Autor: Francisco Martín Cabrera, Departamento Matemática Fundamental, Universidad de La Laguna, Islas Canarias, España

T E M A V

5. VARIEDADES CUADRÁTICAS. ESTUDIO EUCLÍDEO

5.1. Variedades cuadráticas en el espacio euclídeo. Supondremos ahora que estamos en el espacio afín euclídeo E. Es decir, hay definido un producto escalar en la dirección de dicho espacio afín que nos permite definir ángulos, distancias, etc... Asimismo, se asume que todos los objetos geométricos están dados con respecto a referencias euclídeas $\{O; \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$. Esto es, referencias afines donde la base $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es ortonormal (compuesta por vectores unitarios y ortogonales dos a dos).

Si W es la dirección del espacio afín euclídeo E, entonces el hiperplano impropio es $H_\infty = \mathcal{P}(W)$ y hay definido sobre W el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dicho producto escalar sirve para establecer el isomorfismo lineal $\flat : W \to W^*$, definido por $\flat(\vec{w})(\vec{y}) = \langle \vec{w}, \vec{y} \rangle$, para todo $\vec{y} \in W$. Nótese que si $w^* \in W^*$, entonces $\flat^{-1}(w^*)$ es el vector de W tal que $\langle \flat^{-1}(w^*), \vec{y} \rangle = w^*(\vec{y})$, para todo $\vec{y} \in W$.

Definición 5.1. Se llama *referencia normal* de una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$, a toda referencia euclídea que sea autoconjugada con respecto a $\mathcal{C}(\omega)$. Se denomina *ecuación reducida* de una variedad cuadrática, a la ecuación de la variedad cuadrática con respecto a una referencia normal.

Veremos que, según la definición anterior, las variedades cuadráticas que admiten referencias normales son las que tienen centro o punto singular propio. Mas adelante, estableceremos la noción de referencia normal para las variedades sin centro y sin punto singular propio.

Proposición 5.2. *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática definida en un espacio afín euclídeo E con forma polar f y denotamos por $H_\infty = \mathcal{P}(W)$ el hiperplano impropio. La referencia euclídea $\{O; \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es normal si y sólo si O es un centro o un punto singular propio y $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es una base ortonormal de W formada por vectores propios de la aplicación lineal $\flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W} : W \to W$, donde $\hat{f}_{|W} : W \to W^*$ es la aplicación lineal de polaridad de $\omega_{|W}$. Nótese que $\langle \flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}(\vec{w}), \vec{y} \rangle = \hat{f}_{|W}(\vec{w})(\vec{y}) = f_{|W}(\vec{w}, \vec{y})$, para todo $\vec{y} \in W$. Además, en tal caso, la ecuación de la variedad cuadrática con respecto a la referencia normal es*

$$\omega(\vec{c}) + \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = 0,$$

donde $\langle \vec{c} \rangle = O$, $\langle \vec{c} + \vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_n \rangle = O + (\vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_n)$ y λ_i es el autovalor de $\flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}$ asociado al autovector $\vec{u}_i$.

Demostración. Si $\{O; \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es normal, entonces, para $i = 1, \dots, n$, O es conjugado al punto $\langle \vec{u}_i \rangle$. Por tanto, si $O \in \mathcal{C}(\omega)$ es un punto singular propio de $\mathcal{C}(\omega)$ y si $O \notin \mathcal{C}(\omega)$ es un centro. Por otro lado, como para $i \neq j$, se tiene $f(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = 0$, se tiene que

$$\flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}(\vec{u}_i) = \sum_{j=1}^{n} f(\vec{u}_i, \vec{u}_j)\vec{u}_j = f(\vec{u}_i, \vec{u}_i)\vec{u}_i = \lambda_i \vec{u}_i.$$

Luego $\vec{u}_i$ es un vector propio de $\flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}$ asociado al autovalor $\lambda_i = f(\vec{u}_i, \vec{u}_i)$.

Recíprocamente, si O es centro o punto singular propio de $\mathcal{C}(\omega)$, entonces es conjugado a todo $\langle \vec{u}_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$. Además, si $\vec{u}_i$ es un vector propio de $\flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}$ asociado al autovalor λ_i, se tiene que la ecuación de $\mathcal{C}(\omega)$ con respecto a $\{O; \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es

$$\omega(\vec{c}) + \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = 0,$$

donde $\vec{c}$ es tal que

$$\langle \vec{c} \rangle = O \quad \text{y} \quad O + \vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_n = \langle \vec{c} + \vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_n \rangle. \tag{5.6}$$

Por tanto, $\{O; \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es una referencia normal con respecto a $\mathcal{C}(\omega)$. $\square$

Observación 5.3. El cómputo de $\omega(\vec{c})$ es simplemente tomar las cordenadas afines $(c_1, \dots, c_n)$ de O según la referencia que se esté inicialmente usando y sustituirla en la ecuación de $\mathcal{C}(\omega)$ con respecto a dicha referencia euclídea. El valor numérico obtenido es $\omega(\vec{c})$.

Fijamos una referencia euclídea $\mathcal{E} = \{O'; \vec{u}'_1, \dots, \vec{u}'_n\}$. Sean A y α_{00} la matriz asociada a $\mathcal{C}(\omega)$ y el menor complementario de a_{00}, respectivamente.

Corolario 5.4. *En las mismas condiciones que en el lema anterior y si A es la matriz asociada a $\mathcal{C}(\omega)$ con respecto a una referencia euclídea $\mathcal{E} = \{O'; \vec{u}'_1, \dots, \vec{u}'_n\}$. Una referencia euclídea $\{O; \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es normal si y sólo si O es un centro o un punto singular propio y $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es una base ortonormal asociada tal que cada $\vec{u}_i$ corresponde a vectores columnas que son vectores propios de la submatriz α_{00} de A.*

Demostración. Obsérvese que con respecto a la base $\{\vec{u}'_1, \dots, \vec{u}'_n\}$ de $\mathcal{E} = \{O'; \vec{u}'_1, \dots, \vec{u}'_n\}$, se tiene

$$\flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}(\vec{u}'_i) = \sum_{j=1}^{n} f(\vec{u}'_i, \vec{u}'_j)\vec{u}'_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\vec{u}'_j.$$

Por lo que la matriz asociada a $\flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}$ es α_{00}. De esto se sigue el corolario. $\square$

5.2. Variedades cuadráticas ordinarias con centro: ecuación reducida. Sea $\mathcal{C}$ una variedad cuadrática ordinaria con centro que tiene de ecuación $X^t A X = 0$ con respecto a la referencia euclídea $\{O_1; \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$. Ello quiere decir que si $\{\vec{c}_1, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$ es tal que $\langle \vec{c}_1 \rangle = O_1$ y $\langle \vec{c}_1 + \vec{w}_1 + \cdots + \vec{w}_n \rangle = O_1 + \vec{w}_1 + \cdots + \vec{w}_n$, es la matriz asociada a una forma cuadrática ω que define $\mathcal{C}$ con respecto a la base normalizada $\{\vec{c}_1, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$.

