Autor: Francisco Martín Cabrera, Departamento Matemática Fundamental, Universidad de La Laguna, Islas Canarias, España

3.7. Ejercicios.

Observación 3.36. La siguiente lista contiene algunos ejercicios que plantean problemas de variedades cuadráticas en el espacio afín E. Dichos ejercicios están aquí inluidos porque los conceptos involucrados no son puramente afines. En realidad, tales ejercicios únicamente involucran conceptos proyectivos, considerando las variedades cuadráticas en el espacio proyectivo $\mathcal{P}(V) = E \cup H_\infty$, donde H_∞ es el hiperplano del infinito.

Si $\{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ es una referencia afín de E, entonces $\{O, \langle\vec{e}_1\rangle, \dots, \langle\vec{e}_n\rangle; O + (\vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n)\}$ es una referencia proyectiva de $\mathcal{P}(V)$ con la relación usual entre coordenadas afines y coordenadas homogéneas. El hiperplano H_∞ admite por ecuación $x_0 = 0$ con respecto a dicha referencia proyectiva.

1. En el plano afín y respecto de una referencia afín, considérese la cónica dada por la ecuación:
$$2 + x^2 - y^2 + 2xy = 0,$$
y el punto $P(1,1)$. Se pide:
   a) Dar la ecuación de la polaridad de la cónica.
   b) Hallar los puntos singulares.
   c) La recta polar de P respecto de la cónica.
   d) Hallar in 3-vertice autoconjugado, una referencia proyectiva autoconjugada y una referencia canónica de $\mathcal{C}(\omega)$. Para dichas referencias, dar las correspondientes ecuaciones de la cónica.
   e) Clasificar la cónica desde el punto de vista proyectivo.
   f) Las tangentes desde P a la cónica.
   g) Comprobar que la recta del infinito r_∞ es no tangente. Tomando los puntos $A(0,1,0)$ y $B(0,0,1)$ y la referencia proyectiva $\{A, B; (0,1,1)\}$ de r_∞, dar la ecuación de la proyectiva inducida en r_∞ por la cónica.
   h) La cónica tangencial correspondiente (caso que la tuviere).
2. En el espacio afín y respecto de una referencia afín, considérese la cuádrica $\mathcal{C}(\omega)$ que admite por ecuación:
$$1 + x^2 + 2y^2 - 9z^2 + 2x + 4yz = 0.$$
Se pide:
   a) Clasificar $\mathcal{C}(\omega)$.
   b) Ecuación general de todas las rectas tangentes a $\mathcal{C}(\omega)$ paralelas a $\vec{v}(3,0,1)$ de ella. Estudiar si alguna de ellas está contenida en $\mathcal{C}(\omega)$ (nótese que $\vec{v}(3,0,1)$ define un punto que está en la cuádrica).

c) Plano polar del punto $P(1,0,0)$ respecto de $\mathcal{C}(\omega)$.
d) Cuádrica tangente desde P a $\mathcal{C}(\omega)$.
e) Hallar la cuádrica tangencial de $\mathcal{C}(\omega)$.
f) Estudiar la intersección de $\mathcal{C}(\omega)$ con el plano del infinito $\pi_\infty \equiv x_0 = 0$.

3. Hallar las ecuaciones de las tangentes desde el origen a la cónica
$$y^2 - 2xy + 2y - 4x - 2 = 0.$$
4. Hallar la ecuación del cono de vértice $(4,-2,4)$ circunscrito a la cuádrica $x^2+3y^2+3z^2-9 = 0$.
5. En el plano afín y respecto de una referencia afín, considérese la cónica $\mathcal{C}$ de ecuación:
$$x^2 - 2y^2 + 2xy + 2x - 4y + 1 = 0.$$
Hállese un paralelogramo circunscrito a $\mathcal{C}$ cuyos lados tengan las direcciones de los vectores $\vec{a}(1,0)$ y $\vec{b}(1,1)$.
6. En el espacio afín y respecto de una referencia cartesiana, considérese la cuádrica que admite por ecuación:
$$\mathcal{C}(\omega) \equiv 3x + z - 4yz + 8y + 3 = 0.$$
(i) Hállese el cilindro circunscrito a dicha cuádrica cuyas generatrices tienen la dirección del vector $\vec{a}(0,1,4)$.
(ii) Determínese el plano en el que está situada la cónica de tangencia de la cuádrica y el cilindro.
(iii) Comprobar que la cuádrica dada es ordinaria reglada. Dar las dos familias de generatrices rectilíneas.
(iv) Hallar las generatrices rectilíneas que pasan por el punto de $\mathcal{C}(\omega)$ determinado por el vector $\vec{b}(1,0,0)$. Hallar el plano tangente a $\mathcal{C}(\omega)$ en dicho punto.
(v) Hallar las generatrices rectilíneas que pasan por el punto $C(-\frac{8}{3},1,1)$ de $\mathcal{C}(\omega)$. Hallar el plano tangente a $\mathcal{C}(\omega)$ en C.
(vi) Dar un 4-vértice autocnjugado, una referencia proyectiva canónica y la ecuación canónica de $\mathcal{C}(\omega)$ correspondiente.
7. En el plano afín y respecto de una referencia afín, considérese la cónica dada por la ecuación:
$$1 - 3x^2 + 2y^2 + 4y = 0.$$
(i) Hállar el trivértice autoconjugado respecto de dicha cónica que tenga un vértice en el punto $(-1,0)$ y otro esté situado en la recta de ecuación:
$$r \equiv 1 + 2x + y = 0.$$
(ii) Dar una referencia proyectiva para cual se obtenga la ecuación canónica de la cónica.
(iii) Hallar la ecuación de la proyectividad φ inducida por la cónica en la recta r respecto de alguna referencia de r.
(iv) Hallar los puntos dobles de φ.
8. Determinar una cónica que pasa por el punto $A(2,0)$, la recta $r \equiv -1 + x + 2y = 0$ es asíntota a ella (tangente a ella en el punto del infinito $(0,2,-1)$) y la recta $s \equiv 2+2x-y = 0$ también es asíntota. (una recta propia se dice que es asíntota a una cónica, si es tangente y contiene un punto del infinito de la cónica que es no singular).

