$$

De donde se deduce que $\varphi \circ \varphi$ es igual a la identidad.

Para ver que $(ABXX') = -1$. Consideramos en r la referencia $\{A = \langle\vec{a}\rangle, B = \langle\vec{b}\rangle; \langle\vec{a} + \vec{b}\rangle\}$. Para esta referencia una matriz asociada a φ es

$$\begin{pmatrix} f(\vec{a},\vec{b}) & 0 \\ 0 & -f(\vec{a},\vec{b}) \end{pmatrix}.$$

Por tanto, si $X = \langle\lambda_0\vec{a} + \lambda_1\vec{b}\rangle$, entonces $X' = \varphi(X) = \langle\lambda_0\vec{a} - \lambda_1\vec{b}\rangle$. Además, como $X \neq X'$, $\lambda_0 \neq 0$ y $\lambda_1 \neq 0$. Luego

$$(ABXX') = \frac{\lambda_0}{\lambda_0} : \frac{-\lambda_1}{\lambda_1} = -1.$$

□

Ejemplo 3.22. En el plano proyectivo, consideramos la cónica $\mathcal{C}(\omega) \equiv -x_0^2 + 2x_1x_2 = 0$ y la recta $r \equiv x_0 + x_1 - x_2 = 0$. Si tomamos los puntos $P(1,-1,0)$ y $Q(0,1,1)$ de r, se obtiene que $f(\vec{p},\vec{q}) = -1$, $\omega(\vec{p}) = -1$ y $\omega(\vec{q}) = 2$. Por lo que $\Delta = 3 > 0$, la recta r es secante a la cónica. Para la referencia de r dada por $\{P, Q; \langle\vec{p}+\vec{q}\rangle = \langle(1,0,1)\rangle\}$, se obtiene la ecuación de la proyectividad de r en r

$$\rho \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Los puntos dobles satisfacen $\rho\lambda_0 = -\lambda_0 + 2\lambda_1$ y $\rho\lambda_1 = \lambda_0 + \lambda_1$. Esto es, $0 = \lambda_0^2 + 2\lambda_0\lambda_1 - 2\lambda_1^2 = (\lambda_0 + \lambda_1)^2 - 3\lambda_1^2$. De ahí que $(\lambda_0, \lambda_1) = \rho(1 - \sqrt{3}, -1)$ y $(\lambda_0, \lambda_1) = \rho(1 + \sqrt{3}, -1)$. Los puntos dobles son $A = (1 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}, -1)$ y $B = (1 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}, -1)$.

El punto $X(-1,3,2)$ de r tiene $(-1,2)$ como coordenadas en r y le corresponde el punto $\varphi(X)$ con coordenadas $(5,1)$ en r. Esto es, $\varphi(X) = (5,-4,1)$. Comprobamos que

$$(ABX\varphi(X)) = \frac{(1-\sqrt{3})2 - (-1)(-1)}{(1+\sqrt{3})2 - (-1)(-1)} : \frac{(1-\sqrt{3})5 - (-1)1}{(1+\sqrt{3})5 - (-1)1} = \frac{-11\sqrt{3}}{11\sqrt{3}} = -1.$$

3.5. Variedades cuadráticas tangenciales.

En este apartado, únicamente consideraremos variedades cuadráticas de un espacio proyectivo de dimensión mayor o igual que 2.

Si $\mathcal{C}(\omega)$ es una variedad cuadrática ordinaria, su polaridad $\widetilde{f} : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V^*)$ es biyectiva. Como el espacio vectorial V se puede considerar como el espacio dual de V^*, podemos considerar la aplicación inversa $\widetilde{f}^{-1} : \mathcal{P}(V^*) \to \mathcal{P}(V)$ como la polaridad de una variedad cuadrática en $\mathcal{P}(V^*)$.