Además, sabemos que, con respecto a $\{O_1; \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$, el centro O tiene por coordenadas homogéneas $(A_{00}, A_{01}, \dots, A_{0n})$ y por coordenadas afines euclídeas $(\frac{A_{01}}{A_{00}}, \dots, \frac{A_{0n}}{A_{00}})$. Por tanto,

$\vec{c} = \vec{c}_1 + \frac{A_{01}}{A_{00}}\vec{w}_1 + \cdots + \frac{A_{0n}}{A_{00}}\vec{w}_n$ es tal que $\langle\vec{c}\rangle = O$ y satisface las condiciones (5.6). Se tiene

$$\omega(\vec{c}_1 + \frac{A_{01}}{A_{00}}\vec{w}_1 + \cdots + \frac{A_{0n}}{A_{00}}\vec{w}_n) = (1, \tfrac{A_{01}}{A_{00}}, \ldots, \tfrac{A_{0n}}{A_{00}}) \begin{pmatrix} \frac{|A|}{A_{00}} \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{|A|}{A_{00}}.$$

Además, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores de la matriz α_{00}, entonces una ecuación reducida de $\mathcal{C}$ es

$$\frac{|A|}{A_{00}} + \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = 0.$$

Como en este caso $A_{00} \neq 0$, todos los autovalores λ_i son no nulos.

Definición 5.5. Si son iguales todos los autovalores λ_i de α_{00} de una variedad cuadrática ordinaria con centro $\mathcal{C}(\omega)$, se dice que $\mathcal{C}(\omega)$ es una *esfera*. Si $\frac{|A|}{A_{00}}$ y λ_i tienen distinto signo, la esfera es *real*. En cambio, la esfera es *imaginaria*, si $\frac{|A|}{A_{00}}$ y λ_i tienen el mismo signo.

5.3. Variedades cuadráticas ordinarias sin centro: ecuación reducida. Una variedad cuadrática ordinaria sin centro tampoco tiene puntos singulares. Por tanto, no existe una referencia normal para una tal variedad cuadrática. Luego una ecuación reducida, en el sentido de la definición 5.1, no tiene. Sin embargo, vamos a elegir una cierta referencia de modo que la ecuación de la variedad cuadrática sea lo mas diagonal posible.

Si la variedad cuadrática ordinaria $\mathcal{C}(\omega)$ no tiene centro y A es la matriz asociada para una cierta referencia euclídea $\mathcal{E} = \{O'; \vec{u}_1', \ldots, \vec{u}_n'\}$, el adjunto A_{00} es cero. Ello quiere decir que el hiperplano impropio $H_\infty = \mathcal{P}(W)$ es tangente a $\mathcal{C}(\omega)$. Luego existe un punto $\langle\vec{u}_1\rangle \in \mathcal{C}(\omega) \cap H_\infty$ tal que su hiperplano polar $\widetilde{f}(\langle\vec{u}_1\rangle) = H_\infty$. Además, tomamos $\vec{u}_1$ tal que $\langle\vec{u}_1, \vec{u}_1\rangle = 1$. Si consideramos la aplicación $\flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W} : W \to W$, donde $\hat{f}_{|W} : W \to W^*$ es la aplicación lineal de polaridad de $\omega_{|W}$, entonces 0 es un valor propio y $\vec{u}_1$ es un vector propio asociado a 0. Obsérvese que $\langle\flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}(\vec{u}_1), \vec{w}\rangle = f(\vec{u}_1, \vec{w}) = 0$.

Ahora como α_{00} es la matriz asociada a $\flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}$ con respecto a la base $\{\vec{u}_1', \ldots, \vec{u}_n'\}$ y es simétrica, se tiene que α_{00} es diagonalizable y admite n valores propios $0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base ortonormal de vectores propios cuyo primer vector es el $\vec{u}_1$ fijado anteriormente, entonces los hiperplanos polares $\widetilde{f}(\langle\vec{u}_1\rangle) = H_\infty, \widetilde{f}(\langle\vec{u}_2\rangle), \ldots, \widetilde{f}(\langle\vec{u}_n\rangle)$ son distintos e independientes (como $\mathcal{C}(\omega)$ es ordinaria, la polaridad $\widetilde{f}$ y la aplicación lineal de polaridad $\hat{f}$ son biyectivas). Por tanto, $H_\infty \cap \widetilde{f}(\langle\vec{u}_2\rangle) \cap \cdots \cap \widetilde{f}(\langle\vec{u}_n\rangle) = \langle\vec{u}_1\rangle$ es un único punto y $\widetilde{f}(\langle\vec{u}_2\rangle) \cap \cdots \cap \widetilde{f}(\langle\vec{u}_n\rangle) = r$ una recta propia, porque $r \nsubseteq H_\infty$. Nótese que $\langle\vec{u}_1\rangle \in r$ y si $P = \langle\vec{p}\rangle \neq \langle\vec{u}_1\rangle$ está en r, se tiene que

$$f(\vec{p}, \vec{u}_1)^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{u}_1) = f(\vec{p}, \vec{u}_1)^2 - \omega(\vec{p}) \cdot 0 = f(\vec{p}, \vec{u}_1)^2 \neq 0,$$

ya que al ser P punto propio no es conjugado a $\langle\vec{u}_1\rangle$. Luego r es una recta secante a $\mathcal{C}(\omega)$ con $r \cap \mathcal{C}(\omega) = \{O, \langle\vec{u}_1\rangle\}$ con O punto propio. Ahora considerando la referencia euclídea $\{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ y tomando $\vec{c}$ tal que $\langle\vec{c}\rangle = O$ y $\langle\vec{c} + \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_n\rangle = O + \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_n$ se tiene que la matriz asociada a ω respecto de la base $\{\vec{c}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & f(\vec{c}, \vec{u}_1) & 0 & .. & 0 \\ f(\vec{c}, \vec{u}_1) & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & .. & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Poniendo $p = f(\vec{c}, \vec{u}_1)$, se tiene que la ecuación de $\mathcal{C}(\omega)$ con respecto a $\{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ es

$$2py_1 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = 0.$$

En esta situación, se adopta el convenio de denominar *ecuación reducida* de $\mathcal{C}(\omega)$ a esta ecuación. Nótese que al ser $\mathcal{C}(\omega)$ ordinaria, los valores propios $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ son no nulos. Además, utilizando la matriz de paso entre la referencia inicial y la referencia que nos da nuestra, así llamada, *ecuación reducida*, se tiene que

$$\begin{pmatrix} 0 & f(\vec{c}, \vec{u}_1) & 0 & .. & 0 \\ f(\vec{c}, \vec{u}_1) & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & .. & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & p_{11} & \dots & p_{1n} \\ c_2 & p_{21} & \dots & p_{2n} \\ .. & .. & \dots & .. \\ c_n & p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & p_{11} & \dots & p_{1n} \\ c_2 & p_{21} & \dots & p_{2n} \\ .. & .. & \dots & .. \\ c_n & p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

donde

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & \dots & p_{2n} \\ .. & \dots & .. \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal, se tiene que $|A| = -f(\vec{c}, \vec{u}_1)^2 \lambda_2 \dots \lambda_n$. Por tanto, $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ son los autovalores no nulos de α_{00} y

$$p^2 = -\frac{|A|}{\lambda_2 \dots \lambda_n}.$$

La ambiguedad en el signo de p en este cómputo, viene dada del hecho que también podríamos haber considerado la referencia $\{O; -\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ y en este caso la ecuación sería

$$-2py_1 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = 0.$$

Al punto O se le denomina *vértice* de $\mathcal{C}(\omega)$ y a la recta $O + \mathbb{R}\vec{u}_1$ se denomina *eje* de $\mathcal{C}(\omega)$. Nótese que la rectas $O + \mathbb{R}\vec{u}_i$, $i = 2, \dots n$, son rectas tangentes a $\mathcal{C}(\omega)$ en el vértice O y el hiperplano $O + \mathbb{R}\vec{u}_2 + \cdots + \mathbb{R}\vec{u}_n$ es el hiperplano tangente a $\mathcal{C}(\omega)$ en O y coincide con el hiperplano polar de O.

