Variedades Cuadráticas

Francisco Martín Cabrera

Departamento de Matemática Fundamental

Universidad de La Laguna

Islas Canarias. España

Índice

Referencias

[1] M. Anzola, J. Caruncho: *Problemas de Algebra*. Tomo 7.

[2] F. Ayres: *Geometría Proyectiva*. Serie Schaum, McGraw-Hill (1971).

[3] J. de Burgos: *Curso de Algebra y Geometría*. Alhambra.

[4] A. Doneddu: *Complementos de Geometría Algebraica*. Ed. Aguilar, Madrid.

[5] M. de Lanuza: *Geometría Analítica*. Ed. Gredos.

[6] J.L. Mataix Plana: *Problemas de Geometría Analítica*. Ed. Dossat.

[7] J. Rey Pastor, L.A. Santaló, Balanzat: *Geometría Analótica*. Ed. Lapelusz.

[8] L.A. Santaló: *Geometría Proyectiva*. Eudeba.

Autor: Francisco Martín Cabrera, Departamento Matemática Fundamental, Universidad de La Laguna, Islas Canarias, España

T E M A I

1. FORMAS BILINEALES

1.1. Formas bilineales. A lo largo de este tema supondremos que los cuerpos en que trabajamos tienen característica distinta de dos (más particularmente, se puede leer el texto pensando que el cuerpo involucrado es el de los números reales).

Definición 1.1. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Una aplicación $f : V \times V \longrightarrow K$ se dice que es una *forma bilineal*, si satisface las siguientes condiciones:
(i) $f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{x}', \vec{y}) = \lambda f(\vec{x}, \vec{y}) + \mu f(\vec{x}', \vec{y})$,
(ii) $f(\vec{x}, \lambda\vec{y} + \mu\vec{y}') = \lambda f(\vec{x}, \vec{y}) + \mu f(\vec{x}, \vec{y}')$,
para todo $\vec{x}, \vec{x}', \vec{y}, \vec{y}' \in V$ y todo $\lambda, \mu \in K$.

Esto es, las aplicaciones parciales

$$\begin{array}{rcll} f_{\vec{x}_0} : V & \longrightarrow & K, & \quad \vec{x}_0 \text{ fijo;} \\ \vec{y} & \longrightarrow & f(\vec{x}_0, \vec{y}), & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} f_{\vec{y}_0} : V & \longrightarrow & K, & \quad \vec{y}_0 \text{ fijo;} \\ \vec{x} & \longrightarrow & f(\vec{x}, \vec{y}_0), & \end{array}$$

son formas lineales.

El conjunto de las formas bilineales de V, denotado por $\mathcal{L}^2(V, K)$, tiene estructura de espacio vectorial sobre K con las operaciones:

$$\begin{array}{rcl} (f+g)(\vec{x}, \vec{y}) & = & f(\vec{x}, \vec{y}) + g(\vec{x}, \vec{y}), \\ (\lambda f)(\vec{x}, \vec{y}) & = & \lambda f(\vec{x}, \vec{y}). \end{array}$$

Es evidente que $f(\vec{x}, \vec{0}) = 0$ y que $f(\vec{0}, \vec{y}) = 0$.

Ejemplo 1.2.
- La aplicación $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por
$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_2$$
es una forma bilineal. En efecto, fácilmente se puede comprobar que las condiciones de bilinealidad se satisfacen.

- Si V es un espacio vectorial sobre K, y $\alpha : V \to K$, $\beta : V \to K$ son dos formas lineales, entonces la siguiente aplicación f dada por

$$\begin{aligned} f : V \times V &\longrightarrow K \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\longrightarrow f(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha(\vec{x})\beta(\vec{y}), \end{aligned}$$

es una forma bilineal sobre V.

- Una forma bilineal sobre V se dice que es *simétrica*, si $f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x})$, para todo $\vec{x}, \vec{y} \in V$. El conjunto de las formas bilineales simétricas S^2V^* es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}^2(V, K)$.
- Una forma bilineal sobre V se dice que es *antisimétrica*, si $f(\vec{x}, \vec{y}) = -f(\vec{y}, \vec{x})$, para todo $\vec{x}, \vec{y} \in V$. El conjunto de las formas bilineales antisimétricas Λ^2V^* es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}^2(V, K)$.

El espacio $\mathcal{L}^2(V, K)$ de la formas bilineales es suma directa del espacio S^2V^* de formas simétricas y del espacio Λ^2V^* de formas antisimétricas. Esto es,

$$\mathcal{L}^2(V, K) = \mathsf{S}^2V^* \oplus \Lambda^2V^*.$$

Para $f \in \mathcal{L}^2(V, K)$, se tiene que $f = f_{\mathbf{s}} + f_{\mathbf{a}}$, donde

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{s}}(\vec{x}, \vec{y}) &= \frac{1}{2}(f(\vec{x}, \vec{y}) + f(\vec{y}, \vec{x})), \\ f_{\mathbf{a}}(\vec{x}, \vec{y}) &= \frac{1}{2}(f(\vec{x}, \vec{y}) - f(\vec{y}, \vec{x})). \end{aligned}$$

Teniéndose que $f_{\mathbf{s}} \in \mathsf{S}^2V^*$ y $f_{\mathbf{a}} \in \Lambda^2V^*$.

Ejemplo 1.3. Para la forma lineal $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_2$ sobre $\mathbb{R}^2$, se tiene que

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{s}}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= \frac{1}{2}(3x_1y_2 + 3y_1x_2), \\ f_{\mathbf{a}}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= \frac{1}{2}(3x_1y_2 - 3y_1x_2). \end{aligned}$$

Matriz asociada a una forma bilineal

Supongamos que *dim* $V = n$, y sea $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ una base de V. Si f es una forma bilineal sobre V, entonces

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\textstyle\sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i, \sum_{j=1}^n y_j\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_iy_jf(\vec{e}_i, \vec{e}_j).$$

Si consideramos la matriz $A = (a_{ij})$, donde $a_{ij} = f(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, obtenemos, por un lado, que la expressión de la forma bilineal f está dada por

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_iy_j, \tag{1.1}$$

y, por otro, que matricialmente f se expresa

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^tAY.$$

Por tanto, tenemos definida una aplicación

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{L}^2(V,K) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n\times n}(K) & \\ f & \longrightarrow & A=(a_{ij}), & \qquad a_{ij}=f(\vec{e}_i,\vec{e}_j), \end{array}$$

que es un isomorfismo de espacios vectoriales.

- Una matriz A es *simétrica*, si para todo término a_{ij} de ella es tal que $a_{ij}=a_{ji}$. Se tiene que una matriz A es simétrica si y sólo si $A^{\mathrm{t}}=A$, donde A^{t} denota la traspuesta de A. También se tiene que una forma bilineal sobre V es simétrica si y sólo si está asociada a una matriz simétrica.
- Una matriz A es *antisimétrica*, si para todo término a_{ij} de ella es tal que $a_{ij}=-a_{ji}$. Se tiene que una matriz A es simétrica si y sólo si $A^{\mathrm{t}}=-A$. También se tiene que una forma bilineal sobre V es antisimétrica siy sólo si está asociada a una matriz antisimétrica.

Observación 1.4. Si V^* es el espacio vectorial de V. Se puede demostrar que el producto tensorial $V^*\otimes V^*$ es isomorfo a $\mathcal{L}^2(V,K)$. Por eso, es frecuente ver el conjunto de las formas bilineales denotado por $\otimes^2V^*=V^*\otimes V^*$. Así, la forma bilineal dada por la expresión (1.1), se puede poner

$$f=\textstyle\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\vec{e}_i^{\,*}\otimes\vec{e}_j^{\,*},$$

donde $\{\vec{e}_1^{\,*},\dots,\vec{e}_n^{\,*}\}$ es la base dual de $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$.

Recordamos la siguiente definición.

Definición 1.5. Dados dos espacios vectoriales V y W sobre el cuerpo K, se llama *producto tensorial* de V y W al par $(V\otimes W,\otimes)$ formado por un espacio vectorial $V\otimes W$ y una aplicación bilineal $\otimes: V\times W\to V\otimes W$ que satisface:

(i) $\otimes(V\times W)$ genera $V\otimes W$.

(ii) (*Propiedad de factorización universal*) Para todo espacio vectorial L y toda aplicación bilineal $f: V\times W\to L$, existe una única aplicación lineal $\hat{f}: V\otimes W\to L$ tal que $f=\hat{f}\circ\otimes$.

Se puede demostrar la existencia y unicidad, salvo isomorfismo, de $V\otimes W$ y, en general, se denota $\otimes(\vec{v},\vec{w})=\vec{v}\otimes\vec{w}$. En particular, $V^*\otimes V^*=\mathcal{L}^2(V,K)$, donde $\otimes(\alpha,\beta): V\times V\to K$ se define por $\otimes(\alpha,\beta)(\vec{x},\vec{y})=\alpha\otimes\beta(\vec{x},\vec{y})=\alpha(\vec{x})\beta(\vec{y})$. Asimismo, por el isomorfismo visto anteriormente, se puede decir que $\mathcal{M}_{n\times n}(K)=\mathcal{L}^2(V,K)=V^*\otimes V^*$.

Las formas bilineales simétricas S^2V^* es el subespacio vectorial de $\otimes^2V^*$ engendrado por los elementos $\alpha\otimes\beta+\beta\otimes\alpha$, donde $\alpha,\beta\in V^*$. Asimismo, las formas bilineales antisimétricas Λ^2V^* es el subespacio vectorial de $\otimes^2V^*$ engendrado por los elementos $\alpha\otimes\beta-\beta\otimes\alpha$, donde $\alpha,\beta\in V^*$.

Finalmente, dados dos espacios vectoriales V y W, el espacio $\mathcal{L}(V,W)$ de las aplicaciones lineales desde V en W se puede identificar con el producto tensorial $V^*\otimes W$. En efecto, si $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$ y $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_m\}$ son bases de V y W, respectivamente, y nos dan una aplicación lineal $f: V\to W$, entonces dicha aplicación está determinada por las imágenes

$$f(\vec{e}_j)=a_{1j}\vec{u}_1+\cdots+a_{mj}\vec{u}_m,$$

para $j=1,\dots,n$. Para un vector $\vec{x}=\sum_{j=1}^n x_j\vec{e}_j$ su imagen $f(\vec{x})$ viene dada por

$$f(\vec{x})=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^m x_ja_{ij}\vec{u}_i=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^m a_{ij}\vec{e}_j^{\,*}(\vec{x})\vec{u}_i=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^m a_{ij}(\vec{e}_j^{\,*}\otimes\vec{u}_i)(\vec{x}).$$

Así, f se expresa
$$f = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{e}_j^{\,*} \otimes \vec{u}_i.$$

Cambios de base

Sean $f : V \times V \longrightarrow K$ una forma bilineal y $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ bases de V. Supongamos A y B son las matrices asociadas a la forma bilineal con respecto de las bases dadas. Es decir, $A = (a_{ij}) = (f(\vec{e}_i, \vec{e}_j))$ y $B = (b_{ij}) = (f(\vec{u}_i, \vec{u}_j))$. Veamos como están relacionadas las matrices A y B.

Para ello, supongamos que la segunda base viene dada en función de la primera, esto es, para $j = 1, \ldots, n$ se tiene
$$\vec{u}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \vec{e}_i.$$

Denotemos por $P = (p_{ij})$ la matriz cuya columna j está formada por las componentes del vector $\vec{u}_j$ respecto de la primera base. Entonces sabemos que el cambio de componentes viene dado por
$$X = PX'.$$
Así, tenemos que
$$f(\vec{x}, \vec{y}) = X^t AY = (PX')^t A(PY') = X'^t P^t APY' = X'^t BY'.$$
Como la igualdad $X'^t P^t APY' = X'^t BY'$ se satisface para todo X', Y', se tiene que
$$B = P^t AP.$$

Definición 1.6. Se dice que dos matrices cuadradas A y B de orden n son *congruentes*, si existe una matriz cuadrada regular P de orden n tal que $B = P^t AP$.

Proposición 1.7. *Dos matrices están asociadas a una misma forma bilineal si y sólo si son congruentes.*

1.2. Formas cuadráticas.

Definición 1.8. Dada $f : V \times V \longrightarrow K$ una forma bilineal simétrica. Se llama *forma cuadrática* asociada a la forma bilineal f, a la aplicación
$$\begin{array}{rcl} \omega : V & \longrightarrow & K \\ \vec{x} & \longrightarrow & \omega(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x}). \end{array}$$
En este caso, la forma bilineal simétrica f se denomina *forma polar* de ω.

Como consecuencia de la definición de forma cuadrática tenemos las siguientes propiedades.

Proposición 1.9. *Si ω es una forma cuadrática de V con forma polar f, entonces para todo $\vec{x}, \vec{y} \in V$ y todo $\lambda \in K$ se satisfacen:*

(i) $\omega(\lambda\vec{x}) = \lambda^2\omega(\vec{x})$,
(ii) $\omega(\vec{0}) = 0$,
(iii) $\omega(\vec{x} + \vec{y}) = \omega(\vec{x}) + \omega(\vec{y}) + 2f(\vec{x}, \vec{y})$.

Demostración. Se siguen fácilmente a partir de las condiciones dadas en las definiciones de forma cuadrática y de forma bilineal simétrica. □

De la propiedad (iii) de la proposición anterior se deduce la siguiente fórmula que permite calcular la forma polar a partir de la expresión de la forma cuadrática,

$$f(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}\left(\omega(\vec{x}+\vec{y}) - \omega(\vec{x}) - \omega(\vec{y})\right). \tag{1.2}$$

Por consiguiente, si dos formas bilineales simétricas definen la misma forma cuadrática, entonces son iguales. Por tanto, podemos afirmar que existe una correspondencia biyectiva entre formas cuadráticas y formas bilineales simétricas de modo que a cada forma cuadrática ω se le hace corresponder su forma polar.

Ejemplo 1.10. Dada una aplicación $\omega : V \to K$, para verificar que ω es forma cuadrática, se determina la correspondiente polar f de ω utilizando la ecuación (1.2). Si f resultáse bilineal y $f(\vec{x},\vec{x}) = \omega(\vec{x})$, para todo $\vec{x}$, entonces se podría afirmar que ω es forma cuadrática. En caso contrario, ω no sería forma cuadrática.

Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x,y) = x^2 + y$, la correspondiente forma polar sería:

$$f((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = x_1x_2.$$

La aplicación f es bilineal. Sin embargo, como $f((x,y),(x,y)) = x^2 \neq \varphi(x,y)$, φ no es forma cuadrática.

En cambio, si tomamos $\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\omega(x,y) = x^2$, la correspondiente forma polar es bilineal y dada por $((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = x_1x_2$. Como $f((x,y),(x,y)) = x^2 = \omega(x,y)$, ω es forma cuadrática.

A veces la correspondiente f ni siquiera resulta bilineal. En tal caso, ya se podría afirmar que la aplicación ω no es forma cuadrática. Por ejemplo, si $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está dada por $\psi(x,y) = x^2+3$

Se comprueba sin dificultad que el conjunto $\mathcal{Q}(V,K)$ de las formas cuadráticas sobre un espacio vectorial V tiene estructura de espacio vectorial sobre K con las operaciones

$$\begin{array}{rcl}(\omega+\omega')(\vec{x}) &=& \omega(\vec{x}) + \omega'(\vec{x}),\\ (\lambda\omega)(\vec{x}) &=& \lambda\omega(\vec{x}).\end{array}$$

Definición 1.11. Sea $\omega : V \longrightarrow K$ una forma cuadrática y $f : V \times V \longrightarrow K$ su forma polar. Se denomina *aplicación lineal de polaridad* de ω, a la aplicación definida en el modo siguiente:

$$\begin{array}{rcl}\hat{f} : V &\longrightarrow& V^*\\ \vec{v} &\longrightarrow& \hat{f}(\vec{v}),\end{array}$$

donde $\hat{f}(\vec{v})$ es la forma lineal dada por:

$$\begin{array}{rcl}\hat{f}(\vec{v}) : V &\longrightarrow& K\\ \vec{x} &\longrightarrow& \hat{f}(\vec{v})(\vec{x}) = f_{\vec{x}}(\vec{v}) = f(\vec{x},\vec{v}).\end{array}$$

Se demuestra sin dificultad que la aplicación $\hat{f} : V \longrightarrow V^*$ es una aplicación lineal.

Si $dim\ V = n$, sea $\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$ una base de V y $\{\vec{e}_1^{\,*},\ldots,\vec{e}_n^{\,*}\}$ su base dual. Denotemos por $A = (a_{ij})$ la matriz asociada a la aplicación lineal $\hat{f}$ con respecto a dichas bases. Es decir, la matriz tal que

$$\hat{f}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i^{\,*}.$$

Entonces se tiene que

$$a_{ij} = \hat{f}(\vec{e}_j)(\vec{e}_i) = f(\vec{e}_i, \vec{e}_j),$$

por lo que la matrices de la forma polar y de la aplicación de polaridad coinciden.

Observación 1.12. Si $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ es una base de V y la forma polar f viene dada por $f = \sum_{i=1,j=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i^{\,*} \otimes \vec{e}_j^{\,*}$, entonces la aplicación de polaridad $g : V \to V^*$ está dada por

$$\hat{f} = \sum_{j=1,i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_j^{\,*} \otimes \vec{e}_i^{\,*},$$

donde $\{\vec{e}_j\}_{j=1}^{n}$ y $\{\vec{e}_i^{\,*}\}_{i=1}^{n}$ son las bases fijadas en V y V^*, respectivamente.

Definición 1.13. Se llama *rango de una forma cuadrática*, al rango de su aplicación de polaridad, o lo que es lo mismo, al rango de una matriz asociada a la forma polar.

Una forma cuadrática se dice que es *ordinaria*, si su rango es igual a la dimensión del espacio vectorial sobre el que está definida. Esto es, si su matriz asociada respecto de una base es regular.

Una forma cuadrática se dice que es *degenerada*, si su rango es menor que la dimensión del espacio vectorial sobre el que está definida. Esto es, si su matriz asociada respecto de una base es singular.

Sea $\omega : V \longrightarrow K$ una forma cuadrática sobre un espacio vectorial V, $dim\ V = n$, y sea $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ una base de V. Para todo $\vec{x} \in V$, se tiene

$$\omega(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j f(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = X^t A X = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j}^{n} a_{ij}x_i x_j.$$

Por tanto, una forma cuadrática puede ser expresada por la ecuación homogénea de segundo grado

$$\omega(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j}^{n} a_{ij}x_i x_j,$$

o bien, en forma matricial

$$\omega(\vec{x}) = X^t A X.$$

1.3. Diagonalización de formas cuadráticas.

En esta sección veremos que para toda forma cuadrática se puede busca una base de modo que, respecto de la cual, la forma cuadrática se expresa como suma de únicamente términos cuadráticos. Un resultado básico para ello es el siguiente.

Proposición 1.14. *Sea $\omega : V \longrightarrow K$ una forma cuadrática con forma polar f y sea $\vec{x} \in V$ tal que $\omega(\vec{x}) \neq 0$, entonces el conjunto $\{\vec{x}\}^f = \{\vec{y} \in V \mid f(\vec{x}, \vec{y}) = 0\}$ es un subespacio vectorial de V tal que*

$$V = \langle \vec{x} \rangle \oplus \{\vec{x}\}^f.$$

Demostración. En efecto, se sigue fácilmente que $\{\vec{x}\}^f$ es un subespacio vectorial. En efecto, si f es la forma polar de ω y g la aplicación de polaridad, entonces $g(\vec{x}) = f_{\vec{x}} \neq 0$ y $\{\vec{x}\}^f = \ker f_{\vec{x}}$.

Además, para todo $\vec{v} \in V$ se tiene

$$\vec{v} = \left(\vec{v} - \frac{f(\vec{x},\vec{v})}{\omega(\vec{x})}\vec{x}\right) + \frac{f(\vec{x},\vec{v})}{\omega(\vec{x})}\vec{x},$$

teniéndose que

$$f\left(\vec{x}, \left(\vec{v} - \frac{f(\vec{x},\vec{v})}{\omega(\vec{x})}\vec{x}\right)\right) = f(\vec{x},\vec{v}) - f(\vec{x},\vec{v}) = 0.$$

Por consiguiente, $V = \langle\vec{x}\rangle + \{\vec{x}\}^f$.

Veamos ahora que esta suma es directa. Sea $\vec{v} \in \langle\vec{x}\rangle \cap \{\vec{x}\}^f$, entonces $\vec{v} = \lambda\vec{x}$ y

$$0 = f(\vec{x},\vec{v}) = \lambda f(\vec{x},\vec{x}).$$

Lo que implica que $\lambda = 0$, ya que $\omega(\vec{x}) \neq 0$. Esto es, $\vec{v} = \vec{0}$. □

Lo que afirma la proposición anterior será esencial para demostrar que para toda forma cuadrática existe una base de modo que la matriz asociada con respecto a tal base es diagonal.

Proposición 1.15. *Dada una forma cuadrática $\omega : V \longrightarrow K$, $\dim V = n$, siempre existe una base de V respecto de la cual la matriz asociada es diagonal.*

Demostración. Supongamos que para todo $\vec{x} \in V$ es $\omega(\vec{x}) = 0$. Entonces, fijando una base cualquiera, la matriz asociada A es la matriz nula. En este caso, ya habríamos terminado la demostración puesto que la matriz nula es evidentemente diagonal.

Supongamos entonces que existe $\vec{x}_1 \in V$ tal que $\omega(\vec{x}_1) \neq 0$.

Según vimos en la proposición anterior podremos descomponer el espacio vectorial V de la siguiente manera:

$$V = \langle\vec{x}_1\rangle \oplus \{\vec{x}_1\}^f.$$

Sea $\{\vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ una base de $\{\vec{x}_1\}^f$. Entonces $f(\vec{x}_1, \vec{x}_i) = 0$, para $i = 2, \dots, n$, y la matriz asociada respecto de dicha base quedará de la forma

$$\begin{pmatrix} \omega(\vec{x}_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\vec{x}_2,\vec{x}_2) & \cdots & f(\vec{x}_2,\vec{x}_n) \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & f(\vec{x}_n,\vec{x}_2) & \cdots & f(\vec{x}_n,\vec{x}_n) \end{pmatrix}.$$

LLamemos A_1 a la matriz $A_1 = (f(\vec{x}_i, \vec{x}_j))$, para $i, j = 2, \dots n$.

Si $A_1 = (0)$, ya habríamos terminado , puesto que ya habríamos obtenido una base respecto de la cual la matriz asociada es diagonal.

Si $A_1 \neq (0)$, consideramos la restricción de la forma cuadrática ω al subespacio vectorial $\{\vec{x}_1\}^f$. Es decir, consideramos la forma cuadrática

$$\omega_1 : \{\vec{x}_1\}^f \longrightarrow K$$

Evidentemente la matriz asociada a ω_1 es la matriz A_1. Como $A_1 \neq (0)$, existirá un vector $\vec{y}_2 \in \{\vec{x}_1\}^f$ tal que $\omega_1(\vec{y}_2) \neq 0$. Entonces podemos descomponer $\{\vec{x}_1\}^f$ de la siguiente manera:

$$\{\vec{x}_1\}^f = \langle\vec{y}_2\rangle \oplus \{\vec{y}_2\}^f.$$

Tomamos ahora la base $\{\vec{y}_3, \ldots, \vec{y}_n\}$ de $\{\vec{y}_2\}^f$. De esta forma tenemos la base de V

$$\{\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \ldots, \vec{y}_n\}$$

respecto de la cual, la matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} \omega(\vec{x}_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega(\vec{y}_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & f(\vec{y}_3, \vec{y}_3) & \cdots & f(\vec{y}_3, \vec{y}_n) \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & f(\vec{y}_n, \vec{y}_3) & \cdots & f(\vec{y}_n, \vec{y}_n) \end{pmatrix}.$$

Realizando este procedimiento un número finito de veces llegaremos a obtener una matriz diagonal. □

El resultado anterior es equivalente a la siguiente proposición relativa a matrices.

Proposición 1.16. *Dada una matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$, existe alguna matriz regular $P \in GL(n; K)$ tal que $P^T AP$ es diagonal. Es decir, para toda matriz simétrica se puede encontrar una matriz diagonal congruente con ella.*

Método de Gauss de descomposición en cuadrados

Consideremos la forma cuadrática $\omega : V \longrightarrow K$ y $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ una base de V tal que la expresión de la forma cuadrática respecto de esa base sea

$$\omega(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

En primer lugar supongamos que $a_{11} \neq 0$. Si no fuera así, pero existiera algún $a_{ii} \neq 0$, entonces consideraríamos como nueva base $\{\vec{e}_i, \ldots, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, esto es, haríamos el cambio de coordenadas siguiente:

$$\begin{aligned} x'_i &= x_1, \\ x'_1 &= x_i, \\ x'_j &= x_j \ , \ j \neq 1 \ j \neq i. \end{aligned}$$

En el nuevo sistema de coordenadas será $a_{11} \neq 0$.

Si ocurriera el caso de que todos los a_{ii} fueran iguales a cero, pero existiera un $a_{ij} \neq 0$, haríamos el siguiente cambio:

$$\begin{aligned} x_j &= x'_i + x'_j, \\ x_k &= x'_k \ , \ k \neq j. \end{aligned}$$

Esto es, consideraríamos la base $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_i + \vec{e}_j, \ldots, \vec{e}_j, \ldots, \vec{e}_n\}$.

De esta forma el término $2a_{ij}x_ix_j$ quedaría,

$$2a_{ij}x'_i(x'_i + x'_j) = 2a_{ij}(x'_i)^2 + 2a_{ij}x'_ix'_j,$$

con lo cual ya habríamos conseguido un término en $(x'_i)^2$ con coeficiente no nulo. Es decir, con $a'_{ii} \neq 0$, y haríamos el cambio que indicamos al principio.

Por lo tanto, podemos suponer que $a_{11} \neq 0$. En este caso pondremos:

$$\begin{aligned}
\omega(\vec{x}) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + \alpha(x_2, \ldots, x_n) \\
&= a_{11}\left[x_1^2 + \frac{2a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + \cdots + \frac{2a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n\right] + \alpha(x_2, \ldots, x_n) \\
&= a_{11}\left[x_1^2 + 2x_1\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right) + \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2\right. \\
&\qquad \left. - \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2\right] + \alpha(x_2, \ldots, x_n) \\
&= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 - a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + \alpha(x_2, \ldots, x_n) \\
&= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + \beta(x_2, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n, \\
x_2' &= x_2, \\
&\cdots \\
x_n' &= x_n,
\end{aligned}$$

se obtiene la ecuación siguiente con respecto al nuevo sistema de coordenadas

$$\omega(\vec{x}) = a_{11}(x_1')^2 + \beta(x_2', \ldots, x_n').$$

Realizando este proceso con $\beta(x_2', \ldots, x_n')$, llegaríamos a

$$\omega(\vec{x}) = a_{11}(x_1'')^2 + b_{22}(x_2'')^2 + \gamma(x_3'', \ldots, x_n'').$$

Es evidente que después de un número finito de pasos llegaríamos a la expresión de $\omega(\vec{x})$ como suma de cuadrados.

Si deseamos obtener la base respecto de la cual ω tiene esta expresión, si C es la matriz tal que

$$X' = CX,$$

despejando de esta expresión obtenemos, $X = C^{-1}X'$, es decir, la matriz de cambio de coordenadas $P = (p_{ij})$, tal que $X = PX'$ es la matriz C^{-1}. Por tanto la nueva base vendrá relacionada con la primera de la forma,

$$\vec{u}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\vec{e}_i.$$

Es decir, el vector $\vec{u}_j$ de la nueva base es aquel cuyas coordenadas vienen dadas por la columna "j" de la matriz C^{-1}.