Sea $\mathcal{R} = \{E_0, \ldots, E_n; E\}$ una referencia proyectiva de $\mathcal{P}(V)$ y $\{\vec{e}_0, \ldots, \vec{e}_n\}$ una base normalizada de $\mathcal{R}$. Entonces en $\mathcal{P}(V^*)$ se tiene la referencia $\mathcal{R}^* = \{E_0^*, \ldots, E_n^*; E^*\}$, denominada *dual* de $\mathcal{R}$, tal que el conjunto formado por $\{\vec{e}_0^*, \ldots, \vec{e}_n^*\}$, duales de $\{\vec{e}_0, \ldots, \vec{e}_n\}$, constituyen una base normalizada de $\mathcal{R}^*$.

Si A es la matriz asociada a $\mathcal{C}(\omega)$ respecto de $\mathcal{R}$, entonces la polaridad $\widetilde{f}$ viene matricialmente dada por $\rho U = AX$ con respecto a las referencias $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^*$. Por consiguiente, la proyectividad $\widetilde{f}^{-1}$ tiene la expresión matricial $\rho X = A^{-1}U$ respecto de las mismas referencias. Asimismo, $\widetilde{f}^{-1}$ es la polaridad de la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega^*)$ en $\mathcal{P}(V^*)$, donde ω^* es la forma cuadrática sobre V^* matricialmente dada por $\omega^*(u) = U^t A^{-1} U$ respecto de la base $\{\vec{e}_0^*, \ldots, \vec{e}_n^*\}$. Como $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}(A_{ij})$, donde (A_{ij}) es la matriz adjunta, podemos considerar como forma cuadrática $\omega^* : V^* \to \mathbb{R}$, dada por $\omega^*(U) = U^t(A_{ij})U$ y $\mathcal{C}(\omega^*)$ la variedad cuadrática correspondiente en $\mathcal{P}(V^*)$. Mostraremos que los elementos de $\mathcal{C}(\omega^*)$ son los hiperplanos tangentes a la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$. Esto justifica la siguiente definición.

Definición 3.23. Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ y A es la matriz asociada a la forma cuadrática ω sobre V. Si la matriz adjunta (A_{ij}) es no nula, a la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega^*) = \{U \in \mathcal{P}(V^*) \mid U^t(A_{ij})U = 0\}$, se denomina *variedad cuadrática tangencial* de $\mathcal{C}(\omega)$.

Proposición 3.24. *Si $\mathcal{C}(\omega)$ es una variedad cuadrática ordinaria, entonces $\mathcal{C}(\omega^*)$ es igual al conjunto de hiperplanos tangentes a $\mathcal{C}(\omega)$.*

Demostración. Si $U \in \mathcal{C}(\omega^*)$, entonces $U^t(A_{ij})U = 0$. El polo del hiperplano U es el punto P tal que $\rho U = AP$. Lo que implica que

$$U^t P = \rho U^t A^{-1} U = \frac{\rho}{\det(A)} U^t (A_{ij}) U = 0.$$

Por tanto, $P \in U$, siendo P conjugado a todos los puntos de U. Luego U es hiperplano tangente a $\mathcal{C}(\omega)$.

Recíprocamente, si U es hiperplano tangente a $\mathcal{C}(\omega)$, entonces hay un $P = \langle \vec{p} \rangle \in U$ tal que $f(\vec{p}, \vec{x}) = 0$, para todo $X = \langle \vec{x} \rangle \in U$. Como la variedad cuadrática es ordinaria, entonces U es el hiperplano polar de P y $P \in \mathcal{C}(\omega)$. Por tanto, $\rho U = AP$ y $P^t AP = 0$.