Observación 5.6. También si $(0, v_1, \dots, v_n)$ representa $\langle \vec{u}_1 \rangle = H_\infty \cap \mathcal{C}(\omega)$ de modo que $v_1 \vec{u}'_1 + \cdots + v_n \vec{u}'_n = \vec{u}_1$, entonces

$$p = f(\vec{c}, \vec{u}_1) = (1, c_1, \dots, c_n) A \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{pmatrix} = (1, c_1, \dots, c_n) \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{0i} v_i \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{0i} v_i.$$

5.4. Variedades cuadráticas cuyo espacio de puntos singulares es de dimensión m: ecuación reducida. No consideraremos el caso en que la variedad cuadrática $C(\omega)$ sea el hiperplano impropio doble o sea el producto de un hiperplano propio por el hiperplano impropio. En geometría euclídea, el estudio de estos dos casos no tiene sentido. Esto es, $H_\infty \nsubseteq C(\omega)$.

(I) Si el espacio $\mathcal{P}(\ker \hat{f})$ de puntos singulares es propio (nótese que, en este caso, nuestra variedad cuadrática no tiene centro). Supongamos que los puntos del infinito de $\mathcal{P}(\ker \hat{f})$ están determinados por los vectores unitarios y ortogonales dos a dos $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$. Esto es, $\mathcal{P}(\ker \hat{f}) \cap H_\infty = \mathcal{P}(\mathbb{R}\vec{u}_1 + \cdots + \mathbb{R}\vec{u}_m)$. Estos son vectores propios de α_{00} asociados al valor propio cero. Tomando O un punto propio de $\mathcal{P}(\ker \hat{f})$ y completamos los vectores anteriores para obtener una base ortonormal $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m, \ldots, \vec{u}_n\}$ de vectores propios de α_{00}. Una referencia normal es $\{O; \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m, \ldots, \vec{u}_n\}$ y la ecuación reducida correspondiente viene dada por

$$\lambda_{m+1} y_{m+1}^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = 0,$$

donde $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$ son valores propios no nulos de α_{00} (si $\lambda_i = 0$, $i = m+1, \ldots, n$, $\langle \vec{u}_i \rangle$ sería singular, contradicción).

(II) Si el espacio $\mathcal{P}(\ker \hat{f}) = \mathcal{P}(\mathbb{R}u_1 + \cdots + \mathbb{R}u_m + \mathbb{R}u_{m+1})$ de puntos singulares es impropio (consideramos $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m, \vec{u}_{m+1}\}$ unitarios y ortogonales). Entonces H_∞ está en el conjunto imagen de la polaridad. Además, si $P = \langle \vec{p} \rangle$ es tal que $\widetilde{f}(P) = H_\infty$, entonces cualquier otro punto R tal que $\widetilde{f}(R) = H_\infty$ es de la forma $R = \langle \lambda \vec{p} + \vec{w} \rangle$, donde $\lambda \neq 0$ y $\vec{w} \in \ker(\hat{f})$. Así, existe un subespacio $S = P + \mathcal{P}(\ker \hat{f})$ de dimensión $m+1$, cuyos puntos no singulares tienen a H_∞ como hiperplano polar. Hay dos alternativas:

(a) $S \nsubseteq H_\infty$. Entonces tomando un punto propio O de S (que sería un centro) y una base ortonormal $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m, \vec{u}_{m+1}, \ldots, \vec{u}_n\}$ de vectores propios de α_{00}, se tiene que

$$\{O; \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m, \vec{u}_{m+1}, \ldots, \vec{u}_n\}$$

es una referencia normal y la ecuación reducida correspondiente es

$$a_0 + \lambda_{m+2} y_{m+2}^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = 0,$$

donde $a_0 = \omega(\vec{c})$, $\vec{c}$ se elige de modo que cumpla las condiciones (5.6) y $\lambda_{m+2}, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios no nulos de α_{00} (si $\lambda_i = 0$, $i = m+2, \ldots, n$, $\langle \vec{u}_i \rangle$ sería singular).

Observación 5.7. Un modo alternativo de calcular $a_0 = \omega(\vec{c})$: si $(c_1, \ldots, c_n)$ son las coordenadas afines euclídeas del centro elegido O, entonces se tiene que

$$a_0 = a_{00} + a_{01}c_1 + \cdots + a_{0n}c_n.$$

(b) $S \subseteq H_\infty$. En este caso sean $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m, \vec{u}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}\}$ unitarios y ortogonales dos a dos tales que $\mathcal{P}(\ker \hat{f}) = \mathcal{P}(\mathbb{R}u_1 + \cdots + \mathbb{R}u_m + \mathbb{R}u_{m+1})$ y $S = \mathcal{P}(\mathbb{R}u_1 + \cdots + \mathbb{R}u_m + \mathbb{R}u_{m+1} + \mathbb{R}u_{m+2})$. Nótese que $\widetilde{f}(\langle \vec{u}_{m+2} \rangle) = H_\infty$. Luego $\vec{u}_{m+2}$ es un vector propio de α_{00} asociado al valor propio 0. En este caso no hay referencia normal, ni ecuación reducida en sentido estricto. Sin embargo, como en ocasiones anteriores, se puede buscar una referencia cuya ecuación correspondiente sea lo más sencilla posible. Además, como $H_\infty \nsubseteq C(\omega)$ (esto quiere decir que α_{00} es no nula y no todos sus autovalores son 0), se tiene que $S \neq H_\infty$. Es decir, $m+2 < n$. Completamos los vectores anteriores para obtener $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, \vec{u}_{m+3}, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base ortonormal de vectores propios de α_{00}. Entonces se puede deducir que los hiperplanos $\widetilde{f}(\langle \vec{u}_{m+3} \rangle), \ldots, \widetilde{f}(\langle \vec{u}_n \rangle)$ son hiperplanos propios que son independientes. Luego

$\widetilde{f}(\langle \vec{u}_{m+3}\rangle)\cap\cdots\cap\widetilde{f}(\langle \vec{u}_n\rangle)$ es un subespacio proyectivo $\mathcal{P}(L)$ de dimensión $n-(n-(m+2)) = m+2$. Además, si $X \in \mathcal{P}(L)\cap H_\infty$, entonces $X \in S$. Luego $\mathcal{P}(L)\cap H_\infty = S$. Luego $\mathcal{P}(L)$ es un subespacio de dimensión $m+2$ propio.

Adicionalmente, se tiene que $\mathcal{P}(L)\cap\mathcal{C}(\omega)$ es una variedad cuadrática en el $m+2$-espacio $\mathcal{P}(L)$ que es el producto del $m+1$-espacio impropio S y un $m+1$-espacio propio τ. En efecto, como S es un hiperplano de $\mathcal{P}(L)$ y $S \subseteq \mathcal{P}(L)\cap\mathcal{C}(\omega)$, entonces $\mathcal{P}(L)\cap\mathcal{C}(\omega)$ tiene rango dos a lo sumo. En el caso, de que sea de rango 0. Esto es, $\mathcal{P}(L) \subseteq \mathcal{C}(\omega)$ un punto propio de $\mathcal{P}(L)$ sería singular de $\mathcal{C}(\omega)$. Por otro lado, rango de $\mathcal{P}(L)\cap\mathcal{C}(\omega)$ es 1 si y sólo si $\mathcal{P}(L)\cap\mathcal{C}(\omega) = S^2$. En tal caso, un punto propio de $\mathcal{P}(L)$ sería centro de $\mathcal{C}(\omega)$, cosa que ya vimos no puede ser en este caso. Por tanto, $\mathcal{P}(L)\cap\mathcal{C}(\omega)$ es rango 2 y es el producto de dos hiperplanos reales y distintos de $\mathcal{P}(L)$. Es decir, $\mathcal{P}(L)\cap\mathcal{C}(\omega) = S.\tau$ como se apuntó anteriormente. Tomando ahora un punto propio O de τ y considerando la referencia $\{O; \vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_{m+1},\vec{u}_{m+2},\vec{u}_{m+3},\ldots,\vec{u}_n\}$, denotando $p = f(\vec{c},\vec{u}_{m+2})$, donde $\vec{c}$ se elige de modo que cumpla las condiciones (5.6), la ecuación correpondiente es

$$2py_{m+2} + \lambda_{m+3}y_{m+3}^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = 0.$$