Ejercicios:

Diagonalizar las siguientes formas cuadráticas:

1. $\omega_1(\vec{x}) = x_0^2 + 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_0x_1 - 6x_1x_2 - 2x_0x_2$.

2. $\omega_2(\vec{x}) = x_0^2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_0x_1 + 4x_1x_2 - 2x_0x_2$.
3. $\omega_3(\vec{x}) = x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2$.

Diagonalización mediante operaciones elementales

Definición 1.17. Una *operación elemental* en una matriz consiste en lo siguiente:

(i) Permutar dos filas o columnas entre si.
(ii) A una fila o columna sumarle una combinación lineal de las demás.
(iii) Multiplicar una fila o columna por un escalar no nulo.

Dada la matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, llamaremos,
$E_f(A)$ = matriz que resulta de hacer la operación elemental E a las filas de la matriz A.
$E_c(A)$ = matriz que resulta de hacer la operación elemental E a las columnas de la matriz A.

Si I denota la matriz identidad, se tiene que:

$$E_f(A) = E_f(I)A, \quad E_c(A) = AE_c(I).$$

Por ejemplo. Si intercambiamos las filas i y j en las matriz A, resulta una matriz que es igual al producto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \dots & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0^{(ii)} & \dots & 1^{(ij)} & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \dots & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1^{(ji)} & \dots & 0^{(jj)} & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \dots & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ & & \dots & & \\ & & \dots & & \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

donde el superíndice entre paréntesis indica la posición del término en la matriz (para los demás casos, comprobarlo como ejercicio).

Denotaremos por $E(A)$ la matriz que resulta de hacer la operación elemental E, primero a las filas y después a las columnas de la matriz A. Entonces se verifica,

$$E(A) = E_c(E_f(A)) = E_c(E_f(I)A) = E_f(I)AE_c(I).$$

Además, se comprueba sin dificultad que $E_c(I) = (E_f(I))^T$.

Por tanto, la matriz $E(A)$ es congruente con la matriz A, es decir son matrices asociadas a una misma forma cuadrática respecto de distintas bases.

En conclusión, si mediante operaciones elementales efectuadas en las filas y luego en las columnas de una matriz A, llegamos a una matriz diagonal, esa matriz lo será respecto de la misma forma cuadrática, respecto de otra base.

Si queremos encontrar la base, respecto de la cual, la matriz asociada es $E(A)$, como $E(A) = E_f(I)AE_c(I) = P^TAP$, la matriz del cambio de base será $P = (p_{ij}) = E_c(I)$, es decir la nueva base tendrá como vector $\vec{u}_j$ aquel cuyas coordenadas correspondan con la columna "j" de la matriz $E_c(I)$, es decir

$$\vec{u}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\vec{e}_i.$$

Ejercicio:
Dada la forma cuadrática,

$$\begin{array}{rcl} \omega : \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z,t) & \longrightarrow & \omega(x,y,z,t) = 2x^2+8y^2+2z^2+t^2+8xy+6xz+4xt+8yz-2yt+6zt, \end{array}$$

diagonalizarla mediante operaciones elementales y dar una base respecto de la cual ω admita una expresión diagonal.

1.4. Formas cuadráticas reales. Teorema de Sylvester. Una forma cuadrática $\omega : V \longrightarrow K$, se dice que es *real*, si el cuerpo K es el de los números reales, esto es, $K = \mathbb{R}$.

Sea $\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\dim V = n$. Como ya sabemos, el rango de ω es el rango de su aplicación de polaridad y coincide con el rango de la matriz asociada a ω respecto de cualquier base.

Si $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ es una base tal que la matriz asociada es diagonal,

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_r & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

entonces $r = \mathit{rango}(\omega)$, podemos ordenar los d_i de tal manera que primero están los positivos y luego los negativos.

Definición 1.18. Se llama *signatura* de ω, al par (p,q), donde p es el número de elementos positivos que hay en la diagonal principal de una cualquiera de las matrices diagonales asociadas a la forma cuadrática y q el el número de elementos negativos.

Para que esta definición tenga sentido, tendremos que probar la siguiente proposición:

Teorema 1.19 (de Sylvester o Ley de inercia)**.** *El número de elementos positivos que hay en la diagonal principal de una cualquiera de las matrices diagonales asociadas a una forma cuadrática real, es el mismo; tal número no depende, pues, de la diagonalización que se considere de ω, sino que es un número intrínsecamente ligado a la forma cuadrática.*

Observación 1.20. Obsérvese que como consecuencia, también el número de elementos negativos ha de coincidir, puesto que $p + q = r = \mathit{rango}(\omega)$.

Demostración. Supongamos que existen dos bases $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, tales que

i) Respecto de la primera base es:

$$\omega(\vec{x}) = a_1^2 x_1^2 + \cdots + a_p^2 x_p^2 - a_{p+1}^2 x_{p+1}^2 - \cdots - a_r^2 x_r^2.$$

ii) Respecto de la segunda base es:

$$\omega(\vec{x}) = b_1^2 y_1^2 + \cdots + b_{p'}^2 y_{p'}^2 - b_{p'+1}^2 y_{p'+1}^2 - \cdots - b_r^2 y_r^2.$$

Supongamos que es $p > p'$. Consideremos los siguientes subespacios vectoriales de V,

$$\begin{aligned} U_1 &= \langle \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p \rangle, \\ U_2 &= \langle \vec{v}_{p'+1}, \ldots, \vec{v}_p, \vec{v}_{p+1}, \ldots, \vec{v}_r, , \vec{v}_{r+1}, \ldots, \vec{v}_n \rangle. \end{aligned}$$

Sabemos que, $dim(U_1 \cap U_2) = dim\, U_1 + dim\, U_2 - dim(U_1 + U_2)$, y puesto que $dim\ U_1 = p$ y $dim\ U_2 = n - p'$, se obtiene,

$$dim(U_1 \cap U_2) = p + n - p' - dim(U_1 + U_2) = (p - p') + (n - dim(U_1 + U_2) \geq p - p' > 0.$$

Por tanto existe un vector $\vec{x} \neq \vec{0}$ tal que $\vec{x} \in U_1 \cap U_2$. Ahora bién,

$$\vec{x} \in U_1 \Rightarrow \vec{x} = x_1 \vec{u}_1 + \cdots + x_p \vec{u}_p,$$

por tanto,

$$\omega(\vec{x}) = a_1^2 x_1^2 + \cdots + a_p^2 x_p^2 > 0.$$

Nótese que algún sumando tiene que ser no nulo. Pero por otra parte,

$$\vec{x} \in U_2 \Rightarrow \vec{x} = y_{p'+1} \vec{v}_{p'+1} + \cdots + y_p \vec{v}_p + y_{p+1} \vec{v}_{p+1} + \cdots + y_r \vec{v}_r + y_{r+1} \vec{v}_{r+1} + \cdots + y_n \vec{v}_n,$$

y por tanto,

$$\omega(\vec{x}) = -b_{p'+1}^2 y_{p'+1}^2 - \cdots - b_r^2 y_r^2 \leq 0.$$

Por tanto, hemos llegado a la cotradicción: $\omega(\vec{x}) > 0$ y $\omega(\vec{x}) \leq 0$. □

Observación 1.21. Nótese que $\omega(\vec{x})$ es mayor estrictamente que cero (en la primera expresión) puesto que si fuera cero se deduciría que todas las coordenadas de $\vec{x}$ respecto de la base $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ serían cero, con lo cual llegaríamos a que $\vec{x} = \vec{0}$. Sin embargo, $\omega(\vec{x})$ puede ser cero (en la segunda expresión), sin necesidad de que el vector sea nulo, puesto que las componentes que aparecen en la expresión de ω no son todas las coordenadas del vector, pudiendo ser esas coordenadas nulas.

Expresión canónica de una forma cuadrática

Sea $\omega : V \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática sobre el espacio vectorial real V con dim $V = n$; sean rango$(\omega) = r$ y sig$(\omega) = (p, q)$. Por tanto existe una base de V, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, con respecto a la cual la matriz asociada a ω es diagonal,

$$\begin{pmatrix} a_1^2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_p^2 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{p+1}^2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_r^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

Si tomamos la base,

$$\vec{e}_1' = \frac{\vec{e}_1}{a_1}, \dots, \vec{e}_r' = \frac{\vec{e}_r}{a_r}, \vec{e}_{r+1}' = \vec{e}_{r+1}, \dots, \vec{e}_n' = \vec{e}_n,$$

entonces

$$\omega(\vec{e}_i) = \frac{\omega(\vec{e}_i)}{a_i^2} = \pm\frac{a_i^2}{a_i^2} = \pm 1.$$

Por tanto, respecto de esta nueva base, la expresión de ω quedará,

$$\omega(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2,$$

para $i = 1, \dots, r$, y esta expresión recibe el nombre de *expresión canónica* de ω.

Definición 1.22. Una forma cuadrática real ω se dice que es *definida*, si $\omega(\vec{x}) = 0$ implica que $\vec{x} = \vec{0}$.

Proposición 1.23. *Si $\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma cuadrática real definida, entonces $\omega(\vec{x})$ tiene signo constante para todo $\vec{x} \in V - \{\vec{0}\}$.*

Demostración. Supongamos que la proposición fuese falsa, que existiesen dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de V, no nulos, tales que $\omega(\vec{x}) > 0$ y $\omega(\vec{y}) < 0$. En esta hipótesis, se pretende probar que ω se anularía en un vector no nulo; a este fin, considérese el vector $\lambda\vec{x} + \vec{y}$, donde λ es un número real cualquiera. Se tiene que $\omega(\lambda\vec{x} + \vec{y}) = \lambda^2\omega(\vec{x}) + 2\lambda f(\vec{x}, \vec{y}) + \omega(\vec{y})$, donde f es la forma polar de ω. Para que $\omega(\lambda\vec{x} + \vec{y})$ fuese cero es necesario y suficiente que λ sea una raíz de la ecuación

$$\lambda^2\omega(\vec{x}) + 2\lambda f(\vec{x}, \vec{y}) + \omega(\vec{y}) = 0,$$

cuyo discriminante, $4f(\vec{x}, \vec{y})^2 - 4\omega(\vec{x})\omega(\vec{y})$ es positivo, ya que $\omega(\vec{x}).\omega(\vec{y}) < 0$. Por tanto, existen dos raices distintas λ_1 y λ_2 tales que $\omega(\lambda_1\vec{x} + \vec{y}) = 0$ y $\omega(\lambda_2\vec{x} + \vec{y}) = 0$. Como ω es definida, se sigue que $\lambda_1\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$ y $\lambda_2\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$. Por tanto, $(\lambda_1 - \lambda_2)\vec{x} = \vec{0}$. De ahí que $\vec{x} = \vec{0}$, contradicción. Pues, $\omega(\vec{x}) > 0$ implica $\vec{x} \neq \vec{0}$. □

Definición 1.24. Dada una forma cuadrática $\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$, se tienen las siguientes definiciones:

(i) Se dice que ω es una forma cuadrática *definida positiva*, si $\omega(\vec{x}) > 0$, para todo $\vec{x} \in V - \{\vec{0}\}$.
(ii) Se dice que ω es una forma cuadrática *definida negativa*, si $\omega(\vec{x}) < 0$, para todo $\vec{x} \in V - \{\vec{0}\}$.
(iii) Se dice que ω es una forma cuadrática *semidefinida positiva*, si $\omega(\vec{x}) \geq 0$, para todo $\vec{x} \in V$ y no es definida.
(iv) Se dice que ω es una forma cuadrática *semidefinida negativa*, si $\omega(\vec{x}) \leq 0$, para todo $\vec{x} \in V$ y no es definida.
(vi) Se dice que ω es una forma cuadrática *positiva*, si $\omega(\vec{x}) \geq 0$, para todo $\vec{x} \in V$.
(vii) Se dice que ω es una forma cuadrática *negativa*, si $\omega(\vec{x}) \leq 0$, para todo $\vec{x} \in V$.

Proposición 1.25. *Sea $\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$, con* $\dim V = n$.

(i) *ω es definida positiva si y sólo si* $\mathrm{sig}(\omega) = (n, 0)$.
(ii) *ω es definida negativa si y sólo si* $\mathrm{sig}(\omega) = (0, n)$.
(iii) *ω es semidefinida positiva si y sólo si* $\mathrm{sig}(\omega) = (r, 0)$, *con $r < n$.*
(iv) *ω es semidefinida negativa si y sólo si* $\mathrm{sig}(\omega) = (0, r)$, *con $r < n$.*
(v) *ω es positiva si y sólo si* $\mathrm{sig}(\omega) = (r, 0)$, *con $r \leq n$.*
(vi) *ω es negativa si y sólo si* $\mathrm{sig}(\omega) = (0, r)$, *con $r \leq n$.*

Demostración.

i) " $\Rightarrow$ ". Supongamos que $\mathrm{sig}(\omega) = (p, q)$, con $q \neq 0$, entonces sería $\omega(\vec{e}_{p+q}) = -1$. Contradicción, puesto que es definida positiva. Por tanto debe de ser $\mathrm{sig}(\omega) = (p, 0)$. Si $p < n$, entonces sería $\omega(\vec{e}_n) = 0$, lo cual es también absurdo por ser definida. Así, tendrá que ser $\mathrm{sig}(\omega) = (n, 0)$.

" $\Leftarrow$ ". $\mathrm{sig}(\omega) = (n, 0)$ implica que $\omega(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 > 0$, para todo vector $\vec{x}$ no nulo. Por tanto, la forma cuadrática es definida positiva.

ii) Se demuestra de modo análogo al anterior.

iii) " $\Rightarrow$ ". Supongamos que $\mathrm{sig}(\omega) = (p, q)$, con $q \neq 0$, entonces sería $\omega(\vec{e}_{p+q}) = -1$. Contradicción, puesto que es semidefinida positiva. Por tanto debe de ser $\mathrm{sig}(\omega) = (p, 0)$. Si $p = n$, entonces sería definida positiva. Luego para que ω sea semidefinida positiva necesariamente $p < n$.

" $\Leftarrow$ ". $\mathrm{sig}(\omega) = (p, 0)$, $p < n$ implica que $\omega(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 \geq 0$. Además, $\omega(\vec{e}_n) = 0$. Por tanto, la forma cuadrática es semidefinida positiva.

iv) Se demuestra de forma análoga al anterior.

v) Es consecuencia de los anteriores.

vi) Es consecuencia de los anteriores.

$\square$

Formas cuadráticas sobre espacios vectoriales euclídeos. Diagonalización ortogonal de una forma cuadrática

Sea $\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática y V un espacio vectorial euclídeo. Es decir, hay un producto escalar definido sobre V.

Sean $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ y $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ dos bases ortonormales. Entonces sabemos que la matriz de cambio de base es una matriz ortogonal. Esto es, una matriz P tal que $P^{-1} = P^T$.

Luego, si es

$$\omega(\vec{x}) = X^T A X = X'^T A' X' \quad \Rightarrow \quad A' = P^T A P = P^{-1} A P,$$

y entonces las matrices A y A', además de ser congruentes, son semejantes.

Recordemos que:

Toda matriz real y simétrica es ortogonalmente diagonalizable. Esto es, existe una matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal y, además, los elementos de la diagonal principal son los autovalores de A, contados tantas veces como indique su multiplicidad.

Ejercicios:

1. Sea ω una forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^3$ equipado con el producto escalar usual y, respecto de la base ortonormal, $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, ω está dada por

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\sqrt{3}x_2x_3.$$

Diagonalizar ortogonalmente ω.

2. Dado V un espacio vectorial euclídeo de dimensión 3 y, para $\alpha \in \mathbb{R}$, considérese la familias de formas cuadráticas sobre $\mathbb{R}^3$ dadas por

$$\omega_\alpha(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2 + (1+\alpha)x_3^2 + 2\alpha x_1x_2 - 2\alpha x_1x_3,$$

respecto de la base ortonormal $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$. Consideremos $\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$, la forma cuadrática que respecto de la base canónica tiene asociada la matriz A.

(a) Diagonalícese ortogonalmente la forma cuadrática ω_α.
(b) Obténgase los valores de α para los que ω_α es definida y semidefinida.

Autor: Francisco Martín Cabrera, Departamento Matemática Fundamental, Universidad de La Laguna, Islas Canarias, España

1.5. Ejercicios.

1. Determinar cuales de las siguientes aplicaciones son formas lineales sobre $\mathbb{R}^3$. Escribimos $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. En caso afirmativo, hallar el núcleo y conjunto imagen correpondiente.
   (i) $f(\vec{u}) = 2x_1 - 3x_2$; (ii) $f(\vec{u}) = x_1 + x_2 + x_3$; (iii) $f(\vec{u}) = 3x_1 + x_2 + x_3^2$;
   (iv) $f(\vec{u}) = -x_1 + x_2 + 2x_3 + 1$; (v) $f(\vec{u}) = 5$; (vi) $f(\vec{u}) = 0$.
2. Para las formas lineales obtenidas en el ejercicio anterior, determinar sus componentes respecto de la base dual de $\{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$.
3. Para las formas lineales consideradas en los dos ejercicios anteriores, determinar sus componentes respecto de la base dual de $\{\vec{u}_1 = (1, 0, 0), \vec{u}_2 = (1, 1, 0), \vec{u}_3 = (1, 1, 1)\}$.
4. Determinar cuales de las siguientes aplicaciones son formas bilineales sobre $\mathbb{R}^2$. Escribimos $\vec{u} = (x_1, x_2), \vec{v} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.
   (i) $f(\vec{u}, \vec{v}) = 2x_1y_2 - 3x_2y_1$; (ii) $f(\vec{u}, \vec{v}) = x_1 + y_2$; (iii) $f(\vec{u}, \vec{v}) = 3x_2y_2$;
   (iv) $f(\vec{u}, \vec{v}) = x_1x_2 + y_1y_2$; (v) $f(\vec{u}, \vec{v}) = 1$; (vi) $f(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.
5. Fijando la base $\{\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)$ en $\mathbb{R}^2$. Para las formas bilineales obtenidas en el ejercicio anterior, hallar las correspondientes expresiones matriciales respecto de dicha base. Asímismo, hallar las correspondientes partes simétrica y antisimétrica de cada forma bilineal.
6. Fijando ahora la base $\{\vec{u}_1 = (1, -1), \vec{u}_2 = (1, 1)$ en $\mathbb{R}^2$. Para las mismas formas bilineales consideradas en los dos ejercicios anteriores, hallar las correspondientes expresiones matriciales de las formas bilineales respecto de la nueva base.
7. Sea f la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^2$ definida por $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 4x_2y_1 - x_2y_2$.
   (i) Hallar la matriz A de f en la base $\{\vec{u}_1 = (1, 1), \vec{u}_2 = (1, 2)\}$.
   (ii) Hallar la matriz B de f en la base $\{\vec{v}_1 = (1, -1), \vec{v}_2 = (3, 1)\}$.
   (iii) Hallar la matriz P tal que $P^tAP = B$.
   (iv) Hallar la parte simétrica de f.
   (v) Hallar la parte antisimétrica de f.
8. Dada la forma bilineal f sobre $\mathbb{R}^3$ definida por

$$f(\vec{u}, \vec{v}) = 2x_1y_1 - x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2,$$

   para todo $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, donde $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$ y $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3)$, se pide:
   a) Demostrar que f es simétrica.
   b) Dar la forma cuadrática ω que se define f.

c) Dar la aplicación lineal de polaridad $\hat{f}$ de ω. En particular, si $\vec{p} = (0, 1, 1)$, calcular $\hat{f}(\vec{p})$

d) Obtener el núcleo y el conjunto imagen de $\hat{f}$.

e) Si se considera el vector $\vec{p} = (1, 0, 0)$, hallar el conjunto $\{\vec{p}\}^f$ que consiste en todos los vectores $\vec{u}$ tales $f(\vec{p}, \vec{u}) = 0$.

9. Dada la aplicación $\omega : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida mediante:

$$\omega(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 2xy + 2yz,$$

Se pide:

a) Demostrar que ω es una forma cuadrática.

b) En caso afirmativo, hallar la aplicación lineal $\hat{f}$ de polaridad de ω. Asímismo, calcular la imagen de vector $(1, -1, 0)$ mediante dicha aplicación $\hat{f}$.

10. Dada la forma cuadrática $\omega : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida mediante:

$$\omega(x, y, z, t) = x^2 + 2y^2 + t^2 - 2xy + 2xt + 2yz + \alpha zt,$$

hállese $\alpha \in \mathbb{R}$ para que ω sea degenerada. Asimismo, hállese la forma polar y la aplicación lineal de polaridad de ω.

11. Dada la forma cuadrática $\omega : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\omega(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

hállese su forma polar, su aplicación lineal de polaridad y diagonalícese.

12. Exprésar la forma cuadrática $\omega : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\omega(x, y, z, t) \quad = \quad 2z^2 + t^2 - 2xy + 2xz + 4xt + 2yz - 4yt,$$

como *suma de cuadrados*.

13. Dada la forma cuadrática $\omega : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\omega(x, y, z) \quad = \quad x^2 + ay^2 + az^2 + 2yz,$$

hállese $a \in \mathbb{R}$ para que w sea semidefinida, indicando si lo es positiva o negativamente.

14. Dada la forma cuadrática $\omega : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\omega(x, y, z) \quad = \quad ax^2 + ay^2 - (a - 1)z^2 + 2xy,$$

con $a \in \mathbb{R}$ fijo, hállense el rango y la signatura de w para los distintos valores de a.

15. Estúdiese si son definidas o semidefinidas las formas cuadráticas de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$:

$$\omega_1(x, y, z) = x^2 - z^2 - 2xy + zx, \qquad \omega_2(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 5z^2 - 2xy + 6xz - 2yz,$$
$$\omega_3(x, y, z) = -x^2 - 2y^2 - z^2 + 2xy + 2yz.$$

16. Obténgase la forma canónica correspondiente a la forma cuadrática

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = -7x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 10x_1x_2 - 10x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

17. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 3 y $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base de V. Dada la familia de formas cuadráticas $\omega_\alpha : V \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\omega_\alpha(\vec{x}) = 2x_1^2 + (\alpha + 2)x_2^2 + (2\alpha - 1)x_3^2 + 4x_1x_2 + 2(2 - \alpha)x_2x_3 + 4x_1x_3,$$

para todo $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \in V$. Se pide:

(a) Dar las expresiones matriciales respecto de la base $\mathcal{E}$ de ω_α y su forma polar f_α correspondiente.

(b) Hallar la imagen del vector $\vec{e}_2 - \vec{e}_3$ mediante la aplicación lineal $\hat{f}_\alpha$ de polaridad de ω_α.

(c) Utilizando el método de los cuadrados de Gauss, diagonalizar ω_α.

(d) Dar la base de modo respecto de la cual ω_α está asociada a la matriz diagonal obtenida en el apartado (c).

(e) Dar el rango y la signatura de ω_α, para los distintos valores de α.

(f) Dar la expresión canónica de ω_0 y la base correspondiente a dicha expresión.

(g) Obtener el núcleo de la aplicación lineal $\hat{f}_0$ de polaridad de ω_0.

(h) Si se tiene el vector $\vec{y} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_3$, hallar la componente del vector $\vec{z} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ en $\{\vec{y}\}^f = \{\vec{x} \in V \mid f_1(\vec{y}, \vec{x}) = 0\}$, donde f_1 es la forma polar de ω_1.

Autor: Francisco Martín Cabrera, Departamento Matemática Fundamental, Universidad de La Laguna, Islas Canarias, España

TEMA II

2. VARIEDADES CUADRÁTICAS. ESTUDIO PROYECTIVO

2.1. Variedades cuadráticas reales.

Definición 2.1. Sea V un espacio vectorial real de dimensión mayor que 1 y sea el espacio vectorial $\mathcal{Q}(V,\mathbb{R})$ de las formas cuadráticas sobre V. Se denomina *variedad cuadrática* o *hipercuádrica* en el espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$, a todo punto $\langle\omega\rangle$ del espacio proyectivo $\mathcal{P}(\mathcal{Q}(V,\mathbb{R}))$. Los *ceros* de la variedad cuadrática $\langle\omega\rangle$ es el subconjunto de $\mathcal{P}(V)$ dado por

$$\mathcal{C}(\omega) = \{\langle\vec{x}\rangle \in \mathcal{P}(V)/\omega(\vec{x}) = 0\}.$$

Si $\dim \mathcal{P}(V) = 2$, la variedad cuadrática $\langle\omega\rangle$ se llama *cónica*.
Si $\dim \mathcal{P}(V) = 3$, la variedad cuadrática $\langle\omega\rangle$ se llama *cuádrica*.

Observación 2.2. En la definición anterior, hemos establecido que es diferente hablar de una variedad cuadrática $\langle\omega\rangle$ que considerar sus ceros $\mathcal{C}(\omega)$. Sin embargo, en lo sucesivo, por razón de simplicidad cometeremos un abuso de lenguaje diciendo $\mathcal{C}(\omega)$ para referirnos a la variedad cuadrática.

Al considerar variedades cuadráticas, las proyectividades descritas en la siguiente definición juegan un papel importante.

Definición 2.3. La *polaridad* de la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ es la proyectividad $\widetilde{f} : \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker \hat{f}) \to \mathcal{P}(V^*)$ que se deduce de la aplicación lineal de polaridad $\hat{f} : V \to V^*$ de la forma cuadrática no nula ω. Para un punto $Y \in \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker \hat{f})$, se dice que $\widetilde{f}(Y)$ es el *hiperplano polar* de Y y que Y es un *polo* de $\widetilde{f}(Y)$.

Ejemplo 2.4. En el plano proyectivo real $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ y respecto de una referencia proyectiva $\mathcal{R} = \{U_0, U_1, U_2; U\}$, consideramos la cónica

$$\mathcal{C}(\omega) \equiv x_0^2 - 2x_1x_2 = 0.$$

La matriz asociada a la forma cuadrática es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La aplicación lineal de polaridad, $\hat{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{3*}$, fijadas una base normalizada $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ de la referencia $\mathcal{R}$ y su dual $\{\vec{e}_0^*, \vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*\}$, está matricialmente dada por

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Nótese que $\ker \hat{f} = \{\vec{0}\}$, por lo que la polaridad $\widetilde{f}$ tiene todo $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ como conjunto de partida. Así, $\widetilde{g} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^{3*})$ y, fijadas la referencia $\mathcal{R}$ y su dual $\mathcal{R}^*$, $\widetilde{f}$ está matricialmente dada por

$$\rho \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Esto quiere decir que al punto P de coordenadas homogéneas (p_0, p_1, p_2) le corresponde su recta polar $\widetilde{f}(P)$ de coordenadas homogéneas $(a_0, a_1, a_2) = (p_0, -p_2, -p_1)$, calculadas a través de la ecuación matricial. Esto es, $\widetilde{f}(P) \equiv a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$.

Definición 2.5. Sea $\widetilde{f} : \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker \hat{f}) \to \mathcal{P}(V^*)$ una polaridad definida a partir de la forma cuadrática ω con forma polar f. Dos puntos $\langle\vec{x}\rangle = X$ e $\langle\vec{y}\rangle = Y$ de $\mathcal{P}(V)$ se dice que son *conjugados*, si $f(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Un punto $\langle\vec{x}\rangle = X \in \mathcal{P}(V)$ se dice que es *singular*, si es conjugado a todos los puntos de $\mathcal{P}(V)$, esto es, si $\vec{x} \in \ker \hat{f}$. El conjunto de los puntos singulares es $\mathcal{P}(\ker \hat{f})$.

Si f es la forma polar de una forma cuadrática no nula ω, entonces para $\langle\vec{y}\rangle = Y \in \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker \hat{f})$ se tiene

$$\widetilde{f}(Y) = \{\langle\vec{x}\rangle \in \mathcal{P}(V) \mid 0 = \hat{f}(\vec{y})(\vec{x}) = f(\vec{y}, \vec{x})\} = \mathcal{P}(\{\vec{y}\}^f),$$

donde $\{\vec{y}\}^f = \{\vec{x} \in V \mid f(\vec{x}, \vec{y}) = 0\}$. Esto es, el hiperplano polar $\widetilde{f}(Y)$ de Y está formado por los puntos X que son conjugados a Y.