Veamos que $U \in \mathcal{C}(\omega^*)$. En efecto,

$$\rho U^t (A_{ij}) \rho U = P^t A^t (A_{ij}) AP = \det(A) P^t AP = 0.$$

□

Lema 3.25. *Supongamos que la dimensión de V es $n+1$ y sea $\omega^* : V^* \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática dada por $\omega^*(U) = U^t(A_{ij})U$, donde (A_{ij}) es la matriz adjunta de una matriz asociada a ω. Entonces ω^* es no nula si y sólo si el rango de ω es mayor o igual que n. Por tanto, las variedades cuadráticas $\mathcal{C}(\omega)$ que tiene su correspondiente variedad cuadrática tangencial $\mathcal{C}(\omega^*)$ son aquellas que a lo sumo tienen un único punto singular.*

Demostración. Si ω^* es no nula, entonces (A_{ij}) es no nula. Por tanto, la matriz A tiene algún adjunto no nulo, lo que implica que el rango de A es mayor o igual que n. Lo recíproco se sigue de modo inmediato. □

Un resultado más general que el referido a las variedades cuadráticas ordinarias es el siguiente.

Proposición 3.26. *Si $\mathcal{C}(\omega)$ es una variedad cuadrática con un punto singular a lo sumo, entonces $\mathcal{C}(\omega^*)$ es igual al conjunto de hiperplanos tangentes a $\mathcal{C}(\omega)$.*

Demostración. Si $U \in \mathcal{C}(\omega^*)$, entonces $U^t(A_{ij})U = 0$.

Si $(A_{ij})U$ es una matriz columna no nula, podemos considerar el punto P de coordenadas homogéneas $(A_{ij})U$. Entonces $U^tP = U^t(A_{ij})U = 0$. Esto es, $P \in U$, y para todo X de U, $U^tX = X^tU = 0$, se tiene que

$$X^tAP = X^tA(A_{ij})U = \det(A)X^tU = 0.$$

Por tanto, U es un hiperplano tangente $\mathcal{C}(\omega)$.

Si $(A_{ij})U$ es una matriz columna nula, entonces U es un punto singular de $\mathcal{C}(\omega^*)$. Por tanto, la matriz (A_{ij}) es no regular. Como se tiene la igualdad $(A_{ij})A = \det(A)I_{n+1}$, donde I_{n+1} es la matriz identidad, ello implica que la matriz A es también no regular. Por consiguiente, $\mathcal{C}(\omega)$ es degenerada con un único punto singular Q. El hecho de que $(A_{ij})U$ sea nula significa que $\sum_{j=0} A_{ij}u_j = 0$, para $i = 0, \ldots, n$. Pero estas sumas son los desarrollos de determinantes de matrices obtenidas a partir de A sustituyendo la fila i por la matriz fila $U^t = (u_0, \ldots, u_n)$. Esto es,

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ .. & .. & \ldots & .. \\ u_0 & u_1 & \ldots & u_n \\ .. & .. & \ldots & .. \\ a_{n0} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

estando U^t situada como fila i y para $i = 0, \ldots, n$. Si las filas i_1, i_2, $\ldots$, i_n de A son sus filas principales, esto es, determinan su rango, que es n, entonces

$$U^t = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (a_{i_j\,0}, a_{i_j\,1}, \ldots, a_{i_j\,n}).$$

Como Q es singular, se tiene que AQ es la matriz columna nula. Esto es, $a_{i0}q_0 + a_{i1}q_1 + \cdots + a_{in}q_n = 0$, siendo $Q^t = (q_0, q_1, \ldots, q_n)$. Teniendo esto en cuenta,

$$U^tQ = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (a_{i_j0}q_0 + a_{i_j1}q_1 + \cdots + a_{i_jn}q_n) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot 0 = 0.$$

Luego $Q \in U$ y se sigue que U es un hiperplano tangente ya que contiene un punto singular.

Veamos el recíproco. Sea U un hiperplano tangente a $\mathcal{C}(\omega)$, entonces existe un punto $Q = \langle \vec{q} \rangle$ de $U \cap \mathcal{C}(\omega)$ tal que $f(\vec{q}, \vec{x}) = 0$, para todo $X = \langle \vec{x} \rangle \in U$.