Además, si para la referencia inicial $\{O'; \vec{u}'_1,\ldots,\vec{u}'_n\}$, las coordenadas de O son $(c_1,\ldots,c_n)$ y $\vec{u}_{m+2} = v_1\vec{u}'_1 + \cdots + v_n\vec{u}'_n$, entonces

$$p = (1,c_1,\ldots,c_n)A\begin{pmatrix}0\\ v_1\\ ..\\ v_n\end{pmatrix} = (1,c_1,\ldots,c_n)\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n a_{0i}v_i\\ 0\\ ..\\ 0\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{0i}v_i.$$

Esto es, en realidad p no depende del punto propio O de τ elegido, sino del vector $\vec{u}_{m+2}$.

Nótese que el hiperplano polar de O es la extensión proyectiva del hiperplano afín $O + \mathbb{R}\vec{u}_1 + \cdots + \mathbb{R}\vec{u}_{m+1} + \mathbb{R}\vec{u}_{m+3} + \cdots + \mathbb{R}\vec{u}_n$ y $\vec{u}_{m+2}$ es perpendicular a este último hiperplano.

Definición 5.8. Un punto O es un *vértice* de una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ sin centro y sin punto singular propio, si $O \in \mathcal{C}(\omega)$, es propio, no singular y existe un vector $\vec{u}$ no nulo, perpendicular al hiperplano polar de O tal que el hiperplano polar de $\langle\vec{u}\rangle$ es el hiperplano impropio.

Hasta ahora las únicas variedades que tienen referencia normal y ecuación reducida son las variedades cuadráticas con centro o con punto singular propio. Para las variedades cuadráticas restantes establecemos estas nociones en el modo siguiente.

Definición 5.9. Para una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ sin centro y sin punto singular propio, una referencia euclídea $\{O; \vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\}$ se dice que es *normal*, si la referencia proyectiva asociada $\{O, \langle\vec{u}_1\rangle,\ldots,\langle\vec{u}_n\rangle; O+\vec{u}_1+\cdots+\vec{u}_n\}$ es tal que los puntos básicos son conjugados dos a dos salvo O y un único $\langle\vec{u}_i\rangle$, teniéndose además que O y $\langle\vec{u}_i\rangle$ son autoconjugados. La ecuación de $\mathcal{C}(\omega)$ con respecto a una tal referencia viene dada por

$$\lambda_1y_1^2 + \cdots + \lambda_{i-1}y_{i-1}^2 + 2py_i + \lambda_{i+1}y_{i+1}^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = 0,$$

y se denomina *ecuación reducida* de $\mathcal{C}(\omega)$.

Ejes de una variedad cuadrática

Definición 5.10. Se dice que una recta propia r es un *eje* de una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$, si satisface al menos una de las siguientes condiciones:

(a) r contiene dos centros;
(b) r contiene dos puntos singulares propios,
(c) r es un diámetro tal que su punto impropio es perpendicular a su hiperplano polar (que es propio),
(d) r contiene un punto singular propio y su punto impropio es perpendicular a su hiperplano polar (que es propio).
(e) la variedad cuadrática es sin centro y sin punto singular propio, r pasa por un vértice O y el punto impropio $\langle\vec{u}\rangle$ de r es tal que satisface una de las siguientes condiciones:
 (i) $\langle\vec{u}\rangle$ es un punto singular;
 (ii) $\langle\vec{u}\rangle$ es perpendicular al hiperplano polar de O;
 (iii) $\langle\vec{u}\rangle$ es perpendicular a su hiperplano polar.

Lema 5.11. *Una recta propia r es un eje si y sólo si su dirección $\vec{u}$ es un vector propio de $\flat^{-1}\circ\hat{f}_{|W}: W\to W$, donde $\hat{f}_{|W}: W\to W^*$ es la aplicación lineal de polaridad de $\omega_{|W}$, y contiene un centro o un punto singular propio o, cuando la variedad cuadrática es sin centro y sin punto singular propio, r contiene un vértice de la misma y r es perpendicular o está contenida en el hiperplano polar de dicho vértice.*

Demostración. Sea r un eje. Si r contiene dos centros, entonces el punto del infinito de r es singular. Por lo que está determinado por un vector $\vec{u}$ tal que $\langle\flat^{-1}\circ\hat{f}_{|W}(\vec{u}),\vec{y}\rangle = f(\vec{u},\vec{y}) = 0$, para todo $\vec{y}\in W$. Luego $\vec{u}$ es un vector propio asociado al valor propio 0.

Si r contiene dos puntos singulares, entonces el punto del infinito de r también es singular. Por lo que está determinado por un vector propio $\vec{u}$ asociado al valor propio 0.

Si r es un diámetro tal que su punto impropio $\langle\vec{u}\rangle$ es perpendicular a su hiperplano polar (que es propio). Entonces, para todo vector ortogonal $\vec{y}$ ortogonal a $\vec{u}$, se tendrá $f(\vec{u},\vec{y})=0$. Tomando $\vec{u}$ unitario,

$$\langle\flat^{-1}\circ\hat{f}_{|W}(\vec{u}),\vec{y}\rangle = f(\vec{u},\vec{y}) = \langle\vec{u},\vec{y}\rangle f(\vec{u},\vec{u}). \tag{5.7}$$

Por tanto, $\flat^{-1}\circ\hat{f}_{|W}(\vec{u}) = \omega(\vec{u})\vec{u}$.

Si r contiene un punto singular propio y su punto impropio $\langle\vec{u}\rangle$ es perpendicular a su hiperplano polar (que es propio). Entonces tomando $\vec{u}$ unitario y procediendo como en (5.7), se obtiene que $\vec{u}$ es un vector propio asociado a $\omega(\vec{u})$ no nulo.

El caso en que la variedad cuadrática no tiene centro, ni punto singular propio y r pasa por un vértice O. Si el punto impropio $\langle\vec{u}\rangle$ de r es un punto singular, $\vec{u}$ es un vector propio de $\flat^{-1}\circ\hat{f}_{|W}$ asociado al valor propio 0 y la recta r está contenida en el hiperplano polar de O. Si $\langle\vec{u}\rangle$ es perpendicular al hiperplano polar de O, entonces el hiperplano polar de $\langle\vec{u}\rangle$ es el hiperplano impropio. Por tanto, $\vec{u}$ es un vector propio de de $\flat^{-1}\circ\hat{f}_{|W}$ asociado al valor propio 0. Por último, si $\langle\vec{u}\rangle$ es perpendicular a su hiperplano polar. Tomando $\vec{u}$ unitario y procediendo como en (5.7), se tiene que $\flat^{-1}\circ\hat{f}_{|W}(\vec{u}) = \omega(\vec{u})\vec{u}$. Esto es, $\vec{u}$ es vector propio asociado al valor propio no nulo $\omega(\vec{u})$.