Fijamos una referencia $\mathcal{R} = \{U_0, \ldots, U_n; U\}$ en $\mathcal{P}(V)$ y la referencia dual $\mathcal{R}^* = \{U_0^*, \ldots, U_n^*; U*\}$ en $\mathcal{P}(V^*)$ y tomamos bases normalizadas de dichas referencias $\{\vec{e}_0, \ldots, \vec{e}_n\}$ y su dual $\{\vec{e}_0^*, \ldots, \vec{e}*_n\}$. Para una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ se tiene una matriz. asociada A. Pues bien, para $X \in \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker \hat{f})$ con coordenadas homogéneas $(x_0, \ldots, x_n)$, si se tiene que $\widetilde{f}(X)$ tiene coordenadas homogéneas $(u_0, \ldots, u_n)$, entonces

$$\rho \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n0} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Esta es la ecuación matricial de la polaridad. Para hallar los puntos singulares, hay que determinar los puntos Q de cooordenadas homogéneas $(q_0, \ldots, q_n)$ tales que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n0} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}.$$

Observación 2.6. La variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ está constituida por todos aquellos puntos X que son conjugados consigo mismos, esto es, son autoconjugados. También se puede decir que la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ está formada por los puntos singulares y por aquellos puntos no singulares que pertenecen a su hiperplano polar.

Lema 2.7. *Hay puntos singulares, i.e.,* $\mathcal{P}(\ker \hat{f}) \neq \phi$*, si y sólo si* ω *es degenerada.*

Nótese que si dim $\mathcal{P}(V) = n$ y rango de ω es r, entonces $\dim(\ker \hat{f}) + r = n + 1$. Por lo que dim $\mathcal{P}(\ker \hat{f}) = n - r$.

Ejemplo 2.8. En el espacio proyectivo real $\mathcal{P}(\mathbb{R}^4)$ y respecto de una referencia proyectiva $\mathcal{R} = \{U_0, U_1, U_2, U_3; U\}$, consideramos la cuádrica

$$\mathcal{C}(\omega) \equiv x_0^2 + 4x_0x_1 - 2x_1x_2 = 0.$$

La matriz asociada a la forma cuadrática es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de ω es 3. Por tanto, ω es degenerada. La aplicación lineal de polaridad, $\hat{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{4*}$, fijadas una base normalizada $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de la referencia $\mathcal{R}$ y su dual $\{\vec{e}_0^*, \vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3\}$, está matricialmente dada por

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Nótese que $\ker \hat{f} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_0 = x_1 = x_2 = 0\} = \{\lambda \vec{e}_3 \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Luego el conjunto de puntos singulares está dado por

$$\mathcal{P}(\ker \hat{f}) = \{Q\},$$

donde $(0, 0, 0, 1)$ son unas coordendas homogéneas de del punto singular Q.

El conjunto de partida de la polaridad $\widetilde{f}$ es $\mathcal{P}(\mathbb{R}^4) - \{Q\}$. Así, $\widetilde{f} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^4) - \{Q\} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^{4*})$ y, fijadas la referencia $\mathcal{R}$ y su dual $\mathcal{R}^*$, $\widetilde{g}$ está matricialmente dada por

$$\rho \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

En particular, si un punto P tiene coordenadas homogéneas $(1, -1, 2, 1)$, le corresponde su plano polar $\widetilde{f}(P)$ de coordenadas homogéneas $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-1, 0, 1, 0)$, calculadas a través de la ecuación matricial. Esto es, $\widetilde{f}(P) \equiv -x_0 + x_2 = 0$.

Dados un espacio vectorial V y W un subespacio vectorial de V, recordamos que el *anulador* W^o de W es el conjunto de formas lineales α tales que $\alpha(\vec{w}) = 0$, para todo $\vec{w} \in W$. W^o es un subespacio vectorial del espacio vectorial dual V^*. Si dim V es finita, dim $W +$dim $W^o =$ dim V.

Asimismo, se prueba que $\mathcal{P}(W^o)$, subespacio proyectivo de $\mathcal{P}(V^*)$, está constituido por el conjunto de hiperplanos que contienen a $\mathcal{P}(W)$.

Lema 2.9. *Para $\mathcal{P}(V)$ con dimensión finita, el conjunto imagen de la polaridad $\widetilde{f}$ es igual al conjunto de hiperplanos que contienen los puntos singulares $\mathcal{P}(\ker \hat{f})$. Esto es, $\operatorname{Im} \widetilde{f} = \mathcal{P}((\ker \hat{f})^o)$.*

Demostración. El hiperplano polar U de un punto no singular P está formado por los puntos que son conjugados a P. En particular, los puntos singulares son conjugados P, luego $\mathcal{P}(\ker \hat{f}) \subseteq U = \widetilde{g}(P)$. Por tanto, $\widetilde{f}(P) = U \in \mathcal{P}((\ker \hat{f})^o)$. En conclusión, $\operatorname{Im} \widetilde{f} = \mathcal{P}(\operatorname{Im} \hat{f}) \subseteq \mathcal{P}((\ker \hat{f})^o)$.

Veamos que las respectivas dimensiones son coincidentes. Por un lado,

$$\dim(\operatorname{Im} \widetilde{f}) = \operatorname{rango}(\omega) - 1.$$

Por otro, $\dim(\ker \hat{f}) + \dim(\ker \hat{f})^o = n + 1$, lo que implica

$$\dim(\mathcal{P}((\ker \hat{f})^o) = \dim(\ker \hat{f})^o - 1 = n + 1 - \dim(\ker \hat{f}) - 1 = \operatorname{rango}(\omega) - 1.$$

Por tanto, $\operatorname{Im} \widetilde{f} = \mathcal{P}((\ker \hat{f})^o)$. □

Ejemplo 2.10. En el caso del ejemplo 2.8, el conjunto imagen de la polaridad $\widetilde{f}$ es el conjunto de planos que contienen al punto Q de coordenadas homogéneas $(0, 0, 0, 1)$.

$$\operatorname{Im} \widetilde{f} = \{\pi \mid \pi \text{ es un plano y } Q \in \pi\}.$$

En este caso, $\operatorname{Im} \widetilde{f}$ es el haz de planos que contienen a Q y es un subespacio proyectivo de dimensión 2 del espacio dual $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{4*})$.

2.2. Clasificación proyectiva de las variedades cuadráticas.

Desde el punto de vista proyectivo, las variedades cuadráticas se clasifican en la siguiente forma:

- $\mathcal{C}(\omega)$ es *ordinaria*, si ω es ordinaria. A su vez, teniendo en cuenta la signatura (p, q) de ω, una $\mathcal{C}(\omega)$ ordinaria puede ser
  a) *Real*, si $p \neq 0$ y $q \neq 0$.
  b) *Totalmente imaginaria*, si $p = 0$ ó $q = 0$.
- $\mathcal{C}(\omega)$ es *degenerada*, si ω es degenerada. Teniendo en cuenta la signatura (p, q) de ω, una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ degenerada puede ser
  (a) *Imaginaria*, si $p + q = r > 1$ y $p = 0$ ó $q = 0$.
  (b) *Real*, si $p \neq 0$ y $q \neq 0$.
  (c) *Producto de dos hiperplanos imaginarios*, si ω tiene rango 2 y signatura $(2, 0)$ ó $(0, 2)$.
  (d) *Producto de dos hiperplanos reales*, si ω tiene rango 2 y signatura es $(1, 1)$.
  (e) *Hiperplano doble*, si el rango de ω es 1.

Ejemplo 2.11. Se puede comprobar que la cónica del ejemplo 2.4 tiene rango 3 y con signatura $(2, 1)$. Por tanto, $\mathcal{C}(\omega) \equiv x_0^2 - 2x_1x_2 = 0$ es una cónica ordinaria real.

Ejemplo 2.12. La cuádrica del ejemplo 2.8 tiene rango 3 y con signatura $(1, 2)$. Por tanto, $\mathcal{C}(\omega) \equiv x_0^2 + 4x_0x_1 - 2x_1x_2 = 0$ es una cuádrica degenerada real de rango 3.

Ejemplo 2.13. La cuádrica $\mathcal{C}(\omega) \equiv x_1^2 + x_3^2 = 0$ es una cuádrica degenerada imaginaria de rango 2. Más concretamente, es el producto de dos planos imaginarios.

2.3. Apéndice: clasificaciones proyectivas de las cónicas y de las cuádricas.

Clasificación proyectiva de las cónicas. Dada una cónica $\mathcal{C}(\omega)$ en el plano proyectivo definida por la forma cuadrática ω y sea A su matriz asociada respecto de una cierta referencia proyectiva. Desde el punto de vista proyectivo, se tienen las siguientes alternativas:

i) Si $\operatorname{rango} A = 3$, la cónica es *ordinaria* y no tiene puntos singulares. Por tanto, hay dos posibilidades:

   a) La signatura de la forma cuadrática sea $\operatorname{sig}\omega = (3,0)$ ó $(0,3)$. Una ecuación canónica de la cónica es
   $$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0.$$
   En este caso se dice que la cónica es *totalmente imaginaria*.

   b) La signatura de la forma cuadrática sea $\operatorname{sig}\omega = (2,1)$ ó $(1,2)$. Una ecuación canónica de la cónica es
   $$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0.$$
   En este caso se dice que la cónica es *ordinaria real*.

ii) Si $\operatorname{rango} A = 2$, la cónica es *degenerada* y tiene un sólo punto singular. Hay dos alternativas:

   a) La signatura de la forma cuadrática sea $\operatorname{sig}\omega = (2,0)$ ó $(0,2)$. Una ecuación canónica de la cónica es
   $$x_0^2 + x_1^2 = 0.$$
   En este caso se dice que la cónica es *dos rectas imaginarias*. El punto singular es el único punto real de la cónica.

   b) La signatura de la forma cuadrática sea $\operatorname{sig}\omega = (1,1)$. Una ecuación canónica de la cónica es
   $$x_0^2 - x_1^2 = 0.$$
   En este caso se dice que la cónica es *dos rectas reales*. El punto singular es el punto de corte de las dos rectas.

iii) Si $\operatorname{rango} A = 1$, la cónica tiene una recta de puntos singulares. En este caso una ecuación canónica de la cónica es una expresión del tipo
   $$x_0^2 = 0.$$
   Lo que representa una *recta doble*.

Clasificación proyectiva de las cuádricas. Dada una cuádrica $\mathcal{C}(\omega)$ en el espacio proyectivo tridimensional definida por la forma cuadrática ω y sea A su matriz asociada respecto de una cierta referencia proyectiva. Desde el punto de vista proyectivo, se tienen las siguientes alternativas:

I) Si $\det(A) \neq 0$, la cuádrica es *ordinaria* y no tiene puntos singulares. A su vez, teniendo en cuenta la signatura, la cuádricas ordinarias se clasifican en el modo siguiente:

   i) *Cuádrica totalmente imaginaria.* En este caso, la signatura de la forma cuadrática es $\operatorname{sig}\omega = (4,0)$ ó $(0,4)$ y la cuádrica admite la ecuación canónica
   $$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

   ii) *Cuádrica ordinaria real no reglada.* En este caso, la signatura de la forma cuadrática es $\operatorname{sig}\omega = (3,1)$ ó $(1,3)$ y la cuádrica admite la ecuación canónica
   $$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Se puede probar que una cuádrica de este tipo no puede contener rectas.

iii) *Cuádrica ordinaria real reglada.* En este caso, la signatura de la forma cuadrática es $\operatorname{sig}\omega = (2,2)$ y la cuádrica admite la ecuación canónica

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Veremos mas adelante que una cuádrica de este tipo está formada por rectas.

II) Si $\det(A) = 0$, la cuádrica es *degenerada*. Dependiendo del rango, las cuádricas degeneradas se clasifican en el modo siguiente:

i) Si rango $(A) = 3$, la cuádrica admite un único puntos singular. En este caso hay dos posibilidades:

a) *Cuádrica imaginaria de rango* 3, cuando la signatura $\operatorname{sig}\omega = (3,0)$ ó $(0,3)$ y admite la ecuación canónica $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$.

b) *Cuádrica real de rango* 3, cuando la signatura *sig* $\omega = (2,1)$ ó $(1,2)$ y admite la ecuación canónica $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$.

ii) Si rango $(A) = 2$, la cuádrica admite una recta de puntos singulares. En este caso hay dos posibilidades:

a) *Dos planos imaginarios*, cuando la signatura $\operatorname{sig}\omega = (2,0)$ ó $(0,2)$ y admite la ecuación canónica $x_0^2 + x_1^2 = 0$.

b) *Dos planos reales*, cuando la signatura $\operatorname{sig}\omega = (1,1)$ y admite la ecuación canónica $x_0^2 - x_1^2 = 0$. La recta común de los dos planos está formada por los puntos singulares.

iii) Si rango $(A) = 1$, la cuádrica es un *plano doble* que está formado por los puntos singulares y admite la ecuación canónica $x_0^2 = 0$.

Veamos ahora algunas propiedades de las variedades cuadráticas en general.

Lema 2.14. *Sea una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ que contiene un hiperplano, entonces el rango de ω es a lo sumo* 2.

Demostración. Sea H un hiperplano que está contenido en una variedad cuadrática, entonces podemos considerar una referencia proyectiva $\{P_0, P_1, \ldots, P_n; S\}$ de modo que $P_1 = \langle \vec{p}_1 \rangle$, $\ldots$, $P_n = \langle \vec{p}_n \rangle$ sean puntos de H. Nótese que $\omega(\vec{p}_1) = 0, \ldots, \omega(\vec{p}_n) = 0$ y

$$f(\vec{p}_i, \vec{p}_j) = \frac{1}{2}\{\omega(\vec{p}_i + \vec{p}_j) - \omega(\vec{p}_i) - \omega(\vec{p}_j)\} = 0,$$

para $i, j = 1, \ldots, n$. Por lo que la ecuación de la variedad cuadrática para la referencia considerada es

$$a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + \cdots + 2a_{0n}x_0x_n = 0.$$

Luego se trata de una variedad cuadrática de rango 2 a lo sumo. □

Como consecuencia, una cónica ordinaria no puede contener una recta. Por el mismo argumento, una cuádrica ordinaria o una cuádrica degenerada de rango 3 no puede contener un plano.

Corolario 2.15. *Sea una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ de un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ de dimensión $n > 1$ y tal que la dimensión del conjunto de puntos singulares es menor que $n - 2$, entonces $\mathcal{C}(\omega)$ no puede contener un hiperplano.*

Demostración. Si hay un hiperplano contenido en la variedad cuadrática, entonces

$$\dim \mathcal{P}(\ker \hat{f}) = n - \text{rango}(\omega) \geq n - 2,$$

contradicción. □

Proposición 2.16. *Si Q es un punto singular de una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ y P es un punto de $\mathcal{C}(\omega)$ distinto de Q, entonces la recta PQ que une los puntos P y Q está contenida en la variedad cuadrática.*

Demostración. En efecto, sea $\langle \vec{x} \rangle = X \in PQ$, con $P = \langle \vec{p} \rangle$ y $Q = \langle \vec{q} \rangle$, entonces $\vec{x} = \lambda\vec{p} + \mu\vec{q}$. Luego,

$$\omega(\vec{x}) = \omega(\lambda\vec{p} + \mu\vec{q}) = \lambda^2\omega(\vec{p}) + \mu^2\omega(\vec{q}) + 2\lambda\mu f(\vec{p}, \vec{q}),$$

donde f es la forma polar de ω. Si Q es singular, $\omega(\vec{q}) = 0$ y $f(\vec{p}, \vec{q}) = 0$. Además, si $P \in C(\omega)$ se tiene que $\omega(\vec{p}) = 0$. Por tanto, $\omega(\vec{x}) = 0$, lo que implica $X \in \mathcal{C}(\omega)$. □

2.4. Incidencia de una recta y una variedad cuadrática.

Dada la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ y la recta PQ que une los puntos $P = \langle \vec{p} \rangle$ y $Q = \langle \vec{q} \rangle$. La intersección de la variedad cuadrática y la recta estará formada por los puntos $X = \langle \lambda\vec{p} + \mu\vec{q} \rangle$ que satisfagan la ecuación

$$\omega(\lambda\vec{p} + \mu\vec{q}) = 0,$$

es decir,

$$\lambda^2\omega(\vec{p}) + 2\lambda\mu f(\vec{p}, \vec{q}) + \mu^2\omega(\vec{q}) = 0,$$

recordemos que $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

a) Si $\omega(\vec{p}) \neq 0$, entonces toda solución (λ, μ) de la ecuación verifica que $\mu \neq 0$. En este caso, podemos dividir por μ^2 y se tiene

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \omega(\vec{p}) + 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) f(\vec{p}, \vec{q}) + \omega(\vec{q}) = 0.$$

Cuyas soluciones dependen de

$$\Delta = (f(\vec{p}, \vec{q}))^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{q}).$$

Así, si $\Delta > 0$, habrá dos puntos comunes a la variedad cuadrática y a la recta. En cambio, si $\Delta < 0$ la variedad cuadrática y la recta no tienen ningún punto en común. Finalmente, si $\Delta = 0$, la variedad cuadrática y la recta tendrán un sólo punto en común.

b) Si $\omega(\vec{q}) \neq 0$, entonces toda solución (λ, μ) de la ecuación verifica que $\lambda \neq 0$. En este caso, podemos dividir por λ^2 y se tiene

$$\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \omega(\vec{q}) + 2\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) f(\vec{p}, \vec{q}) + \omega(\vec{p}) = 0.$$

Igualmente, las soluciones dependen de

$$\Delta = (f(\vec{p}, \vec{q}))^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{q}).$$

Si $\Delta > 0$, habrá dos puntos comunes a la variedad cuadrática y a la recta. Si $\Delta < 0$ la variedad cuadrática y la recta no tienen ningún punto en común. Finalmente, si $\Delta = 0$, la variedad cuadrática y la recta tendrán un sólo punto en común.

c) Si $\omega(\vec{p}) = 0$ y $\omega(\vec{q}) = 0$, entonces se tiene la ecuación

$$2\lambda\mu f(\vec{p}, \vec{q}) = 0.$$

En esta situación tenemos dos alternativas:

i) Si $f(\vec{p}, \vec{q}) \neq 0$, esto es, $\Delta > 0$, entonces $\mu = 0$ ó $\lambda = 0$. Por tanto, P y Q son los únicos puntos de la recta r que están en $\mathcal{C}(\omega)$.

ii) Si $f(\vec{p}, \vec{q}) = 0$, esto es, $\Delta = 0$, entonces cualquier (λ, μ) satisface la ecuación. Por tanto, todos los puntos de la recta r están en $\mathcal{C}(\omega)$.

En resumen, se tienen las siguientes posibilidades:

i) Si $\Delta > 0$, habrá únicamente dos puntos comunes a la variedad cuadrática y a la recta. En este caso se dice que la recta es *secante* a la variedad cuadrática.

ii) Si $\Delta < 0$, la variedad cuadrática y la recta no tienen ningún punto en común. En este caso se dice que la recta es *exterior* a la variedad cuadrática.

iii) Cuando $\Delta = 0$ hay dos posibilidades:

a) $\omega(\vec{p}) \neq 0$ ó $\omega(\vec{q}) \neq 0$, entonces la recta y la variedad cuadrática tiene un único punto común.

b) $\omega(\vec{p}) = 0$ y $\omega(\vec{q}) = 0$, entonces la recta está contenida en la variedad cuadrática.

Definición 2.17. Una recta se dice que es *tangente* a una variedad cuadrática, si interseca a dicha variedad en un punto o bién la recta está totalmente contenida en la variedad cuadrática.

Lema 2.18. *Una recta PQ es tangente a la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ si y sólo si*

$$(f(\vec{p}, \vec{q}))^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{q}) = 0,$$

donde $P = \langle\vec{p}\rangle$ y $Q = \langle\vec{q}\rangle$.

Demostración. Aunque este lema sigue de lo dicho anteriormente, vamos a mostrar una demostración explícita. Si una recta es tangente entonces se tienen dos alternativas:

(i) $r \subseteq \mathcal{C}(\omega)$. En este caso, si $r = PQ$, se tiene que

$$\lambda^2\omega(\vec{p}) + 2\lambda\mu f(\vec{p}, \vec{q}) + \mu^2\omega(\vec{q}) = 0, \tag{2.3}$$

para todo $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. De esto se deduce, $\omega(\vec{p}) = \omega(\vec{q}) = f(\vec{p}, \vec{q}) = 0$.

(ii) $r \cap \mathcal{C}(\omega)$ es un único punto X. Entonces $\omega(\vec{p}) \neq 0$ ó $\omega(\vec{q}) \neq 0$. Supongamos que $\omega(\vec{p}) \neq 0$. Ello implica que $X = \langle\lambda\vec{p} + \mu\vec{q}\rangle \neq P$. Por tanto, $\mu \neq 0$ y en la ecuación (2.3) podemos dividir por μ^2 para obtener

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \omega(\vec{p}) + 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) f(\vec{p}, \vec{q}) + \omega(\vec{q}) = 0. \tag{2.4}$$

El punto X se determinará a partir de las soluciones de esta ecuación para $\frac{\lambda}{\mu}$. Como X es único, el discriminante de la ecuación será nulo. Esto es, $4((f(\vec{p}, \vec{q}))^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{q})) = 0$.

Recíprocamete, si $(f(\vec{p}, \vec{q}))^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{q}) = 0$, entonces se tienen dos alternativas

(i) $\omega(\vec{p}) = \omega(\vec{q}) = 0$. En este caso, también debe ser $f(\vec{p}, \vec{q}) = 0$. Ello implica que $r \subseteq \mathcal{C}(\omega)$.

(ii) $\omega(\vec{p}) \neq 0$ ó $\omega(\vec{q}) \neq 0$. Si $\omega(\vec{p}) \neq 0$, entonces P no está en $r \cap \mathcal{C}(\omega)$. Por lo que si (λ, μ) es solución de la ecuación (2.3), entonces $\mu \neq 0$. Dividiendo dicha ecuación por μ^2, se obtiene la ecuación (2.4) de segundo grado con discriminante nulo por hipótesis. Por tanto, tiene una única solución y $r \cap \mathcal{C}(\omega)$ es un único punto.

$\square$

Autor: Francisco Martín Cabrera, Departamento Matemática Fundamental, Universidad de La Laguna, Islas Canarias, España

2.5. Ejercicios.

Observación 2.19. La siguiente lista puede contener algún ejercicio que plantee un problema de variedades cuadráticas en el espacio afín E. Dicho tipo de ejercicio está aquí inluido porque los conceptos involucrados no son puramente afines. En realidad, un tal ejercicio únicamente involucra conceptos proyectivos, considerando las variedades cuadráticas en el espacio proyectivo $\mathcal{P}(V) = E \cup H_\infty$, donde H_∞ es el hiperplano del infinito.

Si $\{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ es una referencia afín de E, entonces $\{O, \langle\vec{e}_1\rangle, \dots, \langle\vec{e}_n\rangle; O+(\vec{e}_1+\dots+\vec{e}_n)\}$ es una referencia proyectiva de $\mathcal{P}(V)$ con la relación usual entre coordenadas afines y coordenadas homogéneas. El hiperplano H_∞ admite por ecuación $x_0 = 0$ con respecto a dicha referencia proyectiva.

1. Sea la cuádrica $4x^2 + 4y^2 - z^2 + 4z - 4 = 0$. Se pide:
   a) Dar la ecuación de la polaridad de la cuádrica.
   b) Hallar los puntos singulares.
   c) El plano polar de $P = (1, 1, 2)$ respecto de la cuádrica.
   d) Clasificar la cuádrica desde el punto de vista proyectivo.
2. En el plano afín real y respecto de una referencia afín, considérese la cónica $\mathcal{C}$ dada por la ecuación:
$$2 + x^2 + 2y^2 - 2x + 2axy = 0.$$
   Clasificar $\mathcal{C}$ desde el punto de vista proyectivo para los distintos valores de a.
3. Dada, en el espacio afín real y respecto de una referencia afín, la cuádrica $\mathcal{C}$ que, para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$, admite por ecuación:
$$a + x^2 + 2y^2 + bz^2 + 2xy + yz = 0.$$
   Se pide clasificar $\mathcal{C}$ desde el punto de vista proyectivo para los distintos valores de a y b.
4. En el espacio afín y respecto de una referencia afín, considérense las cuádricas que admiten por ecuaciones:
$$2 - 2y^2 - 3x + 3xy - z + xz = 0,$$
$$1 + 25x^2 + 4y^2 - 10x + 4y - 20xy = 0.$$
   Pruébese que dichas cuádricas son pares de planos y hallarlos.
5. ¿Qué valor hay que dar al parámetro λ para que la cónica
$$x^2 + 2y^2 - \lambda xy - x - 2 = 0$$
   esté formada por dos rectas?. Obtener además las rectas.

6. Demostrar que si una recta r está contenida en una cuádrica de rango 3, entonces r pasa por el punto singular de la cuádrica.
7. En el espacio afín y respecto de una referencia afín, considérense las cuádricas que, para $\lambda \in \mathbb{R}$, están dadas por la ecuación:
$$x^2 + y^2 - z^2 + 2\lambda xy + 2yz - 2x + 4y + 2z = 0.$$
Hallar el lugar geométrico de los puntos tales que, para dichas cuádricas, sean polos del plano $x - y = 0$.

Autor: Francisco Martín Cabrera, Departamento Matemática Fundamental, Universidad de La Laguna, Islas Canarias, España

T E M A III

3. VARIEDADES CUADRÁTICAS. ESTUDIO PROYECTIVO: CONTINUACIÓN

3.1. Subespacios proyectivos tangentes a una variedad cuadrática.

Proposición 3.1. *Dado un subespacio proyectivo $\mathcal{P}(W)$ de dimensión ≥ 1 de $\mathcal{P}(V)$ y una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ en $\mathcal{P}(V)$, entonces se tienen dos alternativas:*

- $\mathcal{C}(\omega) \cap \mathcal{P}(W)$ *es una variedad cuadrática en el espacio* $\mathcal{P}(W)$, *ó*
- $\mathcal{P}(W) \subseteq \mathcal{C}(\omega)$.

Demostración. En efecto, si consideramos la restricción de la forma cuadrática ω al subespacio vectorial W, $\omega_{|W} : W \longrightarrow \mathbb{R}$ es también una forma cuadrática. Si $\omega_{|W}$ es nula, entonces $\mathcal{P}(W) \subseteq \mathcal{C}(\omega)$. Por el contrario, si $\omega_{|W}$ es no nula, entonces

$$\mathcal{C}(\omega) \cap \mathcal{P}(W) = \mathcal{C}(\omega_{|W})$$

expresará una variedad cuadrática en el espacio $\mathcal{P}(W)$. $\square$

Definición 3.2. Se dice que el subespacio proyectivo $\mathcal{P}(W)$ de dimensión ≥ 1 es *tangente* a la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$, si existe un punto $P \in \mathcal{P}(W) \cap \mathcal{C}(\omega)$ tal que para todo $X \in \mathcal{P}(W) - \{P\}$, la recta PX es tangente a $\mathcal{C}(\omega)$.