Si Q no es singular, entonces U es el hiperplano polar de Q. Por tanto, $\rho U = AQ$ y se tiene que $\rho U^t(A_{ij})\rho U = Q^tA^t(A_{ij})AQ = \det(A)Q^tAQ = 0$. Luego $U \in \mathcal{C}(\omega^*)$.

Si Q es singular, teniendo en cuenta que la imagen de la polaridad $\widetilde{f}$ está formada por los hiperplanos que contienen los puntos singulares, entonces U es el hiperplano polar de un punto P no singular, ya que $Q \in U$. Lo que implica $\rho U = AP$ y, además,

$$\rho U^t(A_{ij})\rho U = P^tA^t(A_{ij})AP = \det(A)P^tAP = 0.P^tAP = 0.$$

Por tanto, $U \in \mathcal{C}(\omega^*)$. □

Observación 3.27. Si la dimensión del subespacio proyectivo de puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega)$ es mayor o igual que 1, todo hiperplano tiene al menos un punto singular. Luego todo hiperplano es tangente. Por otro lado, el rango de la forma cuadrática es menor o igual que $n - 1$, por lo que la matriz adjunta es nula. En esta situación, no tiene sentido hablar de la variedad cuadrática tangencial.

Ejemplo 3.28. En el plano proyectivo, si se considera la cónica $\mathcal{C}(\omega) \equiv x_0^2 + x_2^2 + 2x_0x_1 = 0$, la correspondiente cónica tangencial está dada por $\mathcal{C}(\omega^*) \equiv u_1^2 - u_2^2 - 2u_0u_1 = 0$.

Ejemplo 3.29. En el espacio proyectivo tridimensional $\mathcal{P}(\mathbb{R}^4)$, sea la cuádrica $\mathcal{C}(\omega) \equiv 4x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 4x_0x_1 = 0$. Es una cuádrica degenerada con un único punto singular $Q(1, 2, 0, 0)$. Su cuádrica tangencial es $\mathcal{C}(\omega^*) \equiv u_0^2 + 4u_1^2 + 4u_0u_1 = 0$. Está formada por los planos que contienen a Q. Como cuádrica, es un hiperplano doble $(u_0 + 2u_1)^2 = 0$ del espacio proyectivo dual $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{4*})$.

3.6. Apéndice II: Cuádricas ordinarias regladas.

Definición 3.30. Se dice que una cuádrica es *reglada*, cuando está formada por rectas.

Veamos ahora, cuándo una cuádrica ordinaria es reglada.

Si su ecuación canónica es

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

como no contiene ningún punto real, no puede contener rectas.

Si su ecuación canónica es

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,$$

cortando con el plano $x_3 = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 &= 0, \\ x_3 &= 0, \end{aligned}$$

que no tiene solución en el espacio proyectivo. Por tanto, como una recta y un plano siempre tienen un punto en común, la cuádrica no puede contener una recta ya que entonces contendría al punto de intersección de esa recta con el plano $x_3 = 0$.

Si la ecuación es

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0,$$

entonces $(x_0+x_2)(x_0-x_2) = (x_3+x_1)(x_3-x_1)$. Por tanto, el par (x_0+x_2, x_3-x_1) es proporcional al par (x_3+x_1, x_0-x_2). Asimismo, el par (x_0+x_2, x_3+x_1) es proporcional al par (x_3-x_1, x_0-x_2).

Recordamos, que dos pares de números (a, b) y (c, d) son proporcionales si y sólo si existe $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tal que $\lambda(a, b) = \mu(c, d)$.

Luego, hay dos familias de rectas que están contenidas en la cuádrica. Por un lado, las rectas, que denominamos familia (I),

$$\begin{aligned} \lambda(x_0 + x_2) + \mu(x_3 + x_1) &= 0, \\ \mu(x_0 - x_2) + \lambda(x_3 - x_1) &= 0, \end{aligned}$$

donde $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Y por otro, las rectas, que denominamos familia (II),

$$\begin{aligned} \alpha(x_0 + x_2) + \beta(x_3 - x_1) &= 0, \\ \beta(x_0 - x_2) + \alpha(x_3 + x_1) &= 0, \end{aligned}$$

donde $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Por tanto, si la signatura es $(2, 2)$, hay dos familias de rectas formando parte de la cuádrica.