Recíprocamente, supongamos que r es una recta contiene un punto O que es un centro o un punto singular propio o, cuando la variedad cuadrática no tiene centro, ni punto singular propio, un vértice y su dirección $\vec{u}$ es un vector propio de $\flat^{-1}\circ\hat{f}_{|W}: W\to W$.

Si O es centro o punto singular propio y $\vec{u}$ está asociado al valor propio 0, entonces $\langle\vec{u}\rangle$ es conjugado a O y a todo punto impropio. Por tanto, $\langle\vec{u}\rangle$ es punto singular. Luego todo punto r es conjugado a todos los puntos de H_∞. Si O es centro, cualquier punto propio de r también lo es. Si O es punto singular, entonces la recta r está constituida por puntos singulares. En ambos casos, r es un eje.

Si O es centro o punto singular propio y $\vec{u}$ está asociado al valor propio λ no nulo. Entonces $\langle\vec{u}\rangle$ es no singular y es perpendicular a su hiperplano polar que pasa por O. En efecto, para todo $\vec{y} \in W$ tal que $\langle\vec{u},\vec{y}\rangle$, se tiene que $f(\vec{u},\vec{y}) = \langle \flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}(\vec{u}), \vec{y}\rangle = \lambda\langle\vec{u},\vec{y}\rangle = 0$, Además, $f(\vec{u},\vec{u}) = \langle \flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}(\vec{u}), \vec{u}\rangle = \lambda\langle\vec{u},\vec{u}\rangle = \lambda$. Por tanto, también en este caso, r es eje.

Si O es un vértice y $\vec{u}$ está asociado al valor propio 0. Si O y $\langle\vec{u}\rangle$ son conjugados, entonces $\langle\vec{u}\rangle$ es punto singular impropio y r sería eje. Si O y $\langle\vec{u}\rangle$ no son conjugados, entonces r no está contenida en el hiperplano polar de O. Por tanto, $\vec{u}$ es perpendicular al hiperplano polar de O. Luego r sería también eje en este segundo caso.

Si O es un vértice y $\vec{u}$ está asociado a un valor propio λ no nulo, entonces es perpendicular a todos los vectores propios asociados al cero. Por tanto, $\vec{u}$ es paralelo al hiperplano polar de O. De ahí que r esté contenida en dicho hiperplano. Además,

$$f(\vec{u},\vec{u}) = \langle \flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}(\vec{u}), \vec{u}\rangle = \lambda\langle\vec{u},\vec{u}\rangle \neq 0,$$

y, si $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{u}$,

$$f(\vec{u},\vec{v}) = \langle \flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}(\vec{u}), \vec{v}\rangle = \lambda\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = 0.$$

Por tanto, el hiperplano polar de $\langle\vec{u}\rangle$ es propio con dirección el conjunto de vectores $\vec{u}^{\perp}$ que son ortogonales a $\vec{u}$. De ahí que r es eje. □

De este último lema se deduce immediatamente la siguiente consecuencia.

Corolario 5.12. *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática definida en un espacio afín euclídeo E. La referencia euclídea $\{O;\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ es normal si y sólo si O es un centro o un punto singular propio o, si $\mathcal{C}(\omega)$ es sin centro y sin punto singular propio, un vértice y $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ es una base ortonormal de la dirección de E, de modo que las rectas $O+\mathbb{R}\vec{u}_i$ son ejes de $\mathcal{C}(\omega)$.*

Veamos la noción de vértice en un sentido general relativa a cualquier forma cuadrática.

Definición 5.13. Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ en un espacio afín euclídeo E. Se denomina *vértice* de $\mathcal{C}(\omega)$, a todo punto propio que esté en la intersección de un eje con $\mathcal{C}(\omega)$.

Lema 5.14. *Si $\mathcal{C}(\omega)$ es una variedad cuadrática en un espacio afín euclídeo E y P es un punto de E, entonces son equivalentes:*

(i) *P es un vértice de $\mathcal{C}(\omega)$*

(ii) *P es un punto singular propio o es un punto no singular propio de $\mathcal{C}(\omega)$ tal que el punto impropio determinado por la dirección perpendicular al hiperplano polar $\widetilde{f}(P)$ de P es conjugado a los puntos impropios determinados por las direcciones paralelas a $\widetilde{f}(P)$.*

(iii) *P es un punto singular propio o es un punto no singular propio de $\mathcal{C}(\omega)$ tal que el punto impropio determinado por la dirección perpendicular al hiperplano polar $\widetilde{f}(P)$ de P está determinado por un vector propio de $\flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W} : W \to W$, donde $h : W \to W^*$ es la aplicación lineal de polaridad de $\omega_{|W}$ y $\mathcal{P}(W)$ es el hiperplano impropio.*

Demostración. Para (i) implica (ii). Si P es un vértice, entonces $P \in r \cap \mathcal{C}(\omega)$, donde la recta r es un eje.

Si el eje r contiene dos puntos singulares, entonces el vértice P es singular.

Si el eje r contiene dos centros, entonce $r \cap \mathcal{C}(\omega) = Q_\infty$, donde Q_∞ es un punto singular impropio.

Si se tiene que el eje $r = Q + \mathbb{R}\vec{u}$, donde Q es un punto singular propio y $\langle\vec{u}\rangle$ es no singular tal que $\vec{u}$ es perpendicular a su hiperplano polar $\widetilde{f}(\langle\vec{u}\rangle)$. Si $P \neq Q$, P es conjugado a P y a Q. Luego P es conjugado a $\langle\vec{u}\rangle$. Luego, como $\langle\vec{u}\rangle$ es conjugado a P y a Q, la recta r está contenida en $\widetilde{f}(\langle\vec{u}\rangle)$. Lo que implica que $\langle\vec{u}\rangle \in \widetilde{f}(\langle\vec{u}\rangle)$, contradicción. Por tanto, $P = Q$.

Si se tiene que el eje $r = C + \mathbb{R}\vec{u}$, donde C es un centro y $\langle\vec{u}\rangle$ es no singular tal que $\vec{u}$ es perpendicular a su hiperplano polar $\widetilde{f}(\langle\vec{u}\rangle)$. En tal caso, si $\langle\vec{v}\rangle$ es un punto impropio conjugado a P, como también es conjugado a C, entonces $\langle\vec{v}\rangle$ es conjugado a todos los puntos de r. En particular $\langle\vec{v}\rangle$ es conjugado a $\langle\vec{u}\rangle$. Luego si $\vec{v}$ es paralelo $\widetilde{f}(P)$, entonces $\vec{v}$ es paralelo a $\widetilde{f}(\langle\vec{u}\rangle)$. Por tanto, $\vec{v}$ y $\vec{u}$ son perpendiculares. Es decir, $\vec{u}$ es perpenndicular a $\widetilde{f}(P)$ y es conjugado a todos los puntos impropios determinados por la dirección de $\widetilde{f}(P)$.

Si se tiene que el eje $r = O + \mathbb{R}\vec{u}$, donde O es un vértice ($\mathcal{C}(\omega)$ no tiene centro, ni punto singular propio), entonces se tiene las siguientes posibilidades:

(a) $\langle\vec{u}\rangle$ es un punto singular. En este caso, el eje r está contenido en $\mathcal{C}(\omega)$, O es conjugado a P y los hiperplanos polares de O y P coinciden, $\widetilde{f}(O) = \widetilde{f}(P)$. Luego, como el hiperplano polar de la dirección $\vec{u}_1$ perpendicular a $\widetilde{f}(O) = \widetilde{f}(P)$ es el hiperplano impropio, se tiene lo afirmado en el lema.

