Autor: Francisco Martín Cabrera, Departamento Matemática Fundamental, Universidad de La Laguna, Islas Canarias, España

4.9. Ejercicios.

1. Clasificar desde el punto de vista afín, según los valores de λ, las cuádricas:
$$\lambda x^2 + y^2 - 2z^2 + 2xy - 2yz + 2y + 1 = 0.$$
2. En el espacio afín y respecto de una referencia afín, se consideran las cuádricas que, para $\alpha \in \mathbb{R}$, admiten por ecuación:
$$x^2 + 2y^2 - 2xy + 2yz + 2x + \alpha z + 1 = 0.$$
Clasificar dichas cuádricas para los distintos valores de α.
3. Dada, en el espacio afín real y respecto de una referencia afín, la cuádrica $\mathcal{C}$ que, para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$, admite por ecuación:
$$a + x^2 + 2y^2 + bz^2 + 2xy + yz = 0.$$
Se pide clasificar $\mathcal{C}$ desde el punto de vista afín para los distintos valores de a y b.
4. En el espacio afín y respecto de una referencia afín, considérense las cuádricas que, para $\alpha \in \mathbb{R}$, admiten por ecuación:
$$x^2 - 2y^2 + \alpha z^2 - 2xz + 2yz + 2x + 1 = 0.$$
Clasifíquense, según los valores de α, dichas cuádricas.
5. Clasifíquense las cuádricas del espacio afín que, respecto de una referencia afín, admiten por ecuaciones:
(a) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 6xz + 2yz + 2x - 6y + 2z + 1 = 0$.
(b) $x^2 + y^2 + z^2 - 4xz - 4y + 2 = 0$.
(c) $y^2 + 4xz + 1 = 0$.
Hallar las respectivas ecuaciones diagonales afines.
6. Hallar la ecuación del diámetro del punto $(0, 1, 4)$ en la cónica:
$$4y^2 - 5xy - 2x + 3y + 1 = 0.$$
7. Hallar la ecuación de una cónica ordinaria que sea tangente a los ejes de coordenadas, con centro $(1, 1)$ y de la cual se conocen las rectas conjugadas $x + y = 0$ y $x + y + 1 = 0$. (Sugerencia, hallar primero la cónica tangencial)
8. *a*) Hallar el polo de la recta $x + 2y + 7 = 0$ con respecto a la cónica
$$x^2 - xy + y - 3x - 1 = 0.$$
b) Hallar un centro de dicha cónica, caso de que exista.
c) Hallar una referencia afín autoconjugada y la ecuación diagonal afín correspondiente. ¿ De qué tipo de cónica se trata?.

9. En el plano afín, una parábola $\mathcal{C}$ tiene su punto del infinito en la dirección del eje de coordenadas OY, una recta paralela al eje OX es tangente a $\mathcal{C}$ en el punto $(1,1)$ y $\mathcal{C}$ pasa por el punto $(2,0)$. Dar la ecuación de $\mathcal{C}$.
10. Se da un triángulo OAB en el plano afín. Se pide:
    a) Calcular la ecuación general de las parábolas circunscritas a OAB.
    b) Calcular el lugar geométrico de los puntos de las parábolas cuya tangente es paralela a la cuerda OA.
11. En el espacio afín tridimensional y fijada una referencia, hallar:
    a) La ecuación del lugar geométrico de las rectas que unen pares de puntos que se obtienen al cortar el eje OZ y la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = z$, por el sistema de planos paralelos a $\pi \equiv x+y+z=0$. Describir la superficie obtenida.
    b) Hallar el plano paralelo al plano XY que corte a dicha superficie según dos rectas.
12. Sea el elipsoide
$$x^2+y^2+z^2-2x-2y=0.$$
    Hallar la ecuación de la cuádrica que pasa por $(-3,0,2)$ y que tenga como cono asintótico la cuádrica tangente desde $(1,2,0)$ al elipsoide dado.
13. Hallar la ecuación del cilindro que contiene a la cónica
$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2-x+1=0, \\ z=0, \end{array}\right\}$$
    y que sus generatrices son paralelas a la recta
$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} x=z, \\ y=z. \end{array}\right.$$