Proposición 3.3. *Dado un subespacio proyectivo $\mathcal{P}(W)$ de dimensión ≥ 1. Entonces $\mathcal{P}(W)$ es tangente a una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ si y sólo si existe un punto $\langle \vec{p} \rangle = P \in \mathcal{P}(W)$ tal que para todo $\langle \vec{x} \rangle = X \in \mathcal{P}(W)$, se tiene $f(\vec{p}, \vec{x}) = 0$. Un tal punto P se denomina punto de tangencia del subespacio proyectivo $\mathcal{P}(W)$.*

Demostración. " $\Rightarrow$ "

Si $\mathcal{P}(W)$ es tangente a $\mathcal{C}(\omega)$, según la definición esto quiere decir que existe un punto $\langle \vec{p} \rangle = P \in \mathcal{P}(W) \cap \mathcal{C}(\omega)$ tal que para todo $\langle \vec{x} \rangle = X \in \mathcal{P}(W) - \{P\}$ la recta PX es tangente a $\mathcal{C}(\omega)$. Pero la condición de tangencia exige que el discriminante sea cero, luego

$$\Delta = (f(\vec{p}, \vec{x}))^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{x}) = 0.$$

Como $P \in \mathcal{C}(\omega)$, será $\omega(\vec{p}) = 0$, por lo que $f(\vec{p}, \vec{x}) = 0$.

" $\Leftarrow$ "

Si existe $\langle\vec{p}\rangle = P \in \mathcal{P}(W)$ tal que para todo $\langle\vec{x}\rangle = X \in \mathcal{P}(W)$ se tiene $f(\vec{p},\vec{x}) = 0$. En particular será $f(\vec{p},\vec{p}) = 0$, es decir $P \in \mathcal{P}(W) \cap \mathcal{C}(\omega)$. Además, para todo $X \in \mathcal{P}(W) - \{P\}$, la ecuación

$$\lambda^2\omega(\vec{p}) + \mu^2\omega(\vec{x}) + 2\lambda\mu f(\vec{p},\vec{x}) = 0,$$

tiene discriminante $(f(\vec{p},\vec{x}))^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{x}) = 0$, puesto que $f(\vec{p},\vec{x}) = 0$ y $\omega(\vec{p}) = 0$. En conclusión, la recta PX es tangente a la variedad cuadrática, para todo $X \in \mathcal{P}(W)$, es decir, $\mathcal{P}(W)$ es tangente a la variedad cuadrática. $\square$

Proposición 3.4. *Dado un subespacio proyectivo $\mathcal{P}(W)$ de dimensión ≥ 1. Entonces $\mathcal{P}(W)$ es tangente a una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ si y sólo si $\mathcal{P}(W) \cap \mathcal{C}(\omega)$ es una variedad cuadrática degenerada en el espacio $\mathcal{P}(W)$ ó $\mathcal{P}(W) \subseteq \mathcal{C}(\omega)$.*

Demostración.
" $\Rightarrow$ "

Si existe $\langle\vec{p}\rangle = P \in \mathcal{P}(W)$ tal que para todo $\langle\vec{x}\rangle = X \in \mathcal{P}(W)$ se tiene $f(\vec{p},\vec{x}) = 0$, entonces $\omega_W : W \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma cuadrática degenerada, ya que $\vec{p}$ es no nulo y está en el núcleo de su aplicación de polaridad. Por tanto, si ω_W es no nula

$$\mathcal{C}(\omega_W) = \mathcal{P}(W) \cap \mathcal{C}(\omega)$$

es una variedad cuadrática degenerada. Si ω_W es nula, $\mathcal{P}(W) \subseteq \mathcal{C}(\omega)$.
" $\Leftarrow$ "

Si $\mathcal{P}(W) \subseteq \mathcal{C}(\omega)$, entonces para $P \in \mathcal{P}(W)$ se tiene que la recta PX, donde $X \in \mathcal{P}(W)$, está contenida en $\mathcal{C}(\omega)$. Por consiguiente, PX es tangente. Lo que implica que $\mathcal{P}(W)$ es un subespacio proyectivo tangente a $\mathcal{C}(\omega)$.

Si $\mathcal{C}(\omega_W) = \mathcal{P}(W) \cap \mathcal{C}(\omega)$ es una variedad cuadrática degenerada, entonces ω_W es una forma cuadrática degenerada, lo cual quiere decir que existe $\vec{p} \in W$ no nulo tal que para todo $\vec{x} \in W$ se tiene $f(\vec{p},\vec{x}) = 0$. Por consiguiente, para $\langle\vec{p}\rangle = P \in \mathcal{P}(W)$ se tiene que para todo $\langle\vec{x}\rangle = X \in \mathcal{P}(W)$ se verifica $f(\vec{p},\vec{x}) = 0$. Lo que implica que $\mathcal{P}(W)$ es tangente a $\mathcal{C}(\omega)$. $\square$

Proposición 3.5. *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática degenerada de un espacio proyectivo de dimensión mayor que 1. Entonces un hiperplano es tangente si y sólo si el hiperplano contiene un punto singular.*

Demostración. Si un hiperplano contiene un punto singular Q, entonces existe un punto Q del hiperplano que es conjugado a todos los puntos de dicho hiperplano. Por tanto, el hiperplano es tangente.

Supongamos que un hiperplano U es tangente, entonces existe un punto $P \in U$ tal que P es conjugado a todo punto de U.

Si P es singular, se tiene lo afirmado.

Si P no es singular, entonces U es el hiperplano polar de P. Por consiguiente, U está en el conjunto imagen de la polaridad y debe contener a todos los puntos singulares. $\square$

Unas consecuencias del último resultado son las siguientes.

Corolario 3.6. *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática con un único punto singular Q de un espacio proyectivo de dimensión mayor que 1 y sea U un hiperplano. Entonces son equivalentes:*

(i) *U es tangente.*

(ii) *U contiene a Q.*

Demostración. Es inmediato a partir de los resultados anteriores. □

Corolario 3.7. *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática de un espacio proyectivo de dimensión mayor que 1 con un único punto singular Q y sea U un hiperplano, entonces son equivalentes:*

i) U no contiene a Q.

ii) $U \cap \mathcal{C}(\omega)$ es una variedad cuadrática ordinaria en el espacio U.

3.2. Variedad cuadrática tangente desde un punto a una variedad cuadrática.

Lema 3.8. *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática de un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ y sea P un punto de dicho espacio, se tiene:*

i) $\omega_P(\vec{x}) = (f(\vec{p},\vec{x}))^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{x})$, es una forma cuadrática.

ii) Si $P \in \mathcal{C}(\omega)$, la forma cuadrática ω_P es nula si y sólo si P es un punto singular de $\mathcal{C}(\omega)$.

iii) Si $P \notin \mathcal{C}(\omega)$, la forma cuadrática ω_P es nula si y sólo si $\mathcal{C}(\omega)$ es un hiperplano (doble).

Demostración. i) En efecto, si consideramos

$$f_P(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}\left(\omega_P(\vec{x}+\vec{y}) - \omega_P(\vec{x}) - \omega_P(\vec{y})\right),$$

se obtiene

$$f_P(\vec{x},\vec{y}) = f(\vec{p},\vec{x})f(\vec{p},\vec{y}) - f(\vec{x},\vec{y})\omega(\vec{p})).$$

De lo que se deduce que f_P es una forma bilineal simétrica. Además,

$$f_P(\vec{x},\vec{x}) = f(\vec{p},\vec{x})^2 - \omega(\vec{x})\omega(\vec{p}) = \omega_P(\vec{x}).$$

Por tanto, ω_P es una forma cuadrática.

ii) Si ω_P es nula y $P \in \mathcal{C}(\omega)$, entonces

$$f(\vec{p},\vec{x})^2 = \omega(\vec{p})\omega(\vec{x}) = 0,$$

para todo punto $X = \langle\vec{x}\rangle$. Por consiguiente, P es punto singular de $\mathcal{C}(\omega)$. Lo recíproco es inmediato.

iii)Si $P \notin \mathcal{C}(\omega)$ y la forma cuadrática ω_P es nula, entonces

$$\frac{f(\vec{p},\vec{x})^2}{\omega(\vec{p})} = \omega(\vec{x}).$$

Luego $\mathcal{C}(\omega)$ es el conjunto de puntos $X = \langle\vec{x}\rangle$ tales que $f(\vec{p},\vec{x})^2 = 0$, por lo que la variedad cuadrática es igual al hiperplano polar de P. Esto es,

$$\mathcal{C}(\omega) = \mathcal{C}(f(\vec{p},\vec{x})^2) = \widetilde{f}(P)^2.$$

Recíprocamente, si $\mathcal{C}(\omega)$ es un hiperplano. Una recta cualquiera PX que pase por P interseca con el hiperplano en un único punto, puesto que P no está en dicho hiperplano. Por tanto, la recta PX satisface la condición de tangencia

$$\omega_P(\vec{x}) = f(\vec{p},\vec{x})^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{x}) = 0.$$

Nótese que X es un punto arbitrario, por lo que ω_P es nula. □

Definición 3.9. Dados una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ que no sea un hiperplano doble y un punto P no singular. La variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega_P)$ se denomina *variedad cuadrática tangente* a $\mathcal{C}(\omega)$ desde P.

Observación 3.10. Según lo que vimos anteriormente, la ecuación de la variedad cuadrática tangente a $\mathcal{C}(\omega)$ desde P vendrá dada por:

$$f(\vec{p},\vec{x})^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{x}) = 0.$$

Es decir, la variedad tangente está formada por los puntos X tales que la recta PX es tangente a $\mathcal{C}(\omega)$.

Ejemplo 3.11. En el plano proyectivo, dada la cónica $\mathcal{C}(\omega)$ de ecuación

$$\mathcal{C}(\omega) \equiv -x_0^2 + 2x_1x_2 = 0.$$

Si consideramos el punto $P(1,1,1)$, la cónica tangente desde P a $\mathcal{C}(\omega)$ viene dada por

$$\mathcal{C}(\omega_P) \equiv (-x_0 + x_1 + x_2)^2 - 1\,(-x_0^2 + 2x_1x_2) = 0 \equiv (x_0 - x_1)^2 + (x_0 - x_2) = 0.$$

Esta cónica $\mathcal{C}(\omega_P)$ es el producto de dos rectas imaginarias.

Si ahora consideramos el punto $N(1,0,0)$, entonces $\mathcal{C}(\omega_N)$ está dada por

$$\mathcal{C}(\omega_N) \equiv (-x_0)^2 - (-1)(-x_0^2 + 2x_1x_2) = 0 \equiv x_1x_2 = 0.$$

La cónica $\mathcal{C}(\omega_N)$ es el producto de dos rectas reales que se cortan en N.

Lema 3.12. *Sea una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ que no sea un hiperplano doble y sea un punto P no singular.*

i) La variedad cuadrática tangente $\mathcal{C}(\omega_P)$ es degenerada y P es un punto singular de $\mathcal{C}(\omega_P)$.
ii) Si Q es un punto singular de $\mathcal{C}(\omega)$, entonces Q es punto singular de $\mathcal{C}(\omega_P)$.

Demostración. Al ser

$$f_P(\vec{p},\vec{y}) = f(\vec{p},\vec{p})f(\vec{p},\vec{y}) - f(\vec{p},\vec{y})\omega(\vec{p})) = 0,$$

se tiene que P es un punto singular de $\mathcal{C}(\omega_P)$.

Si $Q = \langle\vec{q}\rangle$ es punto singular de $\mathcal{C}(\omega)$, entonces

$$f_P(\vec{q},\vec{y}) = f(\vec{p},\vec{q})f(\vec{p},\vec{y}) - f(\vec{q},\vec{y})\omega(\vec{p})) = 0.$$

Por tanto, Q es punto singular de $\mathcal{C}(\omega_P)$. □

Observación 3.13. Nótese que para un punto P no singular y una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ que no sea hiperplano, la intersección de la variedad cuadrática tangente $\mathcal{C}(\omega_P)$ con la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ coincide con la intersección del hiperplano polar de P con $\mathcal{C}(\omega)$. En efecto, la primera intersección viene dada por

$$\left.\begin{array}{c} f(\vec{p},\vec{x})^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{x}) = 0, \\ \omega(\vec{x}) = 0, \end{array}\right\}$$

y la segunda intersección está dada por el siguiente sistema equivalente al anterior

$$\left.\begin{array}{c} f(\vec{p},\vec{x}) = 0, \\ \omega(\vec{x}) = 0, \end{array}\right\}.$$

Proposición 3.14. *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática que no sea un hiperplano y sea P un punto no singular. Entonces* *i) Si $P \in \mathcal{C}(\omega)$, entonces $\mathcal{C}(\omega_P)$ es un hiperplano coincidente con el hiperplano polar de P. Esto es, $\mathcal{C}(\omega_P) = \widetilde{f}(P)^2$.*

ii) Si $P \notin \mathcal{C}(\omega)$, entonces el conjunto de puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega_P)$ es igual al subespacio proyectivo que resulta de sumar el punto P a los puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega)$. En particular, en este caso se tiene $\text{rango}(\omega_P) = \text{rango}(\omega) - 1$.

Demostración.

i) Al ser $P \in \mathcal{C}(\omega)$, entonces $\mathcal{C}(\omega_P) \equiv (f(\vec{p}, \vec{x}))^2 = 0$. Sabemos que $f(\vec{p}, \vec{x}) = 0$ representa el hiperplano polar de P.

ii) Denotamos por $\mathcal{Q}$ el subespacio proyectivo formado por los puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega)$. Supongamos que $S = \langle \vec{s} \rangle$ es un punto singular de $\mathcal{C}(\omega_P)$, entonces $f_P(\vec{s}, \vec{y}) = 0$, para todo $\vec{y}$. Por consiguiente,

$$f(\vec{p}, \vec{s}) f(\vec{p}, \vec{y}) = \omega(\vec{p}) f(\vec{s}, \vec{y}).$$

Denotando $\lambda = f(\vec{p}, \vec{s})$ y $\mu = \omega(\vec{p}) \neq 0$, obtenemos la identidad $\lambda f(\vec{p}, \vec{y}) = \mu f(\vec{s}, \vec{y})$, para todo punto Y. Por tanto, $f(\lambda \vec{p} + \mu \vec{s}, \vec{y}) = 0$, para todo Y. Si $\lambda \vec{p} + \mu \vec{s} = 0$, entonces $S = \langle \frac{\lambda}{\mu} \vec{p} \rangle = P$ y S estaría en $P + \mathcal{Q}$. Si $\lambda \vec{p} + \mu \vec{s} = \vec{q} \neq 0$, entonces $Q = \langle \vec{q} \rangle$ sería un punto singular de $\mathcal{C}(\omega)$ y $S = \langle \mu \vec{s} \rangle = \langle -\lambda \vec{p} + \vec{q} \rangle \in P + \mathcal{Q}$.

Recíprocamente, es inmediato ver que todos los puntos de $P + \mathcal{Q}$ son puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega_P)$.

□

Ejemplo 3.15. En el espacio proyectivo tridimensional, sea el punto $P(1, 0, -1, 1)$ y la cuádrica $\mathcal{C}(\omega) \equiv -2x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. Como P está en $\mathcal{C}(\omega)$, se tiene que la cuádrica tangente desde P es su plano polar $\widetilde{f}(P)$ doble. Esto es,

$$\mathcal{C}(\omega_P) \equiv (-2x_0 - x_2 + x_3)^2 = 0.$$

En cambio, si consideramos el punto $A = (1, 2, 0, 0)$, la cuádrica tangente $\mathcal{C}(\omega_A)$ desde A será degenerada con un único punto singular A y vendrá dada por

$$\mathcal{C}(\omega_A) \equiv (-2x_0 + 2x_1)^2 - 2(-2x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0 \equiv 4x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 4x_0x_1 = 0.$$

3.3. $n + 1$-vértices autoconjugados.

Definición 3.16. Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ definida en un espacio proyectivo de dimensión n, P_0, P_1, $\ldots$ P_n forman un $n + 1$-*vértice autoconjugado* respecto de la variedad cuadrática, si son independientes y, además, son conjugados dos a dos. Esto es, $f(\vec{p}_i, \vec{p}_j) = 0$, para todo $i, j = 0, 1, \ldots, n$, con $i \neq j$.

Proposición 3.17. *Los puntos básicos de una referencia proyectiva $\mathcal{R}$ del espacio $\mathcal{P}(V)$ forman un $n+1$-vértice autoconjugado respecto de una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ si y sólo si la ecuación de la variedad cuadrática respecto de dicha referencia es $a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 = 0$. En tal caso la referencia $\mathcal{R}$ se dice que es autoconjugada.*

Demostración. Si $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \ldots, P_n; P\}$ es una referencia proyectiva del espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ tal que P_0, P_1, $\ldots$, P_n es un $n + 1$-vértice autoconjugado respecto de una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$. Puesto que $f(\vec{p}_i, \vec{p}_j) = 0$, para $i \neq j$, la ecuación de la variedad cuadrática con respecto a $\mathcal{R}$ es

$$a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 = 0.$$

Recíprocamente, si para una referencia $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \ldots, P_n; P\}$ tenemos para la variedad cuadrática una ecuación como la anterior, entonces $f(\vec{p}_i, \vec{p}_j) = 0$, para $i \neq j$. Por tanto, los puntos básicos de la referencia forman un $n+1$-vértice autoconjugado. □

Si P_0, P_1, ... , P_n es un $n+1$-*vértice autoconjugado* respecto de la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$, podemos elegir vectores $\vec{p}_i$ que definan P_i tales que $\omega(\vec{p}_i) = \pm 1$ ó 0. En efecto, si $\omega(\vec{p}_i\,') = \pm a_i^2 \neq 0$, tomamos $\vec{p}_i = \dfrac{1}{a_i}\vec{p}_i\,'$ como representante de P_i. La referencia proyectiva $\{P_0, P_1, \ldots, P_n; \langle \vec{p}_0 + \vec{p}_1 + \cdots + \vec{p}_n\rangle\}$ se denomina *referencia canónica de la variedad cuadrática*. Para esta referencia la ecuación de la variedad cuadrática es

$$\xi_0 x_0^2 + \xi_1 x_1^2 + \cdots + \xi_n x_n^2 = 0,$$

donde $\xi_i = \pm 1$ ó 0, esta ecuación se denomina *ecuación canónica* de la variedad cuadrática.

Ejemplo 3.18. En el espacio proyectivo tridimensional y respecto de una cierta referencia $\mathcal{R} = \{U_0, U_1, U_2, U_3; U\}$, se considera la cuádrica dada por

$$\mathcal{C}(\omega) \equiv -2x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Como la ecuación de $\mathcal{C}(\omega)$ sólo tiene términos cuadráticos, los puntos básicos U_0, U_1, U_2, U_3 forman un 4-vértice autoconjugado. Sin embargo, la referencia $\mathcal{R}$ no es canónica. Para obtener una referencia canónica de la cuádrica se toma una base normalizada $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathcal{R}$. A continuación, se consideran los vectores

$$\{\tfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$$

que son una base normalizada de una referencia canónica de la cuádrica

$$\{U_0, U_1, U_2, U_3; \langle \tfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_0 + \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\rangle\}.$$

La ecuación canónica de la cuádrica dada es $\mathcal{C}(\omega) \equiv -(x_0')^2 + (x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2 = 0$.

Ejemplo 3.19. Para una cierta referencia proyectiva $\mathcal{R} = \{U_0, U_1, U_2, U_3; U\}$, una cuádrica está dada por $\mathcal{C}(\omega) \equiv 2x_0^2 + 2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 4x_0x_1 = 0$. Deseamos encontrar un 4-vértice autoconjugado respecto de ella. Para construirlo, comenzamos con un punto P_0 que no pertenezca a $\mathcal{C}(\omega)$. Por ejemplo, $P_0 = U_0$ de coordenadas $(1, 0, 0, 0)$ respecto de $\mathcal{R}$. Su hiperplano polar es $\widetilde{f}(P_0) \equiv x_0 - x_1 = 0$. Tomamos ahora un punto P_1 de $\widetilde{f}(P_0)$ que no esté en $\mathcal{C}(\omega)$. Sea $P_1 = U_2$ de coordenadas $(0, 0, 1, 0)$ respecto de $\mathcal{R}$. Su hiperplano polar es $\widetilde{f}(P_1) \equiv x_2 = 0$. El punto P_2 lo tomamos en $\widetilde{f}(P_0) \cap \widetilde{f}(P_1)$ y de modo que no esté en $\mathcal{C}(\omega)$. Sea $P_2 = U_3$ de coordenadas $(0, 0, 0, 1)$ respecto de $\mathcal{R}$. Su hiperplano polar es $\widetilde{f}(P_2) \equiv x_3 = 0$. El punto P_3 necesariamente tiene que ser $P_3 = \widetilde{f}(P_0) \cap \widetilde{f}(P_1) \cap \widetilde{f}(P_2)$ con coordenadas $(1, 1, 0, 0)$ respecto de $\mathcal{R}$. Un 4-vértice autoconjugado es $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$. Nótese que la cuádrica es de rango 3. Por eso, únicamente tres P_0, P_1, P_2 de los cuatro vértices no están en $\mathcal{C}(\omega)$. El cuarto vértice, $P_3(1, 1, 0, 0)$, es el punto singular de $\mathcal{C}(\omega)$. Una referencia proyectiva autoconjugada es $\{P_0, P_1, P_2, P_3; U'(2, 1, 1, 1)\}$. Para esta referencia , la cuádrica está dada por $\mathcal{C}(\omega) \equiv 2(x_0')^2 - (x_1')^2 - (x_2')^2 = 0$.

Un referencia proyectiva canónica es $\{P_0, P_1, P_2, P_3; U''(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, 1, 1, 1)\}$. La correspondiente ecuación canónica es $\mathcal{C}(\omega) \equiv (x_0'')^2 - (x_1'')^2 - (x_2'')^2 = 0$.

3.4. Proyectividad inducida por una variedad cuadrática en una recta no tangente.

Sea r una recta de $\mathcal{P}(V)$ no tangente a la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$. Dicha recta no puede contener un punto singular, pues en tal caso verificaría la condición de tangencia. Por tanto, $r \subseteq \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker \hat{f})$, donde $\hat{f}$ es la aplicación de polaridad de ω. Si $X \in r$, entonces tiene sentido considerar su hiperplano polar $\widetilde{f}(X)$. Además, $r \not\subseteq \widetilde{f}(X)$. Pues, en caso contrario, para todo $Y \in r$, se tendría $f(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Por consiguiente,

$$f(\vec{x}, \vec{y})^2 - \omega(\vec{x})\omega(\vec{y}) = 0 - 0 = 0.$$

Resultando que r es tangente, contradicción. Del hecho $r \not\subseteq \widetilde{f}(X)$, se tiene que $r \cap \widetilde{f}(X)$ es un punto.

Proposición 3.20. *Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ y una recta r no tangente a ella. La aplicación $\varphi : r \to r$ dada por $\varphi(X) = r \cap \widetilde{f}(X)$, donde $\widetilde{f}$ es la polaridad de $\mathcal{C}(\omega)$, es una proyectividad biyectiva de r en si misma, denominada* proyectividad inducida *por $\mathcal{C}(\omega)$ en r. Los puntos dobles de φ son $r \cap \mathcal{C}(\omega)$.*

Como r es no tangente, si φ tiene puntos dobles, entonces necesariamente hay dos. Es decir, r es secante y $r \cap \mathcal{C}(\omega) = \{\text{dos puntos}\}$.

Demostración. Consideramos en r la referencia $\{P = \langle \vec{p} \rangle, Q = \langle \vec{q} \rangle ; \langle \vec{p} + \vec{q} \rangle\}$. Por tanto, se tiene $\{\vec{p}, \vec{q}\}$ es una base normalizada con respecto a dicha referencia de r. Sea $X = \langle \lambda_0 \vec{p} + \lambda_1 \vec{q} \rangle$ un punto cualquiera de la recta r. Supongamos que $\varphi(X) = \langle \mu_0 \vec{p} + \mu_1 \vec{q} \rangle$, entonces

$$f(\lambda_0 \vec{p} + \lambda_1 \vec{q}, \mu_0 \vec{p} + \mu_1 \vec{q}) = 0.$$

Por tanto,

$$\mu_1(\lambda_0 \omega(\vec{p}) + \lambda_1 f(\vec{p}, \vec{q})) + \mu_0(\lambda_0 f(\vec{p}, \vec{q}) + \lambda_1 \omega(\vec{q})) = 0.$$

De donde se deduce que el par (μ_0, μ_1) es proporcional al par $(\lambda_0 f(\vec{p}, \vec{q}) + \lambda_1 \omega(\vec{q}), -\lambda_0 \omega(\vec{p}) - \lambda_1 f(\vec{p}, \vec{q}))$. Luego se tiene la ecuación matricial

$$\rho \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\vec{p}, \vec{q}) & \omega(\vec{q}) \\ -\omega(\vec{p}) & -f(\vec{p}, \vec{q}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente, la aplicación φ es una proyectividad biyectiva, puesto que el determinante de una matriz asociada es igual a $-f(\vec{p}, \vec{q})^2 + \omega(\vec{p})\omega(\vec{q}) \neq 0$.

Además, si $\varphi(X) = X$, se tiene que $\{X\} = r \cap \widetilde{f}(X)$. Como X está en su hiperplano polar $\widetilde{f}(X)$, X pertenece a la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$. Recíprocamente, si $X \in r \cap \mathcal{C}(\omega)$, entonces $\varphi(X) = r \cap \widetilde{f}(X) = X$. □

Proposición 3.21. *La proyectividad φ inducida por una variedad cuadrática sobre una recta r no tangente es una involución. Además, si r es secante con $r \cap \mathcal{C}(\omega) = \{A, B\}$ y $\varphi(X) = X'$, con $X \neq X'$, entonces $(ABXX') = -1$.*

Demostración. Considerando la matriz asociada a φ obtenida en la demostración de la proposición anterior, tiene que

$$\begin{pmatrix} f(\vec{p},\vec{q}) & \omega(\vec{q}) \\ -\omega(\vec{p}) & -f(\vec{p},\vec{q}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(\vec{p},\vec{q}) & \omega(\vec{q}) \\ -\omega(\vec{p}) & -f(\vec{p},\vec{q}) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} f(\vec{p},\vec{q})^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{q}) & 0 \\ 0 & f(\vec{p},\vec{q})^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{q}) \end{pmatrix}.$$

De donde se deduce que $\varphi \circ \varphi$ es igual a la identidad.

Para ver que $(ABXX') = -1$. Consideramos en r la referencia $\{A = \langle\vec{a}\rangle, B = \langle\vec{b}\rangle; \langle\vec{a}+\vec{b}\rangle\}$. Para esta referencia una matriz asociada a φ es

$$\begin{pmatrix} f(\vec{a},\vec{b}) & 0 \\ 0 & -f(\vec{a},\vec{b}) \end{pmatrix}.$$

Por tanto, si $X = \langle\lambda_0\vec{a} + \lambda_1\vec{b}\rangle$, entonces $X' = \varphi(X) = \langle\lambda_0\vec{a} - \lambda_1\vec{b}\rangle$. Además, como $X \neq X'$, $\lambda_0 \neq 0$ y $\lambda_1 \neq 0$. Luego

$$(ABXX') = \frac{\lambda_0}{\lambda_0} : \frac{-\lambda_1}{\lambda_1} = -1.$$

□

Ejemplo 3.22. En el plano proyectivo, consideramos la cónica $\mathcal{C}(\omega) \equiv -x_0^2 + 2x_1x_2 = 0$ y la recta $r \equiv x_0 + x_1 - x_2 = 0$. Si tomamos los puntos $P(1,-1,0)$ y $Q(0,1,1)$ de r, se obtiene que $f(\vec{p},\vec{q}) = -1$, $\omega(\vec{p}) = -1$ y $\omega(\vec{q}) = 2$. Por lo que $\Delta = 3 > 0$, la recta r es secante a la cónica. Para la referencia de r dada por $\{P, Q; \langle\vec{p}+\vec{q}\rangle = \langle(1,0,1)\rangle\}$, se obtiene la ecuación de la proyectividad de r en r

$$\rho \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Los puntos dobles satisfacen $\rho\lambda_0 = -\lambda_0 + 2\lambda_1$ y $\rho\lambda_1 = \lambda_0 + \lambda_1$. Esto es, $0 = \lambda_0^2 + 2\lambda_0\lambda_1 - 2\lambda_1^2 = (\lambda_0 + \lambda_1)^2 - 3\lambda_1^2$. De ahí que $(\lambda_0, \lambda_1) = \rho(1-\sqrt{3}, -1)$ y $(\lambda_0, \lambda_1) = \rho(1+\sqrt{3}, -1)$. Los puntos dobles son $A = (1-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3}, -1)$ y $B = (1+\sqrt{3}, -2-\sqrt{3}, -1)$.