(b) $\vec{u}$ es perpendicular a $\widetilde{f}(O)$. En este caso, $\widetilde{f}(\langle\vec{u}\rangle)$ es el hiperplano impropio y $P, O, \langle\vec{u}\rangle \in \mathcal{C}(\omega)$, no estando el eje r contenido en $\mathcal{C}(\omega)$ ($\langle\vec{u}\rangle$ es no singular). Es decir, r es secante y $O = P$. La conclusión del lema se sigue.

(c) $\vec{u}$ es perpendicular a $\widetilde{f}(\langle\vec{u}\rangle)$. Si $\widetilde{f}(\langle\vec{u}_1\rangle)$ es el hiperplano impropio, entonces $\vec{u}$ y $\vec{u}_1$ son perpendiculares y conjugados. Ello implica que $\vec{u}$ es conjugado a O. Luego, todos los puntos de la recta r son conjugados a O. En particular, P es conjugado a O. Si P y O fuesen distintos, la recta r estaría contenida en $\mathcal{C}(\omega)$. Esto no sucede, ya que $\omega(\vec{u}) \neq 0$. Por tanto, $P = O$ y la conclusión del lema se sigue.

Para (ii) implica (iii). Si P es un punto singular propio, (iii) es obvio. Si P es un punto no singular propio de $\mathcal{C}(\omega)$, entonces si $\vec{u}$ es unitario y perpendicular al hiperplano polar de P, entonces

$$\langle\flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}(\vec{u}), \vec{y}\rangle = \langle\vec{u}, \vec{y}\rangle f(\vec{u}, \vec{u}) + f(\vec{u}, \vec{y} - \langle\vec{u}, \vec{y}\rangle\vec{u}) = \langle\omega(\vec{u})\vec{u}, \vec{y}\rangle,$$

para todo $\vec{y} \in W$. Luego $\flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}(\vec{u}) = \omega(\vec{u})\vec{u}$.

Para (iii) implica (i). Si P es un punto singular propio. Tomando un vector propio $\vec{u}$ de $\flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}$, $r = P + \mathbb{R}\vec{u}$ es un eje y $P \in r \cap \mathcal{C}(\omega)$.

Si P es un punto no singular propio. Sea $\vec{u}$ unitario y perpendicular al hiperplano polar $\widetilde{f}(P)$ de P. Sabemos que, para todo $\vec{y}$ paralelo a $\widetilde{f}(P)$, $f(\vec{u}, \vec{y}) = \langle\flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}(\vec{u}), \vec{y}\rangle = \lambda\langle\vec{u}, \vec{y}\rangle = 0$. Además, $\langle\vec{u}\rangle$ no es conjugado a P. De ahí que $\langle\vec{u}\rangle$ es no singular y caben dos posibilidades:

(i) El hiperplano $\widetilde{f}(\langle\vec{u}\rangle)$ es el hiperplano impropio. En este caso, todos los puntos singulares son impropios y no hay centros. Si hubiese algún centro C, el punto $\langle\vec{u}\rangle$ sería singular, contradicción.

(ii) El hiperplano $\widetilde{f}(\langle\vec{u}\rangle)$ es propio y paralelo a $\widetilde{f}(P)$.

$\square$

5.5. Apéndice: focos de una cónica ordinaria.

Lema 5.15. *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una cónica ordinaria, una recta r es tangente si y sólo si su polo P pertenece a $\mathcal{C}(\omega)$.*

Demostración. En efecto, si r es tangente, existirá un punto $P \in r$ tal que P es conjugado a todos los puntos de r. Por tanto, la recta polar de P es r. Como P pertenece a su recta polar, entonces P está en la cónica. □

Dado un punto P no perteneciente a una cónica ordinaria, sea s su recta polar que no puede ser tangente. Para cualquier recta r que pase por P, sea $X = r \cap s$. Estableceremos una correspondencia tal que a la recta r la hacemos corresponder r', que es la polar del punto X. Es decir que los puntos X y $X' = r' \cap s$ son conjugados respecto de la cónica. La correspondencia establecida de esta forma entre las rectas del haz de base el punto P es una proyectivividad, denominada *proyectividad subordinada por la cónica en el punto P*. Además, se tiene el resultado siguiente.

Lema 5.16. *Dos puntos X y X' son conjugados respecto de una cónica ordinaria si y sólo si sus rectas polares son conjugadas respecto de la cónica tangencial.*

Demostración. En efecto, si $\rho U = AX$ y $\rho U' = AX'$ entonces

$$U^t A^{-1} U' = 0 \iff (AX)^t A^{-1}(AX') = 0 \iff X^t A X' = 0.$$

□

Definición 5.17. Se llaman *focos* de una cónica ordinaria, a los puntos del plano tales que la proyectividad subordinada por la cónica en ellos es tal que a cada recta le hace corresponder una recta perpendicular.

Observación 5.18. Nótese que un foco debe ser un punto propio, puesto que son paralelas todas las rectas de un haz definido por un punto impropio.

Para calcular los focos procederemos de la siguiente manera: Sea $F(p_1, p_2)$ y consideremos una recta r que pasa por F, con vector director (v_1, v_2),

$$r \equiv (v_2 p_1 - v_1 p_2) - v_2 x + v_1 y = 0.$$

Para que F sea un foco tiene que ocurrir que la recta perpendicular a r

$$r' \equiv (v_1 p_1 + v_2 p_2) - v_1 x - v_2 y = 0,$$

sea conjugada de r respecto de la cónica tangencial.

En particular, consideremos la recta que pasa por F y tiene por vector director el $(1, 0)$, esto es, la recta de coeficientes $U_1 = (-p_2, 0, 1)$. Su conjugada respecto de la cónica tangencial será la recta que pasa por F y tiene por vector director el $(0, 1)$, la recta $U_2 = (p_1, -1, 0)$. El hecho de que U_1 y U_2 sean conjugadas respecto de la cónica tangencial nos dá la condición

$$f^*(U_1, U_2) = 0.$$

Por otra parte, toda recta r que pase por F y tenga por dirección (v_1, v_2), tiene unas coordenadas tangenciales,

$$U = \begin{pmatrix} v_2 p_1 - v_1 p_2 \\ -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} p_1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_1 \begin{pmatrix} -p_2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 U_1 + v_2 U_2$$

y para su conjugada r' será $U' = -v_2U_1 + v_1U_2$. Poniendo la condición de conjugación

$$0 = f^*(U, U') = v_1v_2(\omega^*(U_2) - \omega^*(U_1),$$

de donde se deduce que

$$\omega^*(U_1) = \omega^*(U_2).$$

Por tanto, para calcular los focos sólo es necesario recordar que para las rectas U_1 y U_2 se tiene que

$$\begin{aligned} f^*(U_1, U_2) &= 0, \\ \omega^*(U_1) &= \omega^*(U_2). \end{aligned}$$

Esto resulta un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que son p_1 y p_2, las coordenadas de un foco $F(p_1, p_2)$. Al resolver dicho sistema, se obtendrán los focos de la cónica.

Definición 5.19. Se llaman *directrices* a las polares de los focos.

Ejercicios:

(a) Mostrar que los focos de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, con $a \geq b$, son $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$, donde c es el número real positivo tal que $a^2 = b^2 + c^2$.

(b) Mostrar que los focos de la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, son $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$, donde c es el número real positivo tal que $c^2 = a^2 + b^2$.

(c) Mostrar que el foco de la parábola $y^2 = 2px$, es $F(\frac{p}{2}, 0)$.

(d) Mostrar que el foco de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, coincide con el centro $C(0, 0)$.