Lema 3.31. *Una recta de la familia (I) y una recta de la familia (II) siempre se cortan en un único punto.*

Demostración. Sean las rectas

$$\begin{aligned} \lambda(x_0+x_2)+\mu(x_3+x_1) &= 0, \\ \mu(x_0-x_2)+\lambda(x_3-x_1) &= 0, \end{aligned}$$

donde $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$, y

$$\begin{aligned} \alpha(x_0+x_2)+\beta(x_3-x_1) &= 0, \\ \beta(x_0-x_2)+\alpha(x_3+x_1) &= 0, \end{aligned}$$

donde $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$. Considerando la matriz asociada del sistema formado por las cuatro ecuaciones se tiene que

$$\text{rango}\begin{pmatrix} \lambda & \mu & \lambda & \mu \\ \mu & -\lambda & -\mu & \lambda \\ \alpha & -\beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda \\ \alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Puesto que si C_1, C_2, C_3 y C_4 son las columnas de la primera matriz, entonces $\frac{1}{2}(C_1+C_3)$, $\frac{1}{2}(C_2+C_4)$, $\frac{1}{2}(C_3-C_1)$ y $\frac{1}{2}(C_4-C_2)$ son las columnas de la segunda matriz. Es fácil ver que el determinante de la segunda matriz es nulo y considerando los siguientes menores de orden 3 de la segunda matriz:

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \\ \alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\alpha\mu^2, \qquad \begin{vmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{vmatrix} = -\beta\mu^2,$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & \lambda \\ 0 & -\beta & 0 \end{vmatrix} = \beta\lambda^2, \qquad \begin{vmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \alpha & 0 \end{vmatrix} = -\alpha\lambda^2.$$

Si todos estos menores fuesen igual a cero, entonces $(\alpha,\beta)=(0,0)$, contradicción. Luego el rango de la matriz asociada del sistema es 3, por lo que la intersección de las dos rectas es un punto. □

Lema 3.32. *Dos rectas distintas de una misma familia tienen intersección vacía.*

Demostración. Sean, por ejemplo, dos rectas de la familia (I):

$$\begin{aligned} \lambda(x_0+x_2)+\mu(x_3+x_1) &= 0, \\ \mu(x_0-x_2)+\lambda(x_3-x_1) &= 0, \end{aligned}$$

donde $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$, y

$$\begin{aligned} \lambda_0(x_0+x_2)+\mu_0(x_3+x_1) &= 0, \\ \mu_0(x_0-x_2)+\lambda_0(x_3-x_1) &= 0, \end{aligned}$$

donde $(\lambda_0, \mu_0) \neq (0,0)$. Considerando el sistema formado por las cuatro ecuaciones y calculando el determinante de la matriz asociada obtenemos

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \lambda & \mu \\ \mu & -\lambda & -\mu & \lambda \\ \lambda_0 & \mu_0 & \lambda_0 & \mu_0 \\ \mu_0 & -\lambda_0 & -\mu_0 & \lambda_0 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ \mu & -\lambda & -\mu & \lambda \\ \lambda_0 & \mu_0 & 0 & 0 \\ \mu_0 & -\lambda_0 & -\mu_0 & \lambda_0 \end{vmatrix} = -4(\mu\lambda_0 - \lambda\mu_0)^2.$$

Luego las dos rectas tienen intersección si y sólo si $\mu\lambda_0 - \lambda\mu_0 = 0$. Ello sucede sólo cuando (λ_0, μ_0) es proporcional a (λ, μ). Por consiguiente, las dos rectas son distintas si y sólo si el determinante de la matriz asociada al sistema es distinto de cero. En tal caso, las dos rectas son disjuntas.