El punto $X(-1,3,2)$ de r tiene $(-1,2)$ como coordenadas en r y le corresponde el punto $\varphi(X)$ con coordenadas $(5,1)$ en r. Esto es, $\varphi(X) = (5,-4,1)$. Comprobamos que

$$(ABX\varphi(X)) = \frac{(1-\sqrt{3})2 - (-1)(-1)}{(1+\sqrt{3})2 - (-1)(-1)} : \frac{(1-\sqrt{3})5 - (-1)1}{(1+\sqrt{3})5 - (-1)1} = \frac{-11\sqrt{3}}{11\sqrt{3}} = -1.$$

3.5. Variedades cuadráticas tangenciales.

En este apartado, únicamente consideraremos variedades cuadráticas de un espacio proyectivo de dimensión mayor o igual que 2.

Si $\mathcal{C}(\omega)$ es una variedad cuadrática ordinaria, su polaridad $\widetilde{f} : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V^*)$ es biyectiva. Como el espacio vectorial V se puede considerar como el espacio dual de V^*, podemos considerar la aplicación inversa $\widetilde{f}^{-1} : \mathcal{P}(V^*) \to \mathcal{P}(V)$ como la polaridad de una variedad cuadrática en $\mathcal{P}(V^*)$.

Sea $\mathcal{R} = \{E_0, \ldots, E_n; E\}$ una referencia proyectiva de $\mathcal{P}(V)$ y $\{\vec{e}_0, \ldots, \vec{e}_n\}$ una base normalizada de $\mathcal{R}$. Entonces en $\mathcal{P}(V^*)$ se tiene la referencia $\mathcal{R}^* = \{E_0^*, \ldots, E_n^*; E^*\}$, denominada *dual* de $\mathcal{R}$, tal que el conjunto formado por $\{\vec{e}_0^*, \ldots, \vec{e}_n^*\}$, duales de $\{\vec{e}_0, \ldots, \vec{e}_n\}$, constituyen una base normalizada de $\mathcal{R}^*$.

Si A es la matriz asociada a $\mathcal{C}(\omega)$ respecto de $\mathcal{R}$, entonces la polaridad $\widetilde{f}$ viene matricialmente dada por $\rho U = AX$ con respecto a las referencias $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^*$. Por consiguiente, la proyectividad $\widetilde{f}^{-1}$ tiene la expresión matricial $\rho X = A^{-1}U$ respecto de las mismas referencias. Asimismo, $\widetilde{f}^{-1}$ es la polaridad de la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega^*)$ en $\mathcal{P}(V^*)$, donde ω^* es la forma cuadrática sobre V^* matricialmente dada por $\omega^*(u) = U^t A^{-1} U$ respecto de la base $\{\vec{e}_0^*, \ldots, \vec{e}_n^*\}$. Como $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}(A_{ij})$, donde (A_{ij}) es la matriz adjunta, podemos considerar como forma cuadrática $\omega^* : V^* \to \mathbb{R}$, dada por $\omega^*(U) = U^t(A_{ij})U$ y $\mathcal{C}(\omega^*)$ la variedad cuadrática correspondiente en $\mathcal{P}(V^*)$. Mostraremos que los elementos de $\mathcal{C}(\omega^*)$ son los hiperplanos tangentes a la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$. Esto justifica la siguiente definición.

Definición 3.23. Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ y A es la matriz asociada a la forma cuadrática ω sobre V. Si la matriz adjunta (A_{ij}) es no nula, a la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega^*) = \{U \in \mathcal{P}(V^*) \,|\, U^t(A_{ij})U = 0\}$, se denomina *variedad cuadrática tangencial* de $\mathcal{C}(\omega)$.

Proposición 3.24. *Si $\mathcal{C}(\omega)$ es una variedad cuadrática ordinaria, entonces $\mathcal{C}(\omega^*)$ es igual al conjunto de hiperplanos tangentes a $\mathcal{C}(\omega)$.*

Demostración. Si $U \in \mathcal{C}(\omega^*)$, entonces $U^t(A_{ij})U = 0$. El polo del hiperplano U es el punto P tal que $\rho U = AP$. Lo que implica que

$$U^t P = \rho U^t A^{-1} U = \frac{\rho}{\det(A)} U^t (A_{ij}) U = 0.$$

Por tanto, $P \in U$, siendo P conjugado a todos los puntos de U. Luego U es hiperplano tangente a $\mathcal{C}(\omega)$.

Recíprocamente, si U es hiperplano tangente a $\mathcal{C}(\omega)$, entonces hay un $P = \langle \vec{p} \rangle \in U$ tal que $f(\vec{p}, \vec{x}) = 0$, para todo $X = \langle \vec{x} \rangle \in U$. Como la variedad cuadrática es ordinaria, entonces U es el hiperplano polar de P y $P \in \mathcal{C}(\omega)$. Por tanto, $\rho U = AP$ y $P^t AP = 0$.

Veamos que $U \in \mathcal{C}(\omega^*)$. En efecto,

$$\rho U^t (A_{ij}) \rho U = P^t A^t (A_{ij}) AP = \det(A) P^t AP = 0.$$

□

Lema 3.25. *Supongamos que la dimensión de V es $n+1$ y sea $\omega^* : V^* \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática dada por $\omega^*(U) = U^t(A_{ij})U$, donde (A_{ij}) es la matriz adjunta de una matriz asociada a ω. Entonces ω^* es no nula si y sólo si el rango de ω es mayor o igual que n. Por tanto, las variedades cuadráticas $\mathcal{C}(\omega)$ que tiene su correspondiente variedad cuadrática tangencial $\mathcal{C}(\omega^*)$ son aquellas que a lo sumo tienen un único punto singular.*

Demostración. Si ω^* es no nula, entonces (A_{ij}) es no nula. Por tanto, la matriz A tiene algún adjunto no nulo, lo que implica que el rango de A es mayor o igual que n. Lo recíproco se sigue de modo inmediato. □

Un resultado más general que el referido a las variedades cuadráticas ordinarias es el siguiente.

Proposición 3.26. *Si $\mathcal{C}(\omega)$ es una variedad cuadrática con un punto singular a lo sumo, entonces $\mathcal{C}(\omega^*)$ es igual al conjunto de hiperplanos tangentes a $\mathcal{C}(\omega)$.*

Demostración. Si $U \in \mathcal{C}(\omega^*)$, entonces $U^t(A_{ij})U = 0$.

Si $(A_{ij})U$ es una matriz columna no nula, podemos considerar el punto P de coordenadas homogéneas $(A_{ij})U$. Entonces $U^tP = U^t(A_{ij})U = 0$. Esto es, $P \in U$, y para todo X de U, $U^tX = X^tU = 0$, se tiene que

$$X^tAP = X^tA(A_{ij})U = \det(A)X^tU = 0.$$

Por tanto, U es un hiperplano tangente $\mathcal{C}(\omega)$.

Si $(A_{ij})U$ es una matriz columna nula, entonces U es un punto singular de $\mathcal{C}(\omega^*)$. Por tanto, la matriz (A_{ij}) es no regular. Como se tiene la igualdad $(A_{ij})A = \det(A)I_{n+1}$, donde I_{n+1} es la matriz identidad, ello implica que la matriz A es también no regular. Por consiguiente, $\mathcal{C}(\omega)$ es degenerada con un único punto singular Q. El hecho de que $(A_{ij})U$ sea nula significa que $\sum_{j=0} A_{ij}u_j = 0$, para $i = 0, \ldots, n$. Pero estas sumas son los desarrollos de determinantes de matrices obtenidas a partir de A sustituyendo la fila i por la matriz fila $U^t = (u_0, \ldots, u_n)$. Esto es,

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ .. & .. & \ldots & .. \\ u_0 & u_1 & \ldots & u_n \\ .. & .. & \ldots & .. \\ a_{n0} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

estando U^t situada como fila i y para $i = 0, \ldots, n$. Si las filas i_1, i_2, $\ldots$, i_n de A son sus filas principales, esto es, determinan su rango, que es n, entonces

$$U^t = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(a_{i_j\,0}, a_{i_j\,1}, \ldots, a_{i_j\,n}).$$

Como Q es singular, se tiene que AQ es la matriz columna nula. Esto es, $a_{i0}q_0 + a_{i1}q_1 + \cdots + a_{in}q_n = 0$, siendo $Q^t = (q_0, q_1, \ldots, q_n)$. Teniendo esto en cuenta,

$$U^tQ = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(a_{i_j0}q_0 + a_{i_j1}q_1 + \cdots + a_{i_jn}q_n) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot 0 = 0.$$

Luego $Q \in U$ y se sigue que U es un hiperplano tangente ya que contiene un punto singular.

Veamos el recíproco. Sea U un hiperplano tangente a $\mathcal{C}(\omega)$, entonces existe un punto $Q = \langle \vec{q} \rangle$ de $U \cap \mathcal{C}(\omega)$ tal que $f(\vec{q}, \vec{x}) = 0$, para todo $X = \langle \vec{x} \rangle \in U$.

Si Q no es singular, entonces U es el hiperplano polar de Q. Por tanto, $\rho U = AQ$ y se tiene que $\rho U^t(A_{ij})\rho U = Q^tA^t(A_{ij})AQ = \det(A)Q^tAQ = 0$. Luego $U \in \mathcal{C}(\omega^*)$.

Si Q es singular, teniendo en cuenta que la imagen de la polaridad $\widetilde{f}$ está formada por los hiperplanos que contienen los puntos singulares, entonces U es el hiperplano polar de un punto P no singular, ya que $Q \in U$. Lo que implica $\rho U = AP$ y, además,

$$\rho U^t(A_{ij})\rho U = P^tA^t(A_{ij})AP = \det(A)P^tAP = 0.P^tAP = 0.$$

Por tanto, $U \in \mathcal{C}(\omega^*)$. □

Observación 3.27. Si la dimensión del subespacio proyectivo de puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega)$ es mayor o igual que 1, todo hiperplano tiene al menos un punto singular. Luego todo hiperplano es tangente. Por otro lado, el rango de la forma cuadrática es menor o igual que $n - 1$, por lo que la matriz adjunta es nula. En esta situación, no tiene sentido hablar de la variedad cuadrática tangencial.

Ejemplo 3.28. En el plano proyectivo, si se considera la cónica $\mathcal{C}(\omega) \equiv x_0^2 + x_2^2 + 2x_0x_1 = 0$, la correspondiente cónica tangencial está dada por $\mathcal{C}(\omega^*) \equiv u_1^2 - u_2^2 - 2u_0u_1 = 0$.

Ejemplo 3.29. En el espacio proyectivo tridimensional $\mathcal{P}(\mathbb{R}^4)$, sea la cuádrica $\mathcal{C}(\omega) \equiv 4x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 4x_0x_1 = 0$. Es una cuádrica degenerada con un único punto singular $Q(1,2,0,0)$. Su cuádrica tangencial es $\mathcal{C}(\omega^*) \equiv u_0^2 + 4u_1^2 + 4u_0u_1 = 0$. Está formada por los planos que contienen a Q. Como cuádrica, es un hiperplano doble $(u_0 + 2u_1)^2 = 0$ del espacio proyectivo dual $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{4*})$.

3.6. Apéndice II: Cuádricas ordinarias regladas.

Definición 3.30. Se dice que una cuádrica es *reglada*, cuando está formada por rectas.

Veamos ahora, cuándo una cuádrica ordinaria es reglada.

Si su ecuación canónica es
$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$
como no contiene ningún punto real, no puede contener rectas.

Si su ecuación canónica es
$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,$$
cortando con el plano $x_3 = 0$, obtenemos
$$\begin{aligned} x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 &= 0, \\ x_3 &= 0, \end{aligned}$$
que no tiene solución en el espacio proyectivo. Por tanto, como una recta y un plano siempre tienen un punto en común, la cuádrica no puede contener una recta ya que entonces contendría al punto de intersección de esa recta con el plano $x_3 = 0$.

Si la ecuación es
$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0,$$
entonces $(x_0+x_2)(x_0-x_2) = (x_3+x_1)(x_3-x_1)$. Por tanto, el par (x_0+x_2, x_3-x_1) es proporcional al par (x_3+x_1, x_0-x_2). Asimismo, el par (x_0+x_2, x_3+x_1) es proporcional al par (x_3-x_1, x_0-x_2).

Recordamos, que dos pares de números (a,b) y (c,d) son proporcionales si y sólo si existe $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ tal que $\lambda(a,b) = \mu(c,d)$.

Luego, hay dos familias de rectas que están contenidas en la cuádrica. Por un lado, las rectas, que denominamos familia (I),
$$\begin{aligned} \lambda(x_0 + x_2) + \mu(x_3 + x_1) &= 0, \\ \mu(x_0 - x_2) + \lambda(x_3 - x_1) &= 0, \end{aligned}$$
donde $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$. Y por otro, las rectas, que denominamos familia (II),
$$\begin{aligned} \alpha(x_0 + x_2) + \beta(x_3 - x_1) &= 0, \\ \beta(x_0 - x_2) + \alpha(x_3 + x_1) &= 0, \end{aligned}$$
donde $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$.

Por tanto, si la signatura es $(2,2)$, hay dos familias de rectas formando parte de la cuádrica.

Lema 3.31. *Una recta de la familia (I) y una recta de la familia (II) siempre se cortan en un único punto.*

Demostración. Sean las rectas

$$\begin{aligned}\lambda(x_0+x_2)+\mu(x_3+x_1) &= 0,\\ \mu(x_0-x_2)+\lambda(x_3-x_1) &= 0,\end{aligned}$$

donde $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$, y

$$\begin{aligned}\alpha(x_0+x_2)+\beta(x_3-x_1) &= 0,\\ \beta(x_0-x_2)+\alpha(x_3+x_1) &= 0,\end{aligned}$$

donde $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$. Considerando la matriz asociada del sistema formado por las cuatro ecuaciones se tiene que

$$\text{rango}\begin{pmatrix}\lambda & \mu & \lambda & \mu\\ \mu & -\lambda & -\mu & \lambda\\ \alpha & -\beta & \alpha & \beta\\ \beta & \alpha & -\beta & \alpha\end{pmatrix}=\text{rango}\begin{pmatrix}\lambda & \mu & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\mu & \lambda\\ \alpha & 0 & 0 & \beta\\ 0 & \alpha & -\beta & 0\end{pmatrix}.$$

Puesto que si C_1, C_2, C_3 y C_4 son las columnas de la primera matriz, entonces $\frac{1}{2}(C_1+C_3)$, $\frac{1}{2}(C_2+C_4)$, $\frac{1}{2}(C_3-C_1)$ y $\frac{1}{2}(C_4-C_2)$ son las columnas de la segunda matriz. Es fácil ver que el determinante de la segunda matriz es nulo y considerando los siguientes menores de orden 3 de la segunda matriz:

$$\begin{vmatrix}\lambda & \mu & 0\\ 0 & 0 & -\mu\\ \alpha & 0 & 0\end{vmatrix}=-\alpha\mu^2,\qquad \begin{vmatrix}\mu & 0 & 0\\ 0 & -\mu & 0\\ 0 & 0 & \beta\end{vmatrix}=-\beta\mu^2,$$

$$\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\mu & \lambda\\ 0 & -\beta & 0\end{vmatrix}=\beta\lambda^2,\qquad \begin{vmatrix}\lambda & \mu & 0\\ 0 & 0 & \lambda\\ 0 & \alpha & 0\end{vmatrix}=-\alpha\lambda^2.$$

Si todos estos menores fuesen igual a cero, entonces $(\alpha,\beta)=(0,0)$, contradicción. Luego el rango de la matriz asociada del sistema es 3, por lo que la intersección de las dos rectas es un punto. □

Lema 3.32. *Dos rectas distintas de una misma familia tienen intersección vacía.*

Demostración. Sean, por ejemplo, dos rectas de la familia (I):

$$\begin{aligned}\lambda(x_0+x_2)+\mu(x_3+x_1) &= 0,\\ \mu(x_0-x_2)+\lambda(x_3-x_1) &= 0,\end{aligned}$$

donde $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$, y

$$\begin{aligned}\lambda_0(x_0+x_2)+\mu_0(x_3+x_1) &= 0,\\ \mu_0(x_0-x_2)+\lambda_0(x_3-x_1) &= 0,\end{aligned}$$

donde $(\lambda_0, \mu_0) \neq (0,0)$. Considerando el sistema formado por las cuatro ecuaciones y calculando el determinante de la matriz asociada obtenemos

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \lambda & \mu \\ \mu & -\lambda & -\mu & \lambda \\ \lambda_0 & \mu_0 & \lambda_0 & \mu_0 \\ \mu_0 & -\lambda_0 & -\mu_0 & \lambda_0 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ \mu & -\lambda & -\mu & \lambda \\ \lambda_0 & \mu_0 & 0 & 0 \\ \mu_0 & -\lambda_0 & -\mu_0 & \lambda_0 \end{vmatrix} = -4(\mu\lambda_0 - \lambda\mu_0)^2.$$

Luego las dos rectas tienen intersección si y sólo si $\mu\lambda_0 - \lambda\mu_0 = 0$. Ello sucede sólo cuando (λ_0, μ_0) es proporcional a (λ, μ). Por consiguiente, las dos rectas son distintas si y sólo si el determinante de la matriz asociada al sistema es distinto de cero. En tal caso, las dos rectas son disjuntas.

Para dos rectas de la familia (II), la demostración es similar. □

Lema 3.33. *Dada una cuádrica ordinaria reglada $\mathcal{C}(\omega)$ y P un punto de la cuádrica, entonces existe una única recta de cada familia, (I) y (II), que pasa por P.*

Demostración. En efecto, sea la cuadrica ordinaria reglada $\mathcal{C}(\omega) \equiv x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ y $P = (p_0, p_1, p_2, p_3) \in \mathcal{C}(\omega)$. Consideremos una recta de la familia (I)

$$\begin{aligned} \lambda(x_0 + x_2) + \mu(x_3 + x_1) &= 0, \\ \mu(x_0 - x_2) + \lambda(x_3 - x_1) &= 0. \end{aligned}$$

Para que esta recta pase por P, se tiene que satisfacer

$$\begin{aligned} \lambda(p_0 + p_2) + \mu(p_3 + p_1) &= 0, \\ \mu(p_0 - p_2) + \lambda(p_3 - p_1) &= 0. \end{aligned}$$

Esto ocurrirá cuando el par (λ, μ) sea proporcional a $(p_0 - p_2, p_1 - p_3)$ ó a $(p_1 + p_3, -(p_0 + p_2))$. Uno al menos de estos dos últimos pares es distinto de $(0,0)$. Luego uno al menos de los siguientes pares de ecuaciones

$$\begin{aligned} (p_0 - p_2)(x_0 + x_2) + (p_1 - p_3)(x_3 + x_1) &= 0, \\ (p_1 - p_3)(x_0 - x_2) + (p_0 - p_2)(x_3 - x_1) &= 0, \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned} (p_1 + p_3)(x_0 + x_2) - (p_0 + p_2)(x_3 + x_1) &= 0, \\ -(p_0 + p_2)(x_0 - x_2) + (p_1 + p_3)(x_3 - x_1) &= 0, \end{aligned}$$

representa una recta de la familia (I) que pasa por P. Una tal recta es única, pues dos rectas distintas de la familia (I) son disjuntas.

Análogamente, para la familia (II) se llega a los pares de ecuaciones

$$\begin{aligned} (p_1 - p_3)(x_0 + x_2) + (p_0 + p_2)(x_3 - x_1) &= 0, \\ (p_0 + p_2)(x_0 - x_2) + (p_1 - p_3)(x_3 + x_1) &= 0, \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned} (p_2 - p_0)(x_0 + x_2) + (p_3 + p_1)(x_3 - x_1) &= 0, \\ (p_3 + p_1)(x_0 - x_2) + (p_2 - p_0)(x_3 + x) &= 0, \end{aligned}$$

donde al menos uno de ellos representa una recta de la familia (II) que pasa por P. Asimismo, una tal recta es única, pues dos rectas distintas de la familia (II) son disjuntas. □

Estos últimos resultados permite concebir una cuádrica ordinaria reglada como formada por las rectas de una cualquiera de las dos familias de rectas, (I) ó (II).

Definición 3.34. Las rectas de cada una de las dos familias, (I) y (II), se denominan *generatrices rectilíneas* de la cuádrica ordinaria reglada.

Según se ha mostrado, por cada punto de la cuádrica reglada pasan dos generatrices, una por cada familia.

Lema 3.35. *Dada una cuádrica ordinaria reglada $\mathcal{C}(\omega)$ y P un punto cualquiera de ella, entonces el plano π que contiene a las dos generatrices r y s que pasan por P coincide con el plano polar de P. Además, $\pi \cap \mathcal{C}(\omega) = r.s$ y π^2 es la cuádrica tangente desde P a $\mathcal{C}(\omega)$.*

Demostración. Sabemos $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es una cónica degenerada porque contiene las rectas r y s. P es punto singular de dicha cónica, porque P es el punto común de las dos rectas. Luego todos los puntos de π son puntos conjugados de P. Lo que implica $\pi \cap \mathcal{C}(\omega) = r.s$ y π es el plano polar de P. $\square$

Autor: Francisco Martín Cabrera, Departamento Matemática Fundamental, Universidad de La Laguna, Islas Canarias, España

3.7. Ejercicios.

Observación 3.36. La siguiente lista contiene algunos ejercicios que plantean problemas de variedades cuadráticas en el espacio afín E. Dichos ejercicios están aquí inluidos porque los conceptos involucrados no son puramente afines. En realidad, tales ejercicios únicamente involucran conceptos proyectivos, considerando las variedades cuadráticas en el espacio proyectivo $\mathcal{P}(V) = E \cup H_\infty$, donde H_∞ es el hiperplano del infinito.

Si $\{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ es una referencia afín de E, entonces $\{O, \langle\vec{e}_1\rangle, \dots, \langle\vec{e}_n\rangle; O+(\vec{e}_1+\cdots+\vec{e}_n)\}$ es una referencia proyectiva de $\mathcal{P}(V)$ con la relación usual entre coordenadas afines y coordenadas homogéneas. El hiperplano H_∞ admite por ecuación $x_0 = 0$ con respecto a dicha referencia proyectiva.

1. En el plano afín y respecto de una referencia afín, considérese la cónica dada por la ecuación:
$$2 + x^2 - y^2 + 2xy = 0,$$
y el punto $P(1,1)$. Se pide:
   a) Dar la ecuación de la polaridad de la cónica.
   b) Hallar los puntos singulares.
   c) La recta polar de P respecto de la cónica.
   d) Hallar in 3-vertice autoconjugado, una referencia proyectiva autoconjugada y una referencia canónica de $\mathcal{C}(\omega)$. Para dichas referencias, dar las correspondientes ecuaciones de la cónica.
   e) Clasificar la cónica desde el punto de vista proyectivo.
   f) Las tangentes desde P a la cónica.
   g) Comprobar que la recta del infinito r_∞ es no tangente. Tomando los puntos $A(0,1,0)$ y $B(0,0,1)$ y la referencia proyectiva $\{A, B; (0,1,1)\}$ de r_∞, dar la ecuación de la proyectiva inducida en r_∞ por la cónica.
   h) La cónica tangencial correspondiente (caso que la tuviere).
2. En el espacio afín y respecto de una referencia afín, considérese la cuádrica $\mathcal{C}(\omega)$ que admite por ecuación:
$$1 + x^2 + 2y^2 - 9z^2 + 2x + 4yz = 0.$$
Se pide:
   a) Clasificar $\mathcal{C}(\omega)$.
   b) Ecuación general de todas las rectas tangentes a $\mathcal{C}(\omega)$ paralelas a $\vec{v}(3,0,1)$ de ella. Estudiar si alguna de ellas está contenida en $\mathcal{C}(\omega)$ (nótese que $\vec{v}(3,0,1)$ define un punto que está en la cuádrica).

c) Plano polar del punto $P(1,0,0)$ respecto de $\mathcal{C}(\omega)$.
d) Cuádrica tangente desde P a $\mathcal{C}(\omega)$.
e) Hallar la cuádrica tangencial de $\mathcal{C}(\omega)$.
f) Estudiar la intersección de $\mathcal{C}(\omega)$ con el plano del infinito $\pi_\infty \equiv x_0 = 0$.

3. Hallar las ecuaciones de las tangentes desde el origen a la cónica
$$y^2 - 2xy + 2y - 4x - 2 = 0.$$
4. Hallar la ecuación del cono de vértice $(4,-2,4)$ circunscrito a la cuádrica $x^2+3y^2+3z^2-9=0$.
5. En el plano afín y respecto de una referencia afín, considérese la cónica $\mathcal{C}$ de ecuación:
$$x^2 - 2y^2 + 2xy + 2x - 4y + 1 = 0.$$
Hállese un paralelogramo circunscrito a $\mathcal{C}$ cuyos lados tengan las direcciones de los vectores $\vec{a}(1,0)$ y $\vec{b}(1,1)$.
6. En el espacio afín y respecto de una referencia cartesiana, considérese la cuádrica que admite por ecuación:
$$\mathcal{C}(\omega) \equiv 3x + z - 4yz + 8y + 3 = 0.$$
(i) Hállese el cilindro circunscrito a dicha cuádrica cuyas generatrices tienen la dirección del vector $\vec{a}(0,1,4)$.
(ii) Determínese el plano en el que está situada la cónica de tangencia de la cuádrica y el cilindro.
(iii) Comprobar que la cuádrica dada es ordinaria reglada. Dar las dos familias de generatrices rectilíneas.
(iv) Hallar las generatrices rectilíneas que pasan por el punto de $\mathcal{C}(\omega)$ determinado por el vector $\vec{b}(1,0,0)$. Hallar el plano tangente a $\mathcal{C}(\omega)$ en dicho punto.
(v) Hallar las generatrices rectilíneas que pasan por el punto $C(-\frac{8}{3},1,1)$ de $\mathcal{C}(\omega)$. Hallar el plano tangente a $\mathcal{C}(\omega)$ en C.
(vi) Dar un 4-vértice autocnjugado, una referencia proyectiva canónica y la ecuación canónica de $\mathcal{C}(\omega)$ correspondiente.
7. En el plano afín y respecto de una referencia afín, considérese la cónica dada por la ecuación:
$$1 - 3x^2 + 2y^2 + 4y = 0.$$
(i) Hállar el trivértice autoconjugado respecto de dicha cónica que tenga un vértice en el punto $(-1,0)$ y otro esté situado en la recta de ecuación:
$$r \equiv 1 + 2x + y = 0.$$
(ii) Dar una referencia proyectiva para cual se obtenga la ecuación canónica de la cónica.
(iii) Hallar la ecuación de la proyectividad φ inducida por la cónica en la recta r respecto de alguna referencia de r.
(iv) Hallar los puntos dobles de φ.
8. Determinar una cónica que pasa por el punto $A(2,0)$, la recta $r \equiv -1 + x + 2y = 0$ es asíntota a ella (tangente a ella en el punto del infinito $(0,2,-1)$) y la recta $s \equiv 2+2x-y = 0$ también es asíntota. (una recta propia se dice que es asíntota a una cónica, si es tangente y contiene un punto del infinito de la cónica que es no singular).