5.6. Apéndice: caracterizaciones métricas (euclídeas) de las cónicas ordinarias reales.

Proposición 5.20. *En una elipse real, la suma de distancias desde un punto cualquiera de la elipse a los dos focos es constante. Además, la distancia entre los focos es menor que dicha constante.*

Demostración. Dada una elipse real $\mathcal{C}(\omega)$, consideramos la referencia normal para la cual la elipse tiene como ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde $a \geq b > 0$. Sabemos que en este caso los focos de la elipse son los puntos $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$, donde $a^2 = b^2 + c^2$. Sea $X(x, y)$ un punto de la elipse, entonces la distancia $d(X, F)$

viene dada por

$$\begin{aligned} d(X,F)^2 &= (x-c)^2 + y^2 \\ &= x^2 + c^2 - 2xc + b^2(1 - \frac{x^2}{a^2}) \\ &= x^2(1 - \frac{b^2}{a^2}) + a^2 - 2xc \\ &= \frac{x^2c^2}{a^2} + a^2 - 2\frac{xc}{a}a \\ &= \left(a - \frac{xc}{a}\right)^2. \end{aligned}$$

Análogamente, se puede mostrar que

$$d(X,F')^2 = \left(a + \frac{xc}{a}\right)^2.$$

Además, sabemos que $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$. Por tanto, $-a \leq x \leq a$. Por otro lado, se tiene que $0 \leq c < a$, teniendo en cuenta que $b \neq 0$, lo que implica que $0 \leq \frac{c}{a} < 1$. Por consiguiente,

$$-a \leq -a\frac{c}{a} \leq \frac{xc}{a} \leq a\frac{c}{a} \leq a.$$

Luego

$$d(X,F) = \left(a - \frac{xc}{a}\right) \geq 0.$$

$$d(X,F') = \left(a + \frac{xc}{a}\right) \geq 0.$$

Finalmente, se puede afirmar que

$$d(X,F) + d(X,F') = 2a.$$

□

Nótese que en el caso de que la elipse anterior fuese una circunferencia, se tendría $a = b$, $c = 0$ y $F = F' = (0,0)$. Por lo que el único foco coincide con el centro de la circunferencia y $d(X,F) = a$.

Corolario 5.21. *En una circunferencia real, la distancia desde un punto cualquiera de la circunferencia al centro es constante.*

Recíprocamente.

Proposición 5.22. *Dados dos puntos F y F' y una constante positiva $2a$ mayor que la distancia entre F y F', el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a F y F' es $2a$, es una elipse real.*

Demostración. Sea $2c$ la distancia entre F y F' y consideramos una referencia euclídea de modo que $(c,0)$ y $(-c,0)$ sean las coordenadas de los puntos F y F', respectivamente. Por hipótesis, $2c < 2a$ y si $X(x,y)$ es un punto del lugar geométrico y se denotan $d = d(X,F)$ y $d' = d(X,F')$, entonces $d + d' = 2a$. Además, como $d^2 = x^2 + c^2 - 2xc + y^2$ y $d'^2 = x^2 + c^2 + 2xc + y^2$, se tiene que $d'^2 - d^2 = 4xc$. Lo que implica

$$2a(d' - d) = (d' + d)(d' - d) = 4xc.$$

Por tanto, $d' - d = \dfrac{2xc}{a}$. Teniendo en cuenta que $d + d' = 2a$, se sigue que

$$\begin{aligned} d &= a - \frac{xc}{a}, \\ d' &= a + \frac{xc}{a}. \end{aligned}$$

Ahora, a partir de

$$\left(a - \frac{xc}{a}\right)^2 = x^2 + c^2 - 2xc + y^2,$$

se tiene

$$a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2.$$

Denotando $b^2 = a^2 - c^2$, se llega a la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que es una elipse real. □

Si la distancia $2c = 0$, entonces $F = F' = (0, 0)$ y se obtiene la ecuación

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Por consiguiente, resulta la siguiente afirmación.

Corolario 5.23. *El lugar geométrico de todos los puntos equidistan de uno fijo F, siendo dicha equidistancia un número real positivo a no nulo, es una circunferencia real.*

Proposición 5.24. *En una elipse real, la razón entre la distancia de un punto a un foco y la distancia de dicho punto a la correspondiente directriz es constante. Dicha constante es la excentricidad $e = \dfrac{c}{a} < 1$.*

Demostración. Sea la elipse real

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde $a \geq b$. Por tanto, sabemos que los focos son $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$, donde c es un número real no negativo tal que $c^2 = a^2 - b^2$. A los focos F y F' le correponden las directrices $r_F \equiv cx = a^2$ y $r_{F'} \equiv cx = -a^2$, respectivamente.

Si $X(x, y)$ es un punto de la elipse, sabemos por una demostración de una proposición anterior que

$$\begin{aligned} d(X, F) &= a - \frac{xc}{a}, \\ d(X, F') &= a + \frac{xc}{a}. \end{aligned}$$

Calculamos ahora los cocientes mencionados en el enunciado, suponiendo que c es no nulo,
$$\frac{d(X,F)}{d(X,r_F)} = \frac{a - \frac{xc}{a}}{\frac{|a^2-cx|}{c}} = \frac{c\left(a - \frac{xc}{a}\right)}{a\left(a - \frac{xc}{a}\right)} = \frac{c}{a}.$$
Para el otro foco F'
$$\frac{d(X,F')}{d(X,r_{F'})} = \frac{a + \frac{xc}{a}}{\frac{|a^2+cx|}{c}} = \frac{c\left(a + \frac{xc}{a}\right)}{a\left(a + \frac{xc}{a}\right)} = \frac{c}{a}.$$
En el caso que $c = 0$, se tiene $F = F'$, la elipse es una circunferencia y la directriz es la recta del infinito. Por tanto, la distancia $d(X,F) = a$ y la distancia de X a la recta impropia es infinita, por lo que el cociente es $0 = \dfrac{c}{a}$. □

Observación 5.25. La excentricidad de una elipse real es no negativa y menor que 1. Si la excentricidad es nula, entonces la elipse es una circunferencia.

Un resultado recíproco al anterior es el siguiente.

Proposición 5.26. *Sea F un punto y r una recta tal que $F \notin r$ y e una constante positiva menor que* 1*. El lugar geométrico de los puntos X tales que*
$$\frac{d(X,F)}{d(X,r)} = e,$$
es una elipse real, donde F es un foco y r una directriz.

Demostración. Sea k la distancia de F a la recta r. Elegimos una referencia euclídea tal que $F(c,0)$ y $r \equiv x = \frac{a^2}{c}$, donde a y c son tales que $c + k = \dfrac{a^2}{c}$ y $e = \frac{c}{a}$. De estas condiciones se sigue que $a = \dfrac{ke}{1-e^2}$ y que $c = \dfrac{ke^2}{1-e^2}$. El lugar geométrico considerado está formado por los puntos $X(x,y)$ tales que
$$\frac{d(X,F)}{d(X,r)} = e.$$
Por tanto,
$$\frac{x^2 + c^2 - 2xc + y^2}{\frac{(a^2-cx)^2}{c^2}} = \frac{c^2}{a^2}.$$
De donde se tiene que
$$x^2 + y^2 + c^2 = a^2 + \frac{x^2c^2}{a^2}.$$
Denotando $b^2 = a^2 - c^2$, se llega finalmente a la ecuación
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
□

Observación 5.27. Si en la proposición anterior, la constante e fuese nula y F siguiese siendo un punto no incluido en la recta r, entonces el lugar geométrico estaría constituido por el punto F únicamente.