9. En el espacio afín y respecto de una referencia afín, considérese la cuádrica $\mathcal{C}$ que admite por ecuación:
$$\mathcal{C}(\omega) \equiv 1 + 3x^2 - 4y^2 - 6z^2 = 0,$$
y la recta r de ecuaciones:
$$3x = 4z, \qquad 1 = 4y.$$
   (i) Hállense los planos tangentes a $\mathcal{C}$ que contienen a r.
   (ii) Hállense las generatrices contenidas en algunos de los planos obtenidos en el apartado anterior.
   (iii) Dado el punto $P(0, \frac{1}{2}, 0)$ de la cuádrica, hallar las generatrices que pasan por dicho punto. Hallar el plano tangente a la cuádrica en P.
   (iv) Clasificar desde el punto de vista proyectivo la cónica $\pi_\infty \cap \mathcal{C}(\omega)$, donde π_∞ es el plano del infinito.
10. En el espacio afín tridimensional, sea la cuádrica
$$\mathcal{C}(\omega) \equiv xy - xz - z = 0.$$
   (i) Hallar la generatrices rectilíneas de $\mathcal{C}(\omega)$.
   (ii) Clasificar la cónica resultante de intersecar $\mathcal{C}(\omega)$ con el plano del infinito.
   (iii) Hallar los planos paralelos al plano $y = 0$ que sean tangentes a $\mathcal{C}(\omega)$.
   (iv) Dar las generatrices rectilíneas contenidas en algunos de los planos obtenidos en apartado anterior.
11. Hallar la ecuación de la cónica que es tangente a las rectas: $r \equiv 2+x+y = 0$ en $A(-1,-1)$, a $s \equiv 2 - x - 2y = 0$ en $B(0, 1)$ y a $u \equiv x + 2y = 0$.
12. Hallar la ecuación de la cónica que es tangente a las rectas: $r \equiv x + y = 0$, $s \equiv 1 + y = 0$, $u \equiv 1 + x + y = 0$, $v \equiv 1 + x = 0$ y $w \equiv 2 + 6x + 5y = 0$.
13. Hallar los planos tangentes a la cuádrica $x^2 + 3y^2 - 6z^2 - 4 = 0$ que pasan por las recta r de ecuaciones $x = 2$ y $y - \sqrt{2}z = 0$.
14. Encontrar la ecuación de la cónica que pasa por $A(-1, 1)$ y que es tangente a $\mathcal{C} \equiv 1 + x^2 + 3y^2 - 2x - 4y + 8xy = 0$ en los puntos de contacto $B(1, 0)$ y $C(0, 1)$.
15. En el espacio afín tridimensional, hallar la ecuación de una cuádrica que contiene a la recta
$$r \equiv \begin{cases} x = 1, \\ y = z + 2, \end{cases}$$
y tal que los vértices del tetraedro formado por los planos coordenados y el plano $\pi \equiv 6x + 3y + 2z - 6 = 0$ forman un 4-vértice autoconjugado.
16. Hallar la cuádrica que pasa por las rectas
$$r \equiv \begin{cases} x = y, \\ y = z, \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 2y, \\ x = 3z, \end{cases}$$
es tangente al plano $\pi \equiv x + y + z = 4$ en el punto $(2, 1, 1)$, y pasa por el punto $(1, -1, 2)$.
17. En el espacio afín y respecto de una referencia cartesiana, considérese la cuádrica que admite por ecuación:
$$x^2 + 2y^2 + 2xz + z + 3 = 0.$$
Hállense los planos tangentes a $\mathcal{C}$ que son paralelos al plano que tiene por ecuación $2x + 4y + 1 = 0$.

18. En el espacio afín tridimensional, hallar la ecuación de una cuádrica que pasa por el punto $(4, 0, 3)$, contiene a la elipse de ecuación:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{5} = 1, \\ z = 0, \end{cases}$$

y se sabe que la referencia afín fijada es autoconjugada.