9. En el espacio afín y respecto de una referencia afín, considérese la cuádrica $\mathcal{C}$ que admite por ecuación:
$$\mathcal{C}(\omega) \equiv 1 + 3x^2 - 4y^2 - 6z^2 = 0,$$
y la recta r de ecuaciones:
$$3x = 4z, \qquad 1 = 4y.$$
   (i) Hállense los planos tangentes a $\mathcal{C}$ que contienen a r.
   (ii) Hállense las generatrices contenidas en algunos de los planos obtenidos en el apartado anterior.
   (iii) Dado el punto $P(0, \frac{1}{2}, 0)$ de la cuádrica, hallar las generatrices que pasan por dicho punto. Hallar el plano tangente a la cuádrica en P.
   (iv) Clasificar desde el punto de vista proyectivo la cónica $\pi_\infty \cap \mathcal{C}(\omega)$, donde π_∞ es el plano del infinito.
10. En el espacio afín tridimensional, sea la cuádrica
$$\mathcal{C}(\omega) \equiv xy - xz - z = 0.$$
   (i) Hallar la generatrices rectilíneas de $\mathcal{C}(\omega)$.
   (ii) Clasificar la cónica resultante de intersecar $\mathcal{C}(\omega)$ con el plano del infinito.
   (iii) Hallar los planos paralelos al plano $y = 0$ que sean tangentes a $\mathcal{C}(\omega)$.
   (iv) Dar las generatrices rectilíneas contenidas en algunos de los planos obtenidos en apartado anterior.
11. Hallar la ecuación de la cónica que es tangente a las rectas: $r \equiv 2+x+y = 0$ en $A(-1,-1)$, a $s \equiv 2 - x - 2y = 0$ en $B(0, 1)$ y a $u \equiv x + 2y = 0$.
12. Hallar la ecuación de la cónica que es tangente a las rectas: $r \equiv x + y = 0$, $s \equiv 1 + y = 0$, $u \equiv 1 + x + y = 0$, $v \equiv 1 + x = 0$ y $w \equiv 2 + 6x + 5y = 0$.
13. Hallar los planos tangentes a la cuádrica $x^2 + 3y^2 - 6z^2 - 4 = 0$ que pasan por las recta r de ecuaciones $x = 2$ y $y - \sqrt{2}z = 0$.
14. Encontrar la ecuación de la cónica que pasa por $A(-1, 1)$ y que es tangente a $\mathcal{C} \equiv 1 + x^2 + 3y^2 - 2x - 4y + 8xy = 0$ en los puntos de contacto $B(1, 0)$ y $C(0, 1)$.
15. En el espacio afín tridimensional, hallar la ecuación de una cuádrica que contiene a la recta
$$r \equiv \left\{ \begin{array}{c} x = 1, \\ y = z + 2, \end{array} \right.$$
y tal que los vértices del tetraedro formado por los planos coordenados y el plano $\pi \equiv 6x + 3y + 2z - 6 = 0$ forman un 4-vértice autoconjugado.
16. Hallar la cuádrica que pasa por las rectas
$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = y, \\ y = z, \end{array} \right. \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2y, \\ x = 3z, \end{array} \right.$$
es tangente al plano $\pi \equiv x + y + z = 4$ en el punto $(2, 1, 1)$, y pasa por el punto $(1, -1, 2)$.
17. En el espacio afín y respecto de una referencia cartesiana, considérese la cuádrica que admite por ecuación:
$$x^2 + 2y^2 + 2xz + z + 3 = 0.$$
Hállense los planos tangentes a $\mathcal{C}$ que son paralelos al plano que tiene por ecuación $2x + 4y + 1 = 0$.

18. En el espacio afín tridimensional, hallar la ecuación de una cuádrica que pasa por el punto $(4, 0, 3)$, contiene a la elipse de ecuación:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{5} = 1, \\ z = 0, \end{cases}$$

y se sabe que la referencia afín fijada es autoconjugada.

Autor: Francisco Martín Cabrera, Departamento Matemática Fundamental, Universidad de La Laguna, Islas Canarias, España

T E M A IV

4. VARIEDADES CUADRÁTICAS. ESTUDIO AFÍN

4.1. Variedades cuadráticas en el espacio afín real ampliado.

En el espacio proyectivo real n-dimensional $\mathcal{P}(V)$ consideramos el hiperplano $H_\infty = \mathcal{P}(W)$ y damos a $E = \mathcal{P}(V) - H_\infty$ una estructura de espacio afín utilizando una forma lineal f que defina W. Esto es, de modo que $\ker f = W$.

Si $\{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ es una referencia afín de E, entonces $\{O = \langle\vec{o}\rangle, \langle\vec{e}_1\rangle, \dots, \langle\vec{e}_n\rangle; \langle\vec{o} + \vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n\rangle\}$, donde $f(\vec{o}) = 1$, es una referencia proyectiva de $\mathcal{P}(V)$ con la relación usual entre coordenadas afines y coordenadas homogéneas. Otro modo de expresar el punto unidad es $\langle\vec{o} + \vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n\rangle = O * (\vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n)$. A H_∞ lo denominamos *hiperplano impropio* o *hiperplano del infinito* y admite por ecuación $x_0 = 0$ con respecto a la referencia proyectiva antes mencionada.

A lo largo de esta sección supondremos siempre que estamos trabajando con referencias proyectivas asociadas a referencias afines en la forma que hemos indicado.

Clasificación afín de las variedades cuadráticas

Para clasificar las variedades cuadráticas desde el punto de vista afín tenemos que estudiar la intersección del hiperplano del infinito con la variedad cuadrática considerada. Se tienen las siguientes alternativas:

i) El hiperplano del infinito esté contenido en la variedad cuadrática, entonces dicha intersección es el hiperplano del infinito.
ii) El hiperplano del infinito no esté contenido en la variedad cuadrática, entonces la intersección del hiperplano impropio con la variedad cuadrática es una variedad cuadrática en dicho hiperplano, denominada *variedad cuadrática del infinito*.

Según se dé el primer caso o como sea, desde el punto de vista proyectivo, la variedad cuadrática del infinito cuando se dé el segundo caso, se tendrán las distintas posibilidades que pueden surgir dentro de la clasificación proyectiva de las variedades cuadráticas vista en la sección anterior. En particular, están descritas con detalle las respectivas clasificaciones afines de las variedades cuadráticas en el plano afín (cónicas) y de tales variedades en el espacio afín tridimensional (cuádricas).

Si, con respecto a la referencia proyectiva asociada a una referencia afín $\{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, la matriz asociada a una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ es A, α_{00} denota el menor complementario del elemento 00 de A y A_{00} es el adjunto de dicho elemento, entonces:

i) El hiperplano impropio H_∞ estará contenido en $\mathcal{C}(\omega)$ si y sólo si la matriz α_{00} es nula.
ii) La intersección $H_\infty \cap \mathcal{C}(\omega)$ será una variedad cuadrática si y sólo si la matriz α_{00} es no nula. En este caso, α_{00} será la matriz asociada a la variedad cuadrática del infinito $H_\infty \cap \mathcal{C}(\omega)$ con respecto a la referencia $\{\langle \vec{e}_1\rangle, \ldots, \langle \vec{e}_n\rangle; \langle \vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n\rangle\}$ del hiperplano impropio H_∞.

4.2. Clasificación afín las cónicas.

Para clasificar las cónicas desde el punto de vista afín tenemos que ver cómo es la intersección de la cónica con la recta del infinito.

Definición 4.1. Una cónica se dice que es de tipo:

1. *Hiperbólico*, si la recta del infinito es una recta secante. Es decir, si la intersección de la cónica con la recta del infinito son dos puntos reales y distintos.
2. *Parabólico*, si la recta del infinito es tangente.
3. *Elíptico*, si la recta del infinito es exterior. Es decir, si la intersección de la cónica con la recta del infinito son dos puntos imaginarios conjugados.

Se tienen así los siguientes casos, de acuerdo con el rango de la matriz A:

1. Si rango $A = 3$, es decir, $|A| \neq 0$. En este caso se trata de una cónica ordinaria. Una cónica ordinaria de tipo hiperbólico se llama *hipérbola*, de tipo parabólico se llama *parábola* y de tipo elíptico se llama *elipse*.

   Por tanto, para ver de cual de estas tres cónicas se trata tendremos que resolver el sistema formado por la cónica y la recta del infinito, es decir,

$$\begin{aligned} \omega(\vec{x}) &= 0, \\ x_0 &= 0, \end{aligned}$$

   o lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 &= 0, \\ x_0 &= 0, \end{aligned}$$

   cuyas soluciones dependen del discriminante $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$. Si denotamos por A_{00} la matriz adjunta del elemento a_{00} de la matriz A, observamos que $\Delta = -|A_{00}|$, teniéndose así las siguientes condiciones:

   a) $A_{00} < 0$, entonces hay dos soluciones reales y distintas y por tanto la cónica es una hipérbola.
   b) $A_{00} = 0$, entonces hay una solución doble y por tanto la cónica es una parábola. Nótese que en este caso el menor α_{00} es no nulo, pues la recta impropia no puede estar contenida en la cónica ordinaria.
   c) $A_{00} > 0$, entonces hay dos soluciones imaginarias conjugadas y por tanto la cónica es una elipse. En este caso, si la cónica es totalmente imaginaria, se dice que tenemos una *elipse imaginaria*. Por el contrario, si la cónica es real, se dice que tenemos una *elipse real*.
2. Si rango $A = 2$, entonces la cónica es degenerada y tiene un único punto singular. Analicemos cómo es la cónica en este caso atendiendo a cada uno de los tipos posibles:

   a) $A_{00} < 0$, entonces hay dos puntos del infinito de la cónica que son reales y distintos. Por tanto, la cónica es el producto de *dos rectas reales que se cortan en un punto propio*, el punto singular.

b) $A_{00} > 0$, entonces la cónica no tiene puntos (reales) en el infinito y decimos que es el producto de *dos rectas imaginarias conjugadas* que se cortan en el único punto real de la cónica que es el punto singular.

c) $A_{00} = 0$, entonces la recta del infinito es tangente. Por la proposición 3.5, la recta del infinito debe contener el punto singular. En este caso, tenemos dos alternativas:

1) $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, entonces la recta impropia está contenida en la cónica. Por consiguiente, la cónica es el *producto de la recta impropia por una recta propia.*

2) $a_{11} \neq 0$ ó $a_{22} \neq 0$, entonces la recta impropia no está contenida en la cónica. Por tanto, la cónica es *dos rectas paralelas* (reales o imaginarias). Para ver si son reales o imaginarias, hay que hallar la signatura de la cónica. Si $sig(\omega) = (2,0)$ ó $(0,2)$, se tiene *dos rectas imaginarias paralelas*, y si $sig(\omega) = (1,1)$, se tiene *dos rectas reales paralelas.*

3. Si rango $A = 1$, existe una recta de puntos singulares, la cónica es esa recta doble y $A_{00} = 0$. Hay dos posibilidades:

a) $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, entonces la recta impropia está contenida en cónica. Por consiguiente, la cónica es la *recta impropia doble.*

b) $a_{11} \neq 0$ ó $a_{22} \neq 0$, entonces la recta impropia no está contenida en la cónica. Por tanto, la cónica es una *recta propia doble* (real)

4.3. Clasificación afín de las cuádricas. Para clasificar las cuádricas desde el punto de vista afín tenemos que ver cómo es la intersección de la cuádrica considerada con el plano del infinito. Una cuádrica se dice que es de tipo:

i) *Hiperbólico*, si su intersección con el plano del infinito es una cónica ordinaria y real.

ii) *Parabólico*, si el plano del infinito está contenido en la cuádrica o la intersección de la cuádrica con el plano del infinito es una cónica degenerada. Es decir, el plano del infinito es tangente a la cuádrica.

iii) *Elíptico*, si su intersección con el plano del infinito es una cónica ordinaria totalmente imaginaria.

Si, con respecto respecto a la referencia proyectiva asociada a una referencia afín $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, la matriz asociada a la cuádrica es A, α_{00} denota el menor complementario del elemento 00 de A y A_{00} es el adjunto de dicho elemento, entonces:

i) El plano impropio π_∞ estará contenido en la cuádrica si y sólo si la matriz α_{00} es nula.

ii) La intersección de π_∞ con la cuádrica será una cónica si y sólo si la matriz α_{00} es no nula. En este caso, α_{00} será la matriz asociada a la cónica del infinito con respecto a la referencia $\{\langle\vec{e}_1\rangle, \langle\vec{e}_2\rangle, \langle\vec{e}_3\rangle; \langle\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\rangle\}$ del plano impropio.

Teniendo esto en cuenta, cada uno de los casos anteriores se pueden expresar como:

i) Hiperbólico si y sólo si la signatura de α_{00} es $(1,2)$ ó $(2,1)$.

ii) Parabólico si y sólo si $A_{00} = 0$.

iii) Elíptico si y sólo si la signatura de α_{00} es $(3,0)$ ó $(0,3)$.

Se tienen así los siguientes casos, de acuerdo con el rango de la matriz A:

I) Si rango $A = 4$, es decir, $|A| \neq 0$. En este caso se trata de una cuádrica ordinaria. Una cuádrica ordinaria de tipo hiperbólico se llama *hiperboloide*, de tipo parabólico se llama *paraboloide* y de tipo elíptico se llama *elipsoide*. Se tienen así las siguientes condiciones:

i) sig $A = (4,0)$ ó $(0,4)$. En este caso, la cónica del infinito no puede ser ni ordinaria real, ni degenerada, ya que en tales casos la cuádrica tendría puntos, contradicción. Luego, la signatura de la matriz α_{00} tiene que ser $(3,0)$ ó $(0,3)$, por lo que se dice que se trata de un *elipsoide imaginario.*

ii) sig $A = (3,1)$ ó $(1,3)$, la cuádrica es ordinaria real no reglada, y se tienen las siguientes posibilidades:

.-sig $\alpha_{00} = (0,3)$ ó $(3,0)$. En este caso, la cuádrica se denomina *elipsoide real.*

.-sig $\alpha_{00} = (2,1)$ ó $(1,2)$. En este caso, la cuádrica se denomina *hiperboloide no reglado.*

.-$A_{00} = 0$. En este caso, la cuádrica se denomina *paraboloide no reglado.* Además, la signatura de α_{00} es $(2,0)$ ó $(0,2)$, ya que para otra posible signatura la cuádrica contendría alguna recta.

iii) sig $A = (2,2)$, la cuádrica es ordinaria real reglada. En este caso, no puede suceder que sig $\alpha_{00} = (3,0)$ ó $(0,3)$, ya que la cónica del infinito debe contener puntos debido a que la intersección del plano impropio con una generatriz rectilínea debe ser no vacía. Se tienen así las siguientes posibilidades:

.-sig $\alpha_{00} = (2,1)$ ó $(1,2)$. En este caso, la cuádrica se denomina *hiperboloide reglado.*

.-$A_{00} = 0$. En este caso, la cuádrica se denomina *paraboloide reglado.* Además, la signatura de α_{00} es $(1,1)$. En efecto, el plano impropio es tangente, luego existe un punto impropio P_∞ conjugado a todos los puntos impropios. Por tanto, π_∞ es el plano polar de P_∞ y dicho punto pertenece a la cuádrica. Además, sabemos que por P_∞ pasan dos generatrices, una de cada familia, que están contenidas en el plano polar de P_∞. De esto se puede concluir que la cónica del infinito son las dos generatrices que pasan por P_∞.

II) Si $\operatorname{rango} A = 3$, entonces la cuádrica es degenerada y tiene un sólo punto singular Q. Nótese que en este caso se satisface:

.-Un plano no puede estar contenido en la cuádrica.

.-Un plano es tangente si y sólo si su intersección con la cuádrica es una cónica degenerada.

.-Un plano es tangente si y sólo si contiene al punto singular.

Por tanto, si Q no está en el plano impropio, esto es, $A_{00} \neq 0$, entonces la cónica del infinito es ordinaria y se dice que la cuádrica es un *cono.* En cambio, si Q está en el plano impropio, esto es, $A_{00} = 0$, entonces la cónica del infinito es degenerada y se dice que la cuádrica es un *cilindro.*

Analicemos ahora los tipos posibles de cuádricas de rango 3:

i) sig $A = (3,0)$ ó $(0,3)$ Se tienen dos alternativas:

.-$A_{00} \neq 0$, la cuádrica es un *cono imaginario.*

.-$A_{00} = 0$, la cuádrica es un *cilindro imaginario.*

ii) sig $A = (2,1)$ ó $(1,2)$. Aquí las alternativas que se pueden presentar son:

.-Si $A_{00} \neq 0$, la cuádrica es un *cono real.*

.-Si $A_{00} = 0$, en este caso se tienen la posibilidades siguientes:

(a) Si la signatura de α_{00} es $(2,0)$ ó $(0,2)$, se trata de un *cilindro elíptico real.* La cónica del infinito son dos rectas imaginarias.

(b) Si la signatura de α_{00} es $(1,1)$, se trata de un *cilindro hiperbólico.* La cónica del infinito son dos rectas reales.

(c) Si la signatura de α_{00} es $(1,0)$ ó $(0,1)$, se trata de un *cilindro parabólico*. La cónica del infinito es una recta doble.

III) Si rango $A = 2$, existe una recta de puntos singulares y la cuádrica es el producto de dos planos que pasan por esa recta. Además, los puntos singulares están contenidos en el plano impropio si y sólo si el rango de α_{00} es menor que 2.

Se tienen las siguientes posibilidades:

i) Si $\operatorname{sig} A = (2,0)$ ó $(0,2)$, la cuádrica es el producto de dos *planos imaginarios*:
.-Si rango de α_{00} es 2. En este caso se trata de dos *planos imaginarios no paralelos.*
.-Si rango de α_{00} es 1. En este caso se trata de dos *planos imaginarios paralelos.*

ii) Si $\operatorname{sig} A = (1,1)$, la cuádrica es el producto de dos *planos reales*:
.-Si rango de α_{00} es 2. En este caso se trata de dos *planos reales propios no paralelos.*
.-Si rango de α_{00} es 1. En este caso se trata de dos *planos reales propios paralelos.*
.-Si rango de α_{00} es 0. En este caso se trata del producto del *plano impropio por un plano real propio.*

IV) Si rango $A = 1$, se trata de un plano doble de puntos singulares. En este caso hay dos posibilidades:
.-rango $\alpha_{00} = 1$, la cuádrica es un *plano propio doble.*
.-rango $\alpha_{00} = 0$, la cuádrica es el *plano impropio doble.*

4.4. Centro de una variedad cuadrática.

Definición 4.2. Se llama *centro* de una variedad cuadrática a un polo del hiperplano del infinito, caso de que exista y sea propio.

Según la ecuación de la polaridad, $\rho U = AP$, el polo del hiperplano del infinito $x_0 = 0$ tendrá que cumplir las condiciones:

$$\rho \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix},$$

o lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \cdots + a_{0n}x_n &\neq 0, \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ &\dots \\ &\dots \\ a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

Observación 4.3. Nótese que para una variedad cuadrática ordinaria con centro, las coordenadas homogéneas del centro vienen dadas por

$$(A_{00}, A_{01}, \dots, A_{0n}), \qquad \text{con } A_{00} \neq 0.$$

Ejemplo 4.4. Hallamos un centro, caso de que exista de la cuádrica $\mathcal{C}(\omega) \equiv x^2 - xz + yz + y - 1 = 0$. Se trata pues de resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} -2+y &=& \rho \neq 0, \\ 2x - z &=& 0, \\ 1+z &=& 0, \\ -x+y &=& 0. \end{array}\right\}$$

La solución de este sistema es $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$. Sustituyendo esta solución en la primera ecuación, se tiene $-2 + \frac{1}{2} \neq 0$. Por tanto, el punto C es centro de la cuádrica.

Ejemplo 4.5. En el espacio afín tridimensional, hallamos los posibles centros, caso de que existan de la cuádrica $\mathcal{C}(\omega) \equiv -1 + 2x^2 + 3y^2 = 0$. Se trata pues de resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} -1 &=& \rho \neq 0, \\ 2x &=& 0, \\ 3y &=& 0, \\ 0\,z &=& 0. \end{array}\right\}$$

Las soluciones de este sistema son $C(0,0,\beta)$. Sustituyendo estas soluciones en la primera ecuación, se tiene $-1 \neq 0$. Por tanto, los puntos C son centros de la cuádrica. Estos centros constituyen la recta afín

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& 0, \\ y &=& 0. \end{array}\right\}$$

A continuación vemos algunas condiciones necesarias y suficientes para que una variedad cuadrática tenga centro.

Proposición 4.6. *Sean $H_\infty = \mathcal{P}(W)$ el hiperplano impropio, $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática y $\hat{f}$ la aplicación lineal de polaridad. Entonces son equivalentes:*

(i) $\mathcal{C}(\omega)$ *tiene centro.*

(ii) $\mathcal{P}(\ker \hat{f}) = \mathcal{P}(\ker \hat{f}_{|W})$, *donde $\hat{f}_{|W}$ es la aplicación lineal de polaridad de ω restringida a W.*

(iii) $\mathrm{rango}(\omega_{|W}) = \mathrm{rango}(\omega) - 1$, *donde $\omega_{|W}$ es la forma cuadrática ω restringida a W.*

Demostración. Si una variedad cuadrática tiene centro, entonces el hiperplano impropio debe estar en el conjunto imagen de la polaridad. Por tanto, dicho hiperplano debe contener a todos los puntos singulares, esto es, $\mathcal{P}(\ker \hat{f}) \subseteq H_\infty$. De ahí que $\mathcal{P}(\ker \hat{f}) \subseteq \mathcal{P}(\ker \hat{f}_{|W})$.

Por otro lado, si $\langle \vec{v} \rangle \in \mathcal{P}(\ker \hat{f}_{|W})$. Tomando una referencia afín $\{C; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, donde C es un centro de $\mathcal{C}(\omega)$, se tiene que $\langle \vec{v} \rangle$ es conjugado a los puntos C, $\langle \vec{e}_1 \rangle$, ..., $\langle \vec{e}_n \rangle$ que son los puntos básicos de la referencia proyectiva asociada a la referencia afín. Por consiguiente, $\langle \vec{v} \rangle$ es punto singular de $\mathcal{C}(\omega)$, esto es, $\langle \vec{v} \rangle \in \mathcal{P}(\ker \hat{f})$. Por lo anterior, hemos probado (i) implica (ii).

Veamos (ii) implica (iii). En efecto,

$$\mathrm{rango}(\omega_{|W}) = \mathrm{rango}(\hat{f}_{|W}) = n - \dim(\ker \hat{f}) = \mathrm{rango}(\hat{f}) - 1 = \mathrm{rango}(\omega) - 1.$$

Veamos (iii) implica (i). Veamos que $\mathcal{P}(\ker \hat{f}) \subseteq H_\infty$, es decir, que todos los puntos singulares son impropios. Supongamos que existiese un punto singular Q que fuese propio. Considerando la referencia afín $\{Q; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, se tiene que la matriz asociada A es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & a_{11} & .. & a_{1n} \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & a_{n1} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Por tanto rango$(\omega) =$ rango$(A) =$ rango$(\alpha_{00}) =$ rango$(\omega_{|W})$, contradicción.

Como todos los puntos singulares son impropios, entonces H_∞ pertenece al conjunto imagen de la polaridad. Sea C un punto tal que su hiperplano polar sea H_∞. Veamos que C es propio y, por tanto, C es centro. Si C fuese impropio, entonces H_∞ sería tangente. Por lo que, $H_\infty \subseteq \mathcal{C}(\omega)$ ó $H_\infty \cap \mathcal{C}(\omega)$ es una variedad cuadrática degenerada en el espacio H_∞.

Si $H_\infty \subseteq \mathcal{C}(\omega)$, entonces rango$(\omega_{|W}) = 0$ y rango$(\omega) = 1$. Por tanto, $\mathcal{C}(\omega)$ sería el hiperplano H_∞ doble. En tal caso, como $C \in H_\infty$, C sería punto singular, contradicción.

Si $H_\infty \cap \mathcal{C}(\omega)$ es una variedad cuadrática degenerada en el espacio H_∞, entonces C sería un punto singular de $H_\infty \cap \mathcal{C}(\omega)$ siendo no singular de $\mathcal{C}(\omega)$. Por lo que $\dim(\ker \hat{f}_{|W}) > \dim(\ker \hat{f})$. De esto se tendría

$$n - \text{rango}(\omega_{|W}) > n + 1 - \text{rango}(\omega).$$

Por tanto, rango$(\omega) - 1 >$ rango$(\omega_{|W})$, contradicción.

Las contradicciones han surgido del hecho de suponer que C es impropio. Por tanto, C es propio y es un centro.

□

Corolario 4.7. *Una variedad cuadrática ordinaria tiene centro si y sólo si $A_{00} \neq 0$.*

Demostración. Aplíquese la condición (iii) de la proposición 4.6. □

Corolario 4.8. *En un espacio afín de dimensión mayor que* 1, *una variedad cuadrática con un único punto singular Q tiene centro si y sólo si Q es el único punto singular de la variedad cuadrática en el infinito.*

Demostración. Es una consecuencia directa del apartado (ii) de la proposición 4.6. □

Observación 4.9. Una cuádrica $\mathcal{C}(\omega)$ de rango 3 tiene centro si y sólo si $\mathcal{C}(\omega)$ es un cilindro elítpico (real o imaginario) o un cilindro hiperbólico.

Una cónica $\mathcal{C}(\omega)$ de rango 2 tiene centro si y sólo si $\mathcal{C}(\omega)$ son dos rectas paralelas (reales o imaginarias).

4.5. Diámetros e hiperplanos diametrales.

Definición 4.10. Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ con centro. Un *diámetro* de $\mathcal{C}(\omega)$, es toda recta que contiene un centro y sólo uno.

La siguiente proposición justifica la noción de centro de una variedad cuadrática.

Proposición 4.11. *Sea C un centro de una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$. Si d es un diámetro no tangente que pasa por C, entonces C es el punto medio de $\{A, B\} = \mathcal{C}(\omega) \cap d$, siendo A y B puntos reales o imaginarios.*

Demostración. Sea $X \in \mathcal{C}(\omega) \cap d$, entonces $X = \langle \lambda\vec{c} + \mu\vec{d} \rangle$, donde $\langle \vec{c} \rangle = C$ y $\langle \vec{d} \rangle = D_\infty$ es el punto del infinito del diámetro d, y $\omega(\lambda\vec{c} + \mu\vec{d}) = 0$. Como $f(\vec{c}, \vec{d}) = 0$, se obtiene

$$\lambda^2\omega(\vec{c}) + \mu^2\omega(\vec{d}) = 0.$$

De esta ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} A &= \langle -\sqrt{-\omega(\vec{c})}\ \vec{d} + \sqrt{\omega(\vec{d})}\ \vec{c} \rangle, \\ B &= \langle \sqrt{-\omega(\vec{c})}\ \vec{d} + \sqrt{\omega(\vec{d})}\ \vec{c} \rangle, \end{aligned}$$

Al ser el diámetro d no tangente $\omega(\vec{c}) \neq 0$ y $\omega(\vec{d}) \neq 0$. Hallando ahora la razón simple

$$(CAB) = (ABCD_\infty) = (CD_\infty AB) = \frac{\sqrt{-\omega(\vec{c})}}{-\sqrt{-\omega(\vec{c})}} : \frac{\sqrt{\omega(\vec{d})}}{\sqrt{\omega(\vec{d})}} = -1 : 1 = -1.$$

Por lo que $\overrightarrow{CA} = -1.\overrightarrow{CB}$. Lo que implica que C es el punto medio del segmento de extremos A y B. □

Definición 4.12. Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ con centro en un espacio afín de dimensión mayor que 2. Un *hiperplano diametral* de $\mathcal{C}(\omega)$, es todo hiperplano que contenga a todos los centros.

Definición 4.13. Dos diámetros d y d' se dicen que son *conjugados* respecto de la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$, si sus puntos del infinito son conjugados respecto de $\mathcal{C}(\omega)$.

Definición 4.14. Un diámetro es *conjugado* a un hiperplano diametral, si el hiperplano diametral es el hiperplano polar del punto del infinito del diámetro.

Sea el hiperplano diametral $u_0x_0 + u_1x_1 + \cdots + u_nx_n = 0$, y un diámetro de dirección $(0, v_1, \ldots, v_n)$. Para que el diámetro sea conjugado al hiperplano diametral, ha de verificarse la ecuación

$$\rho \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ . \\ . \\ u_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \\ . \\ . \\ v_n \end{pmatrix}.$$

4.6. Proyectividad central de una cónica ordinaria con centro.

Definición 4.15. Supongamos que se tiene una cónica con centro de modo que la recta del infinito sea no tangente (no es de tipo parabólico), es decir, una cónica ordinaria con centro. Se llama *proyectividad central* ó *proyectividad de diámetros conjugados* a la correspondencia que asocia a cada diámetro d un diámetro d' de tal forma que los puntos del infinito de d y d' son conjugados respecto de la cónica. Esto es, los diámetros se corresponden a través de la proyectividad inducida por la cónica en la recta del infinito.

Si d y d' tienen por direcciones (v_1, v_2) y (u_1, u_2) respectivamente, los puntos del infinito $(0, v_1, v_2)$ y $(0, u_1, u_2)$ serán conjugados si

$$(0, v_1, v_2)\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Por consiguiente, se tiene la ecuación matricial

$$(v_1, v_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Esto implica

$$u_1(v_1a_{11} + v_2a_{12}) + u_2(v_1a_{21} + v_2a_{22}) = 0.$$

Lo que es equivalente a que el par $(v_1a_{21}+v_2a_{22}, -v_1a_{11}-v_2a_{12})$ es proporcional al par (u_1, u_2). Un modo matricial de escribir este hecho es

$$\rho\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ -a_{11} & -a_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Como se esperaba, esto coincide con la ecuación de la proyectividad inducida por cónica en la recta del infinito r_∞.

Proposición 4.16. *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática ordinaria con centro y H un hiperplano diametral con d su diámetro congujado. Si r es una recta secante paralela a d con $r \cap \mathcal{C}(\omega) = \{A, B\}$, entonces $M = r \cap H$ es el punto medio del segmento de extremos A y B.*

Demostración. Sabemos que si D_∞ es el punto impropio de d y de r, entonces el hiperplano H es el hiperplano polar de D_∞. De donde se sigue que $(MAB) = (ABMD_\infty) = -1$. Por tanto, M es el punto medio del segmento de extremos A y B. □

Observación 4.17. En la proposición anterior, si uno considera la simetría s según el hiperplano diametral H y de dirección d, se obtiene que $s(\mathcal{C}(\omega)) = \mathcal{C}(\omega)$.

4.7. Asíntotas.

Definición 4.18. Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ con centro. Se llama *variedad cuadrática asintótica* de $\mathcal{C}(\omega)$, a la variedad cuadrática tangente a la variedad cuadrática desde un centro.

Si $\mathcal{C}(\omega)$ es ordinaria, entonces el centro es el único punto singular de la variedad cuadrática asintótica cuyo rango sería n. En particular, cuando $\mathcal{C}(\omega)$ es una cuádrica ordinaria con centro, se tendrá un *cono asintótico*.

Pasamos ahora a considerar cónicas en el plano afín real.

Definición 4.19. Se dice que una recta propia r es *asíntota* de una cónica $\mathcal{C}(\omega)$, si es tangente a $\mathcal{C}(\omega)$ y hay un punto no singular $P_\infty = \langle\vec{p}\rangle$ de $r \cap \mathcal{C}(\omega)$ contenido en la recta impropia. Por consiguiente, como para todo $X = \langle\vec{x}\rangle$ de una asíntota r se tiene $f(\vec{p}, \vec{x}) = 0$, entonces $r = \widetilde{f}(P_\infty)$. Esto es, P_∞ es un punto de tangencia no singular de r.

Proposición 4.20. *Una cónica $\mathcal{C}(\omega)$ tiene asíntota si y sólo si $\mathcal{C}(\omega)$ es de tipo hiperbólico.*

Demostración. Veamos que si $\mathcal{C}(\omega)$ tiene asíntota, necesariamente es de tipo hiperbólico. En efecto, denotando por r_∞ a la recta impropia y por r a una asíntota, se tiene que existe $\langle\vec{p}\rangle = P_\infty$ un punto no singular de $r \cap r_\infty \cap \mathcal{C}(\omega)$. Además, puesto que $r_\infty \cap \mathcal{C}(\omega) \neq \phi$, r_∞ es secante o tangente.

Si fuese r_∞ tangente, entonces $f(\vec{p}, \vec{x}) = 0$, para todo $\langle\vec{x}\rangle = X \in r_\infty$. Luego r_∞ es la recta polar de P_∞. Como también se llega a que r es la recta polar de P_∞, entonces $r = r_\infty$, contradicción. Luego, r_∞ es secante y la cónica $\mathcal{C}(\omega)$ es de tipo hiperbólico.

Recíprocamente, veamos que si $\mathcal{C}(\omega)$ es de tipo hiperbólico, necesariamente tiene asíntotas. En efecto, en este caso r_∞ es secante, por lo que no puede contener ningún punto singular (en tal caso, sería tangente, contradicción). Además, si A_∞ y B_∞ son los dos puntos impropios de la cónica (que son no singulares), sus respectivas rectas polares son tangentes a la cónica. Por tanto, dichas rectas no pueden coincidir con r_∞ y de ahí que sean asíntotas de $\mathcal{C}(\omega)$. □

Para calcular la ecuación de las asíntotas será suficiente obtener su dirección y un punto por donde pasen.

Por ser las tangentes en los puntos impropios, el punto del infinito de dicha recta coincidirá con un punto del infinito de la cónica. Por tanto para calcular la dirección de las asíntotas tendremos que hallar los puntos del infinito de la cónica. Es decir, resolver el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 &= 0, \\ x_0 &= 0. \end{aligned}$$

Si (v_1, v_2) indica la dirección de las asíntotas, el punto $(0, v_1, v_2)$ satisfará el sistema anterior. Esto es,

$$a_{22}v_2^2 + 2a_{12}v_1v_2 + a_{11}v_1^2 = 0,$$

siendo $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$. La asíntotas son las polares de los dos puntos $(0, v_1, v_2)$ que sean las soluciones de la ecuación anterior.

Hemos concluido que para que tenga asíntotas, la cónica debe ser de tipo hiperbólico:

- Si la cónica tiene centro (es una hipérbola), la asíntota tiene que pasar por el centro. En efecto, el centro es conjugado de todos los puntos del infinito y la asíntota está formada por los puntos que son conjugados a cierto punto del infinito que está en la cónica.
- Si la cónica tiene punto singular (es dos rectas propias reales que se cortan en un punto propio), la asíntota, al ser una recta tangente, tiene que pasar por el punto singular Q. Además, la asíntota $r = P_\infty Q$ está contenida en la cónica.

4.8. Ecuación diagonal afín de una variedad cuadrática.

Definición 4.21. Una referencia afín $\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ se dice que es *autoconjugada* con respecto a una variedad cuadrática, si los puntos básicos de la referencia proyectiva asociada $\{O, \langle\vec{e}_1\rangle, \ldots, \langle\vec{e}_n\rangle; O + (\vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n)\}$ forman un $n+1$-vértice autoconjugado.

Proposición 4.22. *Una referencia afín $\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ se dice que es autoconjugada con respecto a una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ si y sólo si la ecuación, denominada ecuación diagonal afín, de $\mathcal{C}(\omega)$ con respecto a dicha referencia toma la forma*

$$a_0 + a_1y_1^2 + \cdots + a_ny_n^2 = 0,$$

donde $(y_1, \ldots, y_n)$ denotan las coordenadas afines de un punto.

Demostración. Si $\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ es autoconjugada, entonces para la referencia $\{O, \langle\vec{e}_1\rangle, \ldots, \langle\vec{e}_n\rangle; O + (\vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n)\}$ la ecuación de $\mathcal{C}(\omega)$ es

$$a_0x_0^2 + a_1x_1^2 + \cdots + a_nx_n^2 = 0. \tag{4.5}$$

Dividiendo por x_0^2, se obtiene

$$a_0 + a_1y_1^2 + \cdots + a_ny_n^2 = 0.$$

Recíprocamente, si esta es la ecuación de $\mathcal{C}(\omega)$ con respecto a la referencia afín, entonces (4.5) es la ecuación de $\mathcal{C}(\omega)$ con respecto a la referencia proyectiva $\{O, \langle\vec{e}_1\rangle, \ldots, \langle\vec{e}_n\rangle; O+(\vec{e}_1+\cdots+\vec{e}_n)\}$. Por tanto, los puntos básicos de esta referencia forman un $n+1$-vértice autoconjugado. □

Proposición 4.23. *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática. Una referencia afín $\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ es autoconjugada con respecto $\mathcal{C}(\omega)$ si y sólo si O es un centro o un punto singular propio y $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ son direcciones conjugadas dos a dos. Además, en dicho caso, la ecuación diagonal afín correspondiente,*

$$a_0 + a_1y_1^2 + a_2y_2^2 + \cdots + a_ny_n^2 = 0,$$

es tal que $a_0 = \omega(\vec{c})$, donde $\langle\vec{c}\rangle = O$ y $\langle\vec{c} + \vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n\rangle = C + (\vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n)$. Se tiene que $a_0 \neq 0$ cuando O es centro y $a_0 = 0$ cuando O es punto singular propio.

Demostración. Si $\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ es autonjugada, entonces O y $\langle e_i\rangle$ son conjugados. Por tanto, todos los puntos del hiperplano impropio son conjugados a O. Si O no es punto singular, entonces el hiperplano polar de O es el hiperplano impropio. Por tanto, O es un centro de $\mathcal{C}(\omega)$.

Recíprocamente, si O es un centro o un punto singular propio y $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ son direcciones conjugadas dos a dos, es immediato que $\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ es autoconjugada. □

Autor: Francisco Martín Cabrera, Departamento Matemática Fundamental, Universidad de La Laguna, Islas Canarias, España

4.9. Ejercicios.

1. Clasificar desde el punto de vista afín, según los valores de λ, las cuádricas:
$$\lambda x^2 + y^2 - 2z^2 + 2xy - 2yz + 2y + 1 = 0.$$
2. En el espacio afín y respecto de una referencia afín, se consideran las cuádricas que, para $\alpha \in \mathbb{R}$, admiten por ecuación:
$$x^2 + 2y^2 - 2xy + 2yz + 2x + \alpha z + 1 = 0.$$
Clasificar dichas cuádricas para los distintos valores de α.
3. Dada, en el espacio afín real y respecto de una referencia afín, la cuádrica $\mathcal{C}$ que, para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$, admite por ecuación:
$$a + x^2 + 2y^2 + bz^2 + 2xy + yz = 0.$$
Se pide clasificar $\mathcal{C}$ desde el punto de vista afín para los distintos valores de a y b.
4. En el espacio afín y respecto de una referencia afín, considérense las cuádricas que, para $\alpha \in \mathbb{R}$, admiten por ecuación:
$$x^2 - 2y^2 + \alpha z^2 - 2xz + 2yz + 2x + 1 = 0.$$
Clasifíquense, según los valores de α, dichas cuádricas.
5. Clasifíquense las cuádricas del espacio afín que, respecto de una referencia afín, admiten por ecuaciones:
(a) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 6xz + 2yz + 2x - 6y + 2z + 1 = 0$.
(b) $x^2 + y^2 + z^2 - 4xz - 4y + 2 = 0$.
(c) $y^2 + 4xz + 1 = 0$.
Hallar las respectivas ecuaciones diagonales afines.
6. Hallar la ecuación del diámetro del punto $(0, 1, 4)$ en la cónica:
$$4y^2 - 5xy - 2x + 3y + 1 = 0.$$
7. Hallar la ecuación de una cónica ordinaria que sea tangente a los ejes de coordenadas, con centro $(1, 1)$ y de la cual se conocen las rectas conjugadas $x + y = 0$ y $x + y + 1 = 0$. (Sugerencia, hallar primero la cónica tangencial)
8. *a*) Hallar el polo de la recta $x + 2y + 7 = 0$ con respecto a la cónica
$$x^2 - xy + y - 3x - 1 = 0.$$
b) Hallar un centro de dicha cónica, caso de que exista.
c) Hallar una referencia afín autoconjugada y la ecuación diagonal afín correspondiente. ¿ De qué tipo de cónica se trata?.

9. En el plano afín, una parábola $\mathcal{C}$ tiene su punto del infinito en la dirección del eje de coordenadas OY, una recta paralela al eje OX es tangente a $\mathcal{C}$ en el punto $(1,1)$ y $\mathcal{C}$ pasa por el punto $(2,0)$. Dar la ecuación de $\mathcal{C}$.
10. Se da un triángulo OAB en el plano afín. Se pide:
    a) Calcular la ecuación general de las parábolas circunscritas a OAB.
    b) Calcular el lugar geométrico de los puntos de las parábolas cuya tangente es paralela a la cuerda OA.
11. En el espacio afín tridimensional y fijada una referencia, hallar:
    a) La ecuación del lugar geométrico de las rectas que unen pares de puntos que se obtienen al cortar el eje OZ y la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = z$, por el sistema de planos paralelos a $\pi \equiv x+y+z=0$. Describir la superficie obtenida.
    b) Hallar el plano paralelo al plano XY que corte a dicha superficie según dos rectas.
12. Sea el elipsoide
$$x^2+y^2+z^2-2x-2y=0.$$
    Hallar la ecuación de la cuádrica que pasa por $(-3,0,2)$ y que tenga como cono asintótico la cuádrica tangente desde $(1,2,0)$ al elipsoide dado.
13. Hallar la ecuación del cilindro que contiene a la cónica
$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2-x+1=0, \\ z=0, \end{array}\right\}$$
    y que sus generatrices son paralelas a la recta
$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} x=z, \\ y=z. \end{array}\right.$$

Autor: Francisco Martín Cabrera, Departamento Matemática Fundamental, Universidad de La Laguna, Islas Canarias, España

T E M A V

5. VARIEDADES CUADRÁTICAS. ESTUDIO EUCLÍDEO

5.1. Variedades cuadráticas en el espacio euclídeo. Supondremos ahora que estamos en el espacio afín euclídeo E. Es decir, hay definido un producto escalar en la dirección de dicho espacio afín que nos permite definir ángulos, distancias, etc... Asimismo, se asume que todos los objetos geométricos están dados con respecto a referencias euclídeas $\{O; \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$. Esto es, referencias afines donde la base $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es ortonormal (compuesta por vectores unitarios y ortogonales dos a dos).

Si W es la dirección del espacio afín euclídeo E, entonces el hiperplano impropio es $H_\infty = \mathcal{P}(W)$ y hay definido sobre W el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dicho producto escalar sirve para establecer el isomorfismo lineal $\flat : W \to W^*$, definido por $\flat(\vec{w})(\vec{y}) = \langle \vec{w}, \vec{y} \rangle$, para todo $\vec{y} \in W$. Nótese que si $w^* \in W^*$, entonces $\flat^{-1}(w^*)$ es el vector de W tal que $\langle \flat^{-1}(w^*), \vec{y} \rangle = w^*(\vec{y})$, para todo $\vec{y} \in W$.

Definición 5.1. Se llama *referencia normal* de una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$, a toda referencia euclídea que sea autoconjugada con respecto a $\mathcal{C}(\omega)$. Se denomina *ecuación reducida* de una variedad cuadrática, a la ecuación de la variedad cuadrática con respecto a una referencia normal.

Veremos que, según la definición anterior, las variedades cuadráticas que admiten referencias normales son las que tienen centro o punto singular propio. Mas adelante, estableceremos la noción de referencia normal para las variedades sin centro y sin punto singular propio.

Proposición 5.2. *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática definida en un espacio afín euclídeo E con forma polar f y denotamos por $H_\infty = \mathcal{P}(W)$ el hiperplano impropio. La referencia euclídea $\{O; \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es normal si y sólo si O es un centro o un punto singular propio y $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es una base ortonormal de W formada por vectores propios de la aplicación lineal $\flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W} : W \to W$, donde $\hat{f}_{|W} : W \to W^*$ es la aplicación lineal de polaridad de $\omega_{|W}$. Nótese que $\langle \flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}(\vec{w}), \vec{y} \rangle = \hat{f}_{|W}(\vec{w})(\vec{y}) = f_{|W}(\vec{w}, \vec{y})$, para todo $\vec{y} \in W$. Además, en tal caso, la ecuación de la variedad cuadrática con respecto a la referencia normal es*

$$\omega(\vec{c}) + \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = 0,$$

donde $\langle \vec{c} \rangle = O$, $\langle \vec{c} + \vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_n \rangle = O + (\vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_n)$ y λ_i es el autovalor de $\flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}$ asociado al autovector $\vec{u}_i$.

Demostración. Si $\{O; \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ es normal, entonces, para $i = 1, \ldots, n$, O es conjugado al punto $\langle \vec{u}_i \rangle$. Por tanto, si $O \in \mathcal{C}(\omega)$ es un punto singular propio de $\mathcal{C}(\omega)$ y si $O \notin \mathcal{C}(\omega)$ es un centro. Por otro lado, como para $i \neq j$, se tiene $f(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = 0$, se tiene que

$$\flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}(\vec{u}_i) = \sum_{j=1}^{n} f(\vec{u}_i, \vec{u}_j)\vec{u}_j = f(\vec{u}_i, \vec{u}_i)\vec{u}_i = \lambda_i \vec{u}_i.$$

Luego $\vec{u}_i$ es un vector propio de $\flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}$ asociado al autovalor $\lambda_i = f(\vec{u}_i, \vec{u}_i)$.

Recíprocamente, si O es centro o punto singular propio de $\mathcal{C}(\omega)$, entonces es conjugado a todo $\langle \vec{u}_i \rangle$, $i = 1, \ldots, n$. Además, si $\vec{u}_i$ es un vector propio de $\flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}$ asociado al autovalor λ_i, se tiene que la ecuación de $\mathcal{C}(\omega)$ con respecto a $\{O; \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ es

$$\omega(\vec{c}) + \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = 0,$$

donde $\vec{c}$ es tal que

$$\langle \vec{c} \rangle = O \quad \text{y} \quad O + \vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_n = \langle \vec{c} + \vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_n \rangle. \tag{5.6}$$

Por tanto, $\{O; \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ es una referencia normal con respecto a $\mathcal{C}(\omega)$. $\square$

Observación 5.3. El cómputo de $\omega(\vec{c})$ es simplemente tomar las cordenadas afines $(c_1, \ldots, c_n)$ de O según la referencia que se esté inicialmente usando y sustituirla en la ecuación de $\mathcal{C}(\omega)$ con respecto a dicha referencia euclídea. El valor numérico obtenido es $\omega(\vec{c})$.

Fijamos una referencia euclídea $\mathcal{E} = \{O'; \vec{u}'_1, \ldots, \vec{u}'_n\}$. Sean A y α_{00} la matriz asociada a $\mathcal{C}(\omega)$ y el menor complementario de a_{00}, respectivamente.

Corolario 5.4. *En las mismas condiciones que en el lema anterior y si A es la matriz asociada a $\mathcal{C}(\omega)$ con respecto a una referencia euclídea $\mathcal{E} = \{O'; \vec{u}'_1, \ldots, \vec{u}'_n\}$. Una referencia euclídea $\{O; \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ es normal si y sólo si O es un centro o un punto singular propio y $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ es una base ortonormal asociada tal que cada $\vec{u}_i$ corresponde a vectores columnas que son vectores propios de la submatriz α_{00} de A.*

Demostración. Obsérvese que con respecto a la base $\{\vec{u}'_1, \ldots, \vec{u}'_n\}$ de $\mathcal{E} = \{O'; \vec{u}'_1, \ldots, \vec{u}'_n\}$, se tiene

$$\flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}(\vec{u}'_i) = \sum_{j=1}^{n} f(\vec{u}'_i, \vec{u}'_j)\vec{u}'_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\vec{u}'_j.$$

Por lo que la matriz asociada a $\flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}$ es α_{00}. De esto se sigue el corolario. $\square$

5.2. Variedades cuadráticas ordinarias con centro: ecuación reducida. Sea $\mathcal{C}$ una variedad cuadrática ordinaria con centro que tiene de ecuación $X^t A X = 0$ con respecto a la referencia euclídea $\{O_1; \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$. Ello quiere decir que si $\{\vec{c}_1, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ es tal que $\langle \vec{c}_1 \rangle = O_1$ y $\langle \vec{c}_1 + \vec{w}_1 + \cdots + \vec{w}_n \rangle = O_1 + \vec{w}_1 + \cdots + \vec{w}_n$, es la matriz asociada a una forma cuadrática ω que define $\mathcal{C}$ con respecto a la base normalizada $\{\vec{c}_1, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$.

Además, sabemos que, con respecto a $\{O_1; \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$, el centro O tiene por coordenadas homogéneas $(A_{00}, A_{01}, \ldots, A_{0n})$ y por coordenadas afines euclídeas $(\frac{A_{01}}{A_{00}}, \ldots, \frac{A_{0n}}{A_{00}})$. Por tanto,

$\vec{c} = \vec{c}_1 + \frac{A_{01}}{A_{00}}\vec{w}_1 + \cdots + \frac{A_{0n}}{A_{00}}\vec{w}_n$ es tal que $\langle \vec{c} \rangle = O$ y satisface las condiciones (5.6). Se tiene

$$\omega(\vec{c}_1 + \frac{A_{01}}{A_{00}}\vec{w}_1 + \cdots + \frac{A_{0n}}{A_{00}}\vec{w}_n) = (1, \tfrac{A_{01}}{A_{00}}, \ldots, \tfrac{A_{0n}}{A_{00}}) \begin{pmatrix} \frac{|A|}{A_{00}} \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{|A|}{A_{00}}.$$

Además, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores de la matriz α_{00}, entonces una ecuación reducida de $\mathcal{C}$ es

$$\frac{|A|}{A_{00}} + \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = 0.$$

Como en este caso $A_{00} \neq 0$, todos los autovalores λ_i son no nulos.

Definición 5.5. Si son iguales todos los autovalores λ_i de α_{00} de una variedad cuadrática ordinaria con centro $\mathcal{C}(\omega)$, se dice que $\mathcal{C}(\omega)$ es una *esfera*. Si $\frac{|A|}{A_{00}}$ y λ_i tienen distinto signo, la esfera es *real*. En cambio, la esfera es *imaginaria*, si $\frac{|A|}{A_{00}}$ y λ_i tienen el mismo signo.

5.3. Variedades cuadráticas ordinarias sin centro: ecuación reducida. Una variedad cuadrática ordinaria sin centro tampoco tiene puntos singulares. Por tanto, no existe una referencia normal para una tal variedad cuadrática. Luego una ecuación reducida, en el sentido de la definición 5.1, no tiene. Sin embargo, vamos a elegir una cierta referencia de modo que la ecuación de la variedad cuadrática sea lo mas diagonal posible.

Si la variedad cuadrática ordinaria $\mathcal{C}(\omega)$ no tiene centro y A es la matriz asociada para una cierta referencia euclídea $\mathcal{E} = \{O'; \vec{u}'_1, \ldots, \vec{u}'_n\}$, el adjunto A_{00} es cero. Ello quiere decir que el hiperplano impropio $H_\infty = \mathcal{P}(W)$ es tangente a $\mathcal{C}(\omega)$. Luego existe un punto $\langle \vec{u}_1 \rangle \in \mathcal{C}(\omega) \cap H_\infty$ tal que su hiperplano polar $\widetilde{f}(\langle \vec{u}_1 \rangle) = H_\infty$. Además, tomamos $\vec{u}_1$ tal que $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle = 1$. Si consideramos la aplicación $\flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W} : W \to W$, donde $\hat{f}_{|W} : W \to W^*$ es la aplicación lineal de polaridad de $\omega_{|W}$, entonces 0 es un valor propio y $\vec{u}_1$ es un vector propio asociado a 0. Obsérvese que $\langle \flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}(\vec{u}_1), \vec{w} \rangle = f(\vec{u}_1, \vec{w}) = 0$.

Ahora como α_{00} es la matriz asociada a $\flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}$ con respecto a la base $\{\vec{u}'_1, \ldots, \vec{u}'_n\}$ y es simétrica, se tiene que α_{00} es diagonalizable y admite n valores propios $0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base ortonormal de vectores propios cuyo primer vector es el $\vec{u}_1$ fijado anteriormente, entonces los hiperplanos polares $\widetilde{f}(\langle \vec{u}_1 \rangle) = H_\infty, \widetilde{f}(\langle \vec{u}_2 \rangle), \ldots, \widetilde{f}(\langle \vec{u}_n \rangle)$ son distintos e independientes (como $\mathcal{C}(\omega)$ es ordinaria, la polaridad $\widetilde{f}$ y la aplicación lineal de polaridad $\hat{f}$ son biyectivas). Por tanto, $H_\infty \cap \widetilde{f}(\langle \vec{u}_2 \rangle) \cap \cdots \cap \widetilde{f}(\langle \vec{u}_n \rangle) = \langle \vec{u}_1 \rangle$ es un único punto y $\widetilde{f}(\langle \vec{u}_2 \rangle) \cap \cdots \cap \widetilde{f}(\langle \vec{u}_n \rangle) = r$ una recta propia, porque $r \nsubseteq H_\infty$. Nótese que $\langle \vec{u}_1 \rangle \in r$ y si $P = \langle \vec{p} \rangle \neq \langle \vec{u}_1 \rangle$ está en r, se tiene que

$$f(\vec{p}, \vec{u}_1)^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{u}_1) = f(\vec{p}, \vec{u}_1)^2 - \omega(\vec{p}) \cdot 0 = f(\vec{p}, \vec{u}_1)^2 \neq 0,$$

ya que al ser P punto propio no es conjugado a $\langle \vec{u}_1 \rangle$. Luego r es una recta secante a $\mathcal{C}(\omega)$ con $r \cap \mathcal{C}(\omega) = \{O, \langle \vec{u}_1 \rangle\}$ con O punto propio. Ahora considerando la referencia euclídea $\{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ y tomando $\vec{c}$ tal que $\langle \vec{c} \rangle = O$ y $\langle \vec{c} + \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_n \rangle = O + \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_n$ se tiene que la matriz asociada a ω respecto de la base $\{\vec{c}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & f(\vec{c}, \vec{u}_1) & 0 & .. & 0 \\ f(\vec{c}, \vec{u}_1) & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & .. & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Poniendo $p = f(\vec{c}, \vec{u}_1)$, se tiene que la ecuación de $\mathcal{C}(\omega)$ con respecto a $\{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ es

$$2py_1 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = 0.$$

En esta situación, se adopta el convenio de denominar *ecuación reducida* de $\mathcal{C}(\omega)$ a esta ecuación. Nótese que al ser $\mathcal{C}(\omega)$ ordinaria, los valores propios $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ son no nulos. Además, utilizando la matriz de paso entre la referencia inicial y la referencia que nos da nuestra, así llamada, *ecuación reducida*, se tiene que

$$\begin{pmatrix} 0 & f(\vec{c}, \vec{u}_1) & 0 & .. & 0 \\ f(\vec{c}, \vec{u}_1) & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & .. & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & p_{11} & \dots & p_{1n} \\ c_2 & p_{21} & \dots & p_{2n} \\ .. & .. & \dots & .. \\ c_n & p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & p_{11} & \dots & p_{1n} \\ c_2 & p_{21} & \dots & p_{2n} \\ .. & .. & \dots & .. \\ c_n & p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

donde

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & \dots & p_{2n} \\ .. & \dots & .. \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal, se tiene que $|A| = -f(\vec{c}, \vec{u}_1)^2 \lambda_2 \dots \lambda_n$. Por tanto, $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ son los autovalores no nulos de α_{00} y

$$p^2 = -\frac{|A|}{\lambda_2 \dots \lambda_n}.$$

La ambiguedad en el signo de p en este cómputo, viene dada del hecho que también podríamos haber considerado la referencia $\{O; -\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ y en este caso la ecuación sería

$$-2py_1 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = 0.$$

Al punto O se le denomina *vértice* de $\mathcal{C}(\omega)$ y a la recta $O + \mathbb{R}\vec{u}_1$ se denomina *eje* de $\mathcal{C}(\omega)$. Nótese que la rectas $O + \mathbb{R}\vec{u}_i$, $i = 2, \dots n$, son rectas tangentes a $\mathcal{C}(\omega)$ en el vértice O y el hiperplano $O + \mathbb{R}\vec{u}_2 + \cdots + \mathbb{R}\vec{u}_n$ es el hiperplano tangente a $\mathcal{C}(\omega)$ en O y coincide con el hiperplano polar de O.

Observación 5.6. También si $(0, v_1, \dots, v_n)$ representa $\langle \vec{u}_1 \rangle = H_\infty \cap \mathcal{C}(\omega)$ de modo que $v_1\vec{u}_1' + \cdots + v_n\vec{u}_n' = \vec{u}_1$, entonces

$$p = f(\vec{c}, \vec{u}_1) = (1, c_1, \dots, c_n) A \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{pmatrix} = (1, c_1, \dots, c_n) \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{0i} v_i \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{0i} v_i.$$

5.4. Variedades cuadráticas cuyo espacio de puntos singulares es de dimensión m: ecuación reducida. No consideraremos el caso en que la variedad cuadrática $C(\omega)$ sea el hiperplano impropio doble o sea el producto de un hiperplano propio por el hiperplano impropio. En geometría euclídea, el estudio de estos dos casos no tiene sentido. Esto es, $H_\infty \not\subseteq C(\omega)$.

(I) Si el espacio $\mathcal{P}(\ker \hat{f})$ de puntos singulares es propio (nótese que, en este caso, nuestra variedad cuadrática no tiene centro). Supongamos que los puntos del infinito de $\mathcal{P}(\ker \hat{f})$ están determinados por los vectores unitarios y ortogonales dos a dos $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$. Esto es, $\mathcal{P}(\ker \hat{f}) \cap H_\infty = \mathcal{P}(\mathbb{R}\vec{u}_1 + \cdots + \mathbb{R}\vec{u}_m)$. Estos son vectores propios de α_{00} asociados al valor propio cero. Tomando O un punto propio de $\mathcal{P}(\ker \hat{f})$ y completamos los vectores anteriores para obtener una base ortonormal $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m, \ldots, \vec{u}_n\}$ de vectores propios de α_{00}. Una referencia normal es $\{O; \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m, \ldots, \vec{u}_n\}$ y la ecuación reducida correspondiente viene dada por

$$\lambda_{m+1} y_{m+1}^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = 0,$$

donde $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$ son valores propios no nulos de α_{00} (si $\lambda_i = 0$, $i = m+1, \ldots, n$, $\langle \vec{u}_i \rangle$ sería singular, contradicción).

(II) Si el espacio $\mathcal{P}(\ker \hat{f}) = \mathcal{P}(\mathbb{R}u_1 + \cdots + \mathbb{R}u_m + \mathbb{R}u_{m+1})$ de puntos singulares es impropio (consideramos $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m, \vec{u}_{m+1}\}$ unitarios y ortogonales). Entonces H_∞ está en el conjunto imagen de la polaridad. Además, si $P = \langle \vec{p} \rangle$ es tal que $\widetilde{f}(P) = H_\infty$, entonces cualquier otro punto R tal que $\widetilde{f}(R) = H_\infty$ es de la forma $R = \langle \lambda \vec{p} + \vec{w} \rangle$, donde $\lambda \neq 0$ y $\vec{w} \in \ker(\hat{f})$. Así, existe un subespacio $S = P + \mathcal{P}(\ker \hat{f})$ de dimensión $m+1$, cuyos puntos no singulares tienen a H_∞ como hiperplano polar. Hay dos alternativas:

(a) $S \not\subseteq H_\infty$. Entonces tomando un punto propio O de S (que sería un centro) y una base ortonormal $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m, \vec{u}_{m+1}, \ldots, \vec{u}_n\}$ de vectores propios de α_{00}, se tiene que

$$\{O; \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m, \vec{u}_{m+1}, \ldots, \vec{u}_n\}$$

es una referencia normal y la ecuación reducida correspondiente es

$$a_0 + \lambda_{m+2} y_{m+2}^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = 0,$$

donde $a_0 = \omega(\vec{c})$, $\vec{c}$ se elige de modo que cumpla las condiciones (5.6) y $\lambda_{m+2}, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios no nulos de α_{00} (si $\lambda_i = 0$, $i = m+2, \ldots, n$, $\langle \vec{u}_i \rangle$ sería singular).

Observación 5.7. Un modo alternativo de calcular $a_0 = \omega(\vec{c})$: si $(c_1, \ldots, c_n)$ son las coordenadas afines euclídeas del centro elegido O, entonces se tiene que

$$a_0 = a_{00} + a_{01} c_1 + \cdots + a_{0n} c_n.$$

(b) $S \subseteq H_\infty$. En este caso sean $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m, \vec{u}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}\}$ unitarios y ortogonales dos a dos tales que $\mathcal{P}(\ker \hat{f}) = \mathcal{P}(\mathbb{R}u_1 + \cdots + \mathbb{R}u_m + \mathbb{R}u_{m+1})$ y $S = \mathcal{P}(\mathbb{R}u_1 + \cdots + \mathbb{R}u_m + \mathbb{R}u_{m+1} + \mathbb{R}u_{m+2})$. Nótese que $\widetilde{f}(\langle \vec{u}_{m+2} \rangle) = H_\infty$. Luego $\vec{u}_{m+2}$ es un vector propio de α_{00} asociado al valor propio 0. En este caso no hay referencia normal, ni ecuación reducida en sentido estricto. Sin embargo, como en ocasiones anteriores, se puede buscar una referencia cuya ecuación correspondiente sea lo más sencilla posible. Además, como $H_\infty \not\subseteq C(\omega)$ (esto quiere decir que α_{00} es no nula y no todos sus autovalores son 0), se tiene que $S \neq H_\infty$. Es decir, $m+2 < n$. Completamos los vectores anteriores para obtener $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, \vec{u}_{m+3}, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base ortonormal de vectores propios de α_{00}. Entonces se puede deducir que los hiperplanos $\widetilde{f}(\langle \vec{u}_{m+3} \rangle), \ldots, \widetilde{f}(\langle \vec{u}_n \rangle)$ son hiperplanos propios que son independientes. Luego

$\widetilde{f}(\langle\vec{u}_{m+3}\rangle)\cap\cdots\cap\widetilde{f}(\langle\vec{u}_n\rangle)$ es un subespacio proyectivo $\mathcal{P}(L)$ de dimensión $n-(n-(m+2)) = m+2$. Además, si $X \in \mathcal{P}(L) \cap H_\infty$, entonces $X \in S$. Luego $\mathcal{P}(L) \cap H_\infty = S$. Luego $\mathcal{P}(L)$ es un subespacio de dimensión $m+2$ propio.

Adicionalmente, se tiene que $\mathcal{P}(L)\cap\mathcal{C}(\omega)$ es una variedad cuadrática en el $m+2$-espacio $\mathcal{P}(L)$ que es el producto del $m+1$-espacio impropio S y un $m+1$-espacio propio τ. En efecto, como S es un hiperplano de $\mathcal{P}(L)$ y $S \subseteq \mathcal{P}(L)\cap\mathcal{C}(\omega)$, entonces $\mathcal{P}(L)\cap\mathcal{C}(\omega)$ tiene rango dos a lo sumo. En el caso, de que sea de rango 0. Esto es, $\mathcal{P}(L) \subseteq \mathcal{C}(\omega)$ un punto propio de $\mathcal{P}(L)$ sería singular de $\mathcal{C}(\omega)$. Por otro lado, rango de $\mathcal{P}(L)\cap\mathcal{C}(\omega)$ es 1 si y sólo si $\mathcal{P}(L)\cap\mathcal{C}(\omega) = S^2$. En tal caso, un punto propio de $\mathcal{P}(L)$ sería centro de $\mathcal{C}(\omega)$, cosa que ya vimos no puede ser en este caso. Por tanto, $\mathcal{P}(L) \cap \mathcal{C}(\omega)$ es rango 2 y es el producto de dos hiperplanos reales y distintos de $\mathcal{P}(L)$. Es decir, $\mathcal{P}(L) \cap \mathcal{C}(\omega) = S.\tau$ como se apuntó anteriormente. Tomando ahora un punto propio O de τ y considerando la referencia $\{O; \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, \vec{u}_{m+3}, \ldots, \vec{u}_n\}$, denotando $p = f(\vec{c}, \vec{u}_{m+2})$, donde $\vec{c}$ se elige de modo que cumpla las condiciones (5.6), la ecuación correpondiente es

$$2py_{m+2} + \lambda_{m+3}y_{m+3}^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = 0.$$

Además, si para la referencia inicial $\{O'; \vec{u}'_1, \ldots, \vec{u}'_n\}$, las coordenadas de O son $(c_1, \ldots, c_n)$ y $\vec{u}_{m+2} = v_1\vec{u}'_1 + \cdots + v_n\vec{u}'_n$, entonces

$$p = (1, c_1, \ldots, c_n)A \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \\ .. \\ v_n \end{pmatrix} = (1, c_1, \ldots, c_n) \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{0i}v_i \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{0i}v_i.$$

Esto es, en realidad p no depende del punto propio O de τ elegido, sino del vector $\vec{u}_{m+2}$.

Nótese que el hiperplano polar de O es la extensión proyectiva del hiperplano afín $O + \mathbb{R}\vec{u}_1 + \cdots + \mathbb{R}\vec{u}_{m+1} + \mathbb{R}\vec{u}_{m+3} + \cdots + \mathbb{R}\vec{u}_n$ y $\vec{u}_{m+2}$ es perpendicular a este último hiperplano.

Definición 5.8. Un punto O es un *vértice* de una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ sin centro y sin punto singular propio, si $O \in \mathcal{C}(\omega)$, es propio, no singular y existe un vector $\vec{u}$ no nulo, perpendicular al hiperplano polar de O tal que el hiperplano polar de $\langle\vec{u}\rangle$ es el hiperplano impropio.

Hasta ahora las únicas variedades que tienen referencia normal y ecuación reducida son las variedades cuadráticas con centro o con punto singular propio. Para las variedades cuadráticas restantes establecemos estas nociones en el modo siguiente.

Definición 5.9. Para una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ sin centro y sin punto singular propio, una referencia euclídea $\{O; \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ se dice que es *normal*, si la referencia proyectiva asociada $\{O, \langle\vec{u}_1\rangle, \ldots, \langle\vec{u}_n\rangle; O + \vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_n\}$ es tal que los puntos básicos son conjugados dos a dos salvo O y un único $\langle\vec{u}_i\rangle$, teniéndose además que O y $\langle\vec{u}_i\rangle$ son autoconjugados. La ecuación de $\mathcal{C}(\omega)$ con respecto a una tal referencia viene dada por

$$\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_{i-1}y_{i-1}^2 + 2py_i + \lambda_{i+1}y_{i+1}^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = 0,$$

y se denomina *ecuación reducida* de $\mathcal{C}(\omega)$.

Ejes de una variedad cuadrática

Definición 5.10. Se dice que una recta propia r es un *eje* de una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$, si satisface al menos una de las siguientes condiciones:

(a) r contiene dos centros;
(b) r contiene dos puntos singulares propios,
(c) r es un diámetro tal que su punto impropio es perpendicular a su hiperplano polar (que es propio),
(d) r contiene un punto singular propio y su punto impropio es perpendicular a su hiperplano polar (que es propio).
(e) la variedad cuadrática es sin centro y sin punto singular propio, r pasa por un vértice O y el punto impropio $\langle\vec{u}\rangle$ de r es tal que satisface una de las siguientes condiciones:
  (i) $\langle\vec{u}\rangle$ es un punto singular;
  (ii) $\langle\vec{u}\rangle$ es perpendicular al hiperplano polar de O;
  (iii) $\langle\vec{u}\rangle$ es perpendicular a su hiperplano polar.

Lema 5.11. *Una recta propia r es un eje si y sólo si su dirección $\vec{u}$ es un vector propio de $\flat^{-1}\circ\hat{f}_{|W} : W \to W$, donde $\hat{f}_{|W} : W \to W^*$ es la aplicación lineal de polaridad de $\omega_{|W}$, y contiene un centro o un punto singular propio o, cuando la variedad cuadrática es sin centro y sin punto singular propio, r contiene un vértice de la misma y r es perpendicular o está contenida en el hiperplano polar de dicho vértice.*

Demostración. Sea r un eje. Si r contiene dos centros, entonces el punto del infinito de r es singular. Por lo que está determinado por un vector $\vec{u}$ tal que $\langle\flat^{-1}\circ\hat{f}_{|W}(\vec{u}),\vec{y}\rangle = f(\vec{u},\vec{y}) = 0$, para todo $\vec{y}\in W$. Luego $\vec{u}$ es un vector propio asociado al valor propio 0.

Si r contiene dos puntos singulares, entonces el punto del infinito de r también es singular. Por lo que está determinado por un vector propio $\vec{u}$ asociado al valor propio 0.

Si r es un diámetro tal que su punto impropio $\langle\vec{u}\rangle$ es perpendicular a su hiperplano polar (que es propio). Entonces, para todo vector ortogonal $\vec{y}$ ortogonal a $\vec{u}$, se tendrá $f(\vec{u},\vec{y}) = 0$. Tomando $\vec{u}$ unitario,

$$\langle\flat^{-1}\circ\hat{f}_{|W}(\vec{u}),\vec{y}\rangle = f(\vec{u},\vec{y}) = \langle\vec{u},\vec{y}\rangle f(\vec{u},\vec{u}). \tag{5.7}$$

Por tanto, $\flat^{-1}\circ\hat{f}_{|W}(\vec{u}) = \omega(\vec{u})\vec{u}$.

Si r contiene un punto singular propio y su punto impropio $\langle\vec{u}\rangle$ es perpendicular a su hiperplano polar (que es propio). Entonces tomando $\vec{u}$ unitario y procediendo como en (5.7), se obtiene que $\vec{u}$ es un vector propio asociado a $\omega(\vec{u})$ no nulo.

El caso en que la variedad cuadrática no tiene centro, ni punto singular propio y r pasa por un vértice O. Si el punto impropio $\langle\vec{u}\rangle$ de r es un punto singular, $\vec{u}$ es un vector propio de $\flat^{-1}\circ\hat{f}_{|W}$ asociado al valor propio 0 y la recta r está contenida en el hiperplano polar de O. Si $\langle\vec{u}\rangle$ es perpendicular al hiperplano polar de O, entonces el hiperplano polar de $\langle\vec{u}\rangle$ es el hiperplano impropio. Por tanto, $\vec{u}$ es un vector propio de de $\flat^{-1}\circ\hat{f}_{|W}$ asociado al valor propio 0. Por último, si $\langle\vec{u}\rangle$ es perpendicular a su hiperplano polar. Tomando $\vec{u}$ unitario y procediendo como en (5.7), se tiene que $\flat^{-1}\circ\hat{f}_{|W}(\vec{u}) = \omega(\vec{u})\vec{u}$. Esto es, $\vec{u}$ es vector propio asociado al valor propio no nulo $\omega(\vec{u})$.

Recíprocamente, supongamos que r es una recta contiene un punto O que es un centro o un punto singular propio o, cuando la variedad cuadrática no tiene centro, ni punto singular propio, un vértice y su dirección $\vec{u}$ es un vector propio de $\flat^{-1}\circ\hat{f}_{|W} : W \to W$.

Si O es centro o punto singular propio y $\vec{u}$ está asociado al valor propio 0, entonces $\langle\vec{u}\rangle$ es conjugado a O y a todo punto impropio. Por tanto, $\langle\vec{u}\rangle$ es punto singular. Luego todo punto r es conjugado a todos los puntos de H_∞. Si O es centro, cualquier punto propio de r también lo es. Si O es punto singular, entonces la recta r está constituida por puntos singulares. En ambos casos, r es un eje.

Si O es centro o punto singular propio y $\vec{u}$ está asociado al valor propio λ no nulo. Entonces $\langle\vec{u}\rangle$ es no singular y es perpendicular a su hiperplano polar que pasa por O. En efecto, para todo $\vec{y} \in W$ tal que $\langle\vec{u},\vec{y}\rangle$, se tiene que $f(\vec{u},\vec{y}) = \langle\flat^{-1}\circ\hat{f}_{|W}(\vec{u}),\vec{y}\rangle = \lambda\langle\vec{u},\vec{y}\rangle = 0$, Además, $f(\vec{u},\vec{u}) = \langle\flat^{-1}\circ\hat{f}_{|W}(\vec{u}),\vec{u}\rangle = \lambda\langle\vec{u},\vec{u}\rangle = \lambda$. Por tanto, también en este caso, r es eje.

Si O es un vértice y $\vec{u}$ está asociado al valor propio 0. Si O y $\langle\vec{u}\rangle$ son conjugados, entonces $\langle\vec{u}\rangle$ es punto singular impropio y r sería eje. Si O y $\langle\vec{u}\rangle$ no son conjugados, entonces r no está contenida en el hiperplano polar de O. Por tanto, $\vec{u}$ es perpendicular al hiperplano polar de O. Luego r sería también eje en este segundo caso.

Si O es un vértice y $\vec{u}$ está asociado a un valor propio λ no nulo, entonces es perpendicular a todos los vectores propios asociados al cero. Por tanto, $\vec{u}$ es paralelo al hiperplano polar de O. De ahí que r esté contenida en dicho hiperplano. Además,

$$f(\vec{u},\vec{u}) = \langle\flat^{-1}\circ\hat{f}_{|W}(\vec{u}),\vec{u}\rangle = \lambda\langle\vec{u},\vec{u}\rangle \neq 0,$$

y, si $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{u}$,

$$f(\vec{u},\vec{v}) = \langle\flat^{-1}\circ\hat{f}_{|W}(\vec{u}),\vec{v}\rangle = \lambda\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = 0.$$

Por tanto, el hiperplano polar de $\langle\vec{u}\rangle$ es propio con dirección el conjunto de vectores $\vec{u}^{\perp}$ que son ortogonales a $\vec{u}$. De ahí que r es eje. $\square$

De este último lema se deduce immediatamente la siguiente consecuencia.

Corolario 5.12. *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática definida en un espacio afín euclídeo E. La referencia euclídea $\{O;\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ es normal si y sólo si O es un centro o un punto singular propio o, si $\mathcal{C}(\omega)$ es sin centro y sin punto singular propio, un vértice y $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ es una base ortonormal de la dirección de E, de modo que las rectas $O+\mathbb{R}\vec{u}_i$ son ejes de $\mathcal{C}(\omega)$.*

Veamos la noción de vértice en un sentido general relativa a cualquier forma cuadrática.

Definición 5.13. Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ en un espacio afín euclídeo E. Se denomina *vértice* de $\mathcal{C}(\omega)$, a todo punto propio que esté en la intersección de un eje con $\mathcal{C}(\omega)$.

Lema 5.14. *Si $\mathcal{C}(\omega)$ es una variedad cuadrática en un espacio afín euclídeo E y P es un punto de E, entonces son equivalentes:*

(i) *P es un vértice de $\mathcal{C}(\omega)$*

(ii) *P es un punto singular propio o es un punto no singular propio de $\mathcal{C}(\omega)$ tal que el punto impropio determinado por la dirección perpendicular al hiperplano polar $\widetilde{f}(P)$ de P es conjugado a los puntos impropios determinados por las direcciones paralelas a $\widetilde{f}(P)$.*

(iii) *P es un punto singular propio o es un punto no singular propio de $\mathcal{C}(\omega)$ tal que el punto impropio determinado por la dirección perpendicular al hiperplano polar $\widetilde{f}(P)$ de P está determinado por un vector propio de $\flat^{-1}\circ\hat{f}_{|W} : W \to W$, donde $h : W \to W^*$ es la aplicación lineal de polaridad de $\omega_{|W}$ y $\mathcal{P}(W)$ es el hiperplano impropio.*

Demostración. Para (i) implica (ii). Si P es un vértice, entonces $P \in r \cap \mathcal{C}(\omega)$, donde la recta r es un eje.

Si el eje r contiene dos puntos singulares, entonces el vértice P es singular.

Si el eje r contiene dos centros, entonce $r \cap \mathcal{C}(\omega) = Q_\infty$, donde Q_∞ es un punto singular impropio.

Si se tiene que el eje $r = Q + \mathbb{R}\vec{u}$, donde Q es un punto singular propio y $\langle \vec{u} \rangle$ es no singular tal que $\vec{u}$ es perpendicular a su hiperplano polar $\widetilde{f}(\langle \vec{u} \rangle)$. Si $P \neq Q$, P es conjugado a P y a Q. Luego P es conjugado a $\langle \vec{u} \rangle$. Luego, como $\langle \vec{u} \rangle$ es conjugado a P y a Q, la recta r está contenida en $\widetilde{f}(\langle \vec{u} \rangle)$. Lo que implica que $\langle \vec{u} \rangle \in \widetilde{f}(\langle \vec{u} \rangle)$, contradicción. Por tanto, $P = Q$.

Si se tiene que el eje $r = C + \mathbb{R}\vec{u}$, donde C es un centro y $\langle \vec{u} \rangle$ es no singular tal que $\vec{u}$ es perpendicular a su hiperplano polar $\widetilde{f}(\langle \vec{u} \rangle)$. En tal caso, si $\langle \vec{v} \rangle$ es un punto impropio conjugado a P, como también es conjugado a C, entonces $\langle \vec{v} \rangle$ es conjugado a todos los puntos de r. En particular $\langle \vec{v} \rangle$ es conjugado a $\langle \vec{u} \rangle$. Luego si $\vec{v}$ es paralelo $\widetilde{f}(P)$, entonces $\vec{v}$ es paralelo a $\widetilde{f}(\langle \vec{u} \rangle)$. Por tanto, $\vec{v}$ y $\vec{u}$ son perpendiculares. Es decir, $\vec{u}$ es perpenndicular a $\widetilde{f}(P)$ y es conjugado a todos los puntos impropios determinados por la dirección de $\widetilde{f}(P)$.

Si se tiene que el eje $r = O + \mathbb{R}\vec{u}$, donde O es un vértice ($\mathcal{C}(\omega)$ no tiene centro, ni punto singular propio), entonces se tiene las siguientes posibilidades:

(a) $\langle \vec{u} \rangle$ es un punto singular. En este caso, el eje r está contenido en $\mathcal{C}(\omega)$, O es conjugado a P y los hiperplanos polares de O y P coinciden, $\widetilde{f}(O) = \widetilde{f}(P)$. Luego, como el hiperplano polar de la dirección $\vec{u}_1$ perpendicular a $\widetilde{f}(O) = \widetilde{f}(P)$ es el hiperplano impropio, se tiene lo afirmado en el lema.

(b) $\vec{u}$ es perpendicular a $\widetilde{f}(O)$. En este caso, $\widetilde{f}(\langle \vec{u} \rangle)$ es el hiperplano impropio y $P, O, \langle \vec{u} \rangle \in \mathcal{C}(\omega)$, no estando el eje r contenido en $\mathcal{C}(\omega)$ ($\langle \vec{u} \rangle$ es no singular). Es decir, r es secante y $O = P$. La conclusión del lema se sigue.

(c) $\vec{u}$ es perpendicular a $\widetilde{f}(\langle \vec{u} \rangle)$. Si $\widetilde{f}(\langle \vec{u}_1 \rangle)$ es el hiperplano impropio, entonces $\vec{u}$ y $\vec{u}_1$ son perpendiculares y conjugados. Ello implica que $\vec{u}$ es conjugado a O. Luego, todos los puntos de la recta r son conjugados a O. En particular, P es conjugado a O. Si P y O fuesen distintos, la recta r estaría contenida en $\mathcal{C}(\omega)$. Esto no sucede, ya que $\omega(\vec{u}) \neq 0$. Por tanto, $P = O$ y la conclusión del lema se sigue.

Para (ii) implica (iii). Si P es un punto singular propio, (iii) es obvio. Si P es un punto no singular propio de $\mathcal{C}(\omega)$, entonces si $\vec{u}$ es unitario y perpendicular al hiperplano polar de P, entonces

$$\langle \flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}(\vec{u}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{y} \rangle f(\vec{u}, \vec{u}) + f(\vec{u}, \vec{y} - \langle \vec{u}, \vec{y} \rangle \vec{u}) = \langle \omega(\vec{u})\vec{u}, \vec{y} \rangle,$$

para todo $\vec{y} \in W$. Luego $\flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}(\vec{u}) = \omega(\vec{u})\vec{u}$.

Para (iii) implica (i). Si P es un punto singular propio. Tomando un vector propio $\vec{u}$ de $\flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}$, $r = P + \mathbb{R}\vec{u}$ es un eje y $P \in r \cap \mathcal{C}(\omega)$.

Si P es un punto no singular propio. Sea $\vec{u}$ unitario y perpendicular al hiperplano polar $\widetilde{f}(P)$ de P. Sabemos que, para todo $\vec{y}$ paralelo a $\widetilde{f}(P)$, $f(\vec{u}, \vec{y}) = \langle \flat^{-1} \circ \hat{f}_{|W}(\vec{u}), \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{y} \rangle = 0$. Además, $\langle \vec{u} \rangle$ no es conjugado a P. De ahí que $\langle \vec{u} \rangle$ es no singular y caben dos posibilidades:

(i) El hiperplano $\widetilde{f}(\langle \vec{u} \rangle)$ es el hiperplano impropio. En este caso, todos los puntos singulares son impropios y no hay centros. Si hubiese algún centro C, el punto $\langle \vec{u} \rangle$ sería singular, contradicción.

(ii) El hiperplano $\widetilde{f}(\langle \vec{u} \rangle)$ es propio y paralelo a $\widetilde{f}(P)$.

□

5.5. Apéndice: focos de una cónica ordinaria.

Lema 5.15. *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una cónica ordinaria, una recta r es tangente si y sólo si su polo P pertenece a $\mathcal{C}(\omega)$.*

Demostración. En efecto, si r es tangente, existirá un punto $P \in r$ tal que P es conjugado a todos los puntos de r. Por tanto, la recta polar de P es r. Como P pertenece a su recta polar, entonces P está en la cónica. □

Dado un punto P no perteneciente a una cónica ordinaria, sea s su recta polar que no puede ser tangente. Para cualquier recta r que pase por P, sea $X = r \cap s$. Estableceremos una correspondencia tal que a la recta r la hacemos corresponder r', que es la polar del punto X. Es decir que los puntos X y $X' = r' \cap s$ son conjugados respecto de la cónica. La correspondencia establecida de esta forma entre las rectas del haz de base el punto P es una proyectivividad, denominada *proyectividad subordinada por la cónica en el punto P*. Además, se tiene el resultado siguiente.

Lema 5.16. *Dos puntos X y X' son conjugados respecto de una cónica ordinaria si y sólo si sus rectas polares son conjugadas respecto de la cónica tangencial.*

Demostración. En efecto, si $\rho U = AX$ y $\rho U' = AX'$ entonces

$$U^t A^{-1} U' = 0 \iff (AX)^t A^{-1}(AX') = 0 \iff X^t A X' = 0.$$

□

Definición 5.17. Se llaman *focos* de una cónica ordinaria