Proposición 5.28. *En una hipérbola, la diferencia de distancias desde un punto cualquiera de la hipérbola a los dos focos es constante. Además, la distancia entre los focos es mayor que dicha constante.*

Demostración. Dada una hipérbola $\mathcal{C}(\omega)$, consideramos la referencia normal para la cual la hipérbola tiene como ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sabemos que en este caso los focos de la hipérbola son los puntos $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$. Sea $X(x,y)$ un punto de la hipérbola, entonces la distancia $d(X,F)$ viene dada por

$$\begin{aligned} d(X,F)^2 &= (x-c)^2 + y^2 \\ &= x^2 + c^2 - 2xc + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) \\ &= x^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) + a^2 - 2xc \\ &= \frac{x^2c^2}{a^2} + a^2 - 2\frac{xc}{a}a \\ &= \left(\frac{xc}{a} - a\right)^2. \end{aligned}$$

Análogamente, se puede mostrar que

$$d(X,F')^2 = \left(a + \frac{xc}{a}\right)^2.$$

Además, sabemos que $\dfrac{x^2}{a^2} \geq 1$. Por tanto, $x \leq -a < 0$ ó $0 < a \leq x$. Por otro lado, se tiene que $0 < a < c$, teniendo en cuenta que $b \neq 0$, lo que implica que $1 < \dfrac{c}{a}$. Por consiguiente, $\dfrac{xc}{a} \leq -a < 0$ ó $0 < a \leq \dfrac{xc}{a}$.

Si $\dfrac{xc}{a} \leq -a < 0$, se tiene que

$$d = d(X,F) = \left(\frac{xc}{a} - a\right) \geq 0.$$

$$d' = d(X,F') = \left(\frac{xc}{a} + a\right) \geq 0.$$

Por tanto, $d' - d = 2a$.

En cambio, si $0 < a \leq \dfrac{xc}{a}$, se puede afirmar que

$$d = d(X,F) = \left(a - \frac{xc}{a}\right) \geq 0.$$

$$d' = d(X,F') = \left(-\frac{xc}{a} - a\right) \geq 0.$$

De donde $d - d' = 2a$. □

Recíprocamente.

Proposición 5.29. *Dados dos puntos F y F' y una constante positiva $2a$ menor que la distancia entre F y F', el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a F y F' es $2a$, es una hipérbola.*

Demostración. Sea $2c$ la distancia entre F y F' y consideramos una referencia euclídea de modo que $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ sean las coordenadas de los puntos F y F', respectivamente. Por hipótesis, $2a < 2c$ y si $X(x, y)$ es un punto del lugar geométrico y se denotan $d = d(X, F)$ y $d' = d(X, F')$, entonces $d-d' = 2a$ ó $d'-d = 2a$. Además, como $d^2 = x^2+c^2-2xc+y^2$ y $d'^2 = x^2+c^2+2xc+y^2$, se tiene que $d'^2 - d^2 = 4xc$. Lo que implica

$$(d + d')2a = (d' + d)(d' - d) = 4xc.$$

o alternativamente,

$$(d + d')2a = (d' + d)(d - d') = -4xc.$$

Por tanto, $d' + d = \pm\dfrac{2xc}{a}$. Teniendo en cuenta que $d' - d = \pm 2a$, se sigue que

$$\begin{aligned} d &= \pm\left(\frac{xc}{a} - a\right), \\ d' &= \pm\left(\frac{xc}{a} + a\right). \end{aligned}$$

Ahora, a partir de

$$d^2 = \left(\frac{xc}{a} - a\right)^2 = x^2 + c^2 - 2xc + y^2,$$

se tiene

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Denotando $b^2 = c^2 - a^2$, se llega a la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que es una hipérbola. $\square$

Proposición 5.30. *En una hipérbola, la razón entre la distancia de un punto a un foco y la distancia de dicho punto a la correspondiente directriz es constante. Dicha constante es la excentricidad $e = \dfrac{c}{a} > 1$.*

Demostración. Sea la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

sabemos que los focos son $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$, donde c es un número real no negativo tal que $c^2 = a^2 + b^2$. A los focos F y F' le correponden las directrices $r_F \equiv cx = a^2$ y $r_{F'} \equiv cx = -a^2$, respectivamente.

Si $X(x, y)$ es un punto de la hipérbola, sabemos por la demostración de una proposición anterior que

$$\begin{aligned} d(X, F) &= \pm\left(\frac{xc}{a} - a\right), \\ d(X, F') &= \pm\left(a + \frac{xc}{a}\right). \end{aligned}$$

Calculamos ahora los cocientes mencionados en el enunciado, suponiendo que c es no nulo,

$$\frac{d(X,F)}{d(X,r_F)} = \frac{\pm\left(\frac{xc}{a}-a\right)}{\frac{|a^2-cx|}{c}} = \frac{\pm c\left(\frac{xc}{a}-a\right)}{\pm a\left(\frac{xc}{a}-a\right)} = \frac{c}{a}.$$

Para el otro foco F'

$$\frac{d(X,F')}{d(X,r_{F'})} = \frac{\pm\left(\frac{xc}{a}+a\right)}{\frac{|a^2+cx|}{c}} = \frac{\pm c\left(\frac{xc}{a}+a\right)}{\pm a\left(\frac{xc}{a}+a\right)} = \frac{c}{a}.$$

□

También se tiene el resultado recíproco.

Proposición 5.31. *Sea F un punto y r una recta tal que $F \notin r$ y e una constante positiva mayor que 1. El lugar geométrico de los puntos X tales que*

$$\frac{d(X,F)}{d(X,r)} = e,$$

es una hipérbola, donde F es un foco y r una directriz.

Demostración. Sea k la distancia de F a la recta r. Elegimos una referencia euclídea tal que $F(c,0)$ y $r \equiv x = \frac{a^2}{c}$, donde a y c son tales que $c-k = \dfrac{a^2}{c}$ y $e = \frac{c}{a}$. De estas condiciones se sigue que $a = \dfrac{ke}{e^2-1}$ y que $c = \dfrac{ke^2}{e^2-1}$. El lugar geométrico considerado está formado por los puntos $X(x,y)$ tales que

$$\frac{d(X,F)}{d(X,r)} = e.$$

Por tanto,

$$\frac{x^2+c^2-2xc+y^2}{\frac{(a^2-cx)^2}{c^2}} = \frac{c^2}{a^2}.$$

De donde se tiene que

$$x^2+y^2+c^2 = a^2 + \frac{x^2c^2}{a^2}.$$

Denotando $b^2 = c^2-a^2$, se llega finalmente a la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

□

Proposición 5.32. *Los puntos de una parábola equidistan del foco y de su directriz.*

Demostración. Dada una parábola $\mathcal{C}(\omega)$, consideramos la referencia euclídea para la cual la parábola tiene como ecuación $y^2 = 2px$.

Sabemos que en este caso el foco de la parábola es el punto $F(\frac{p}{2}, 0)$ y la directriz es la recta $r \equiv x = -\frac{p}{2}$. Sea $X(x, y)$ un punto de la parábola, entonces la distancia $d(X, F)$ viene dada por

$$\begin{aligned} d(X,F)^2 &= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 \\ &= x^2 + \frac{p^2}{4} - xp + 2px \\ &= x^2 + \frac{p^2}{4} + xp \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \\ &= d(X, r). \end{aligned}$$

□

Recíprocamente.

Proposición 5.33. *Dado un punto F y una recta r tal que F no esté en la recta r, el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de la recta r y del punto F, es una parábola de foco F y de directriz r.*

Demostración. Sea p la distancia entre F y r y consideramos una referencia euclídea de modo que $F(\frac{p}{2}, 0)$ y $r \equiv x = -\frac{p}{2}$. Si $X(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, entonces $d(X, F) = d(X, r)$. Por tanto,

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

De donde se sigue que $y^2 = 2px$. □