Para dos rectas de la familia (II), la demostración es similar. □

Lema 3.33. *Dada una cuádrica ordinaria reglada $\mathcal{C}(\omega)$ y P un punto de la cuádrica, entonces existe una única recta de cada familia, (I) y (II), que pasa por P.*

Demostración. En efecto, sea la cuadrica ordinaria reglada $\mathcal{C}(\omega) \equiv x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ y $P = (p_0, p_1, p_2, p_3) \in \mathcal{C}(\omega)$. Consideremos una recta de la familia (I)

$$\begin{aligned} \lambda(x_0 + x_2) + \mu(x_3 + x_1) &= 0, \\ \mu(x_0 - x_2) + \lambda(x_3 - x_1) &= 0. \end{aligned}$$

Para que esta recta pase por P, se tiene que satisfacer

$$\begin{aligned} \lambda(p_0 + p_2) + \mu(p_3 + p_1) &= 0, \\ \mu(p_0 - p_2) + \lambda(p_3 - p_1) &= 0. \end{aligned}$$

Esto ocurrirá cuando el par (λ, μ) sea proporcional a $(p_0 - p_2, p_1 - p_3)$ ó a $(p_1 + p_3, -(p_0 + p_2))$. Uno al menos de estos dos últimos pares es distinto de $(0,0)$. Luego uno al menos de los siguientes pares de ecuaciones

$$\begin{aligned} (p_0 - p_2)(x_0 + x_2) + (p_1 - p_3)(x_3 + x_1) &= 0, \\ (p_1 - p_3)(x_0 - x_2) + (p_0 - p_2)(x_3 - x_1) &= 0, \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned} (p_1 + p_3)(x_0 + x_2) - (p_0 + p_2)(x_3 + x_1) &= 0, \\ -(p_0 + p_2)(x_0 - x_2) + (p_1 + p_3)(x_3 - x_1) &= 0, \end{aligned}$$

representa una recta de la familia (I) que pasa por P. Una tal recta es única, pues dos rectas distintas de la familia (I) son disjuntas.

Análogamente, para la familia (II) se llega a los pares de ecuaciones

$$\begin{aligned} (p_1 - p_3)(x_0 + x_2) + (p_0 + p_2)(x_3 - x_1) &= 0, \\ (p_0 + p_2)(x_0 - x_2) + (p_1 - p_3)(x_3 + x_1) &= 0, \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned} (p_2 - p_0)(x_0 + x_2) + (p_3 + p_1)(x_3 - x_1) &= 0, \\ (p_3 + p_1)(x_0 - x_2) + (p_2 - p_0)(x_3 + x) &= 0, \end{aligned}$$

donde al menos uno de ellos representa una recta de la familia (II) que pasa por P. Asimismo, una tal recta es única, pues dos rectas distintas de la familia (II) son disjuntas. □

Estos últimos resultados permite concebir una cuádrica ordinaria reglada como formada por las rectas de una cualquiera de las dos familias de rectas, (I) ó (II).

Definición 3.34. Las rectas de cada una de las dos familias, (I) y (II), se denominan *generatrices rectilíneas* de la cuádrica ordinaria reglada.

Según se ha mostrado, por cada punto de la cuádrica reglada pasan dos generatrices, una por cada familia.

Lema 3.35. *Dada una cuádrica ordinaria reglada $\mathcal{C}(\omega)$ y P un punto cualquiera de ella, entonces el plano π que contiene a las dos generatrices r y s que pasan por P coincide con el plano polar de P. Además, $\pi \cap \mathcal{C}(\omega) = r.s$ y π^2 es la cuádrica tangente desde P a $\mathcal{C}(\omega)$.*

Demostración. Sabemos $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es una cónica degenerada porque contiene las rectas r y s. P es punto singular de dicha cónica, porque P es el punto común de las dos rectas. Luego todos los puntos de π son puntos conjugados de P. Lo que implica $\pi \cap \mathcal{C}(\omega) = r.s$ y π es el plano polar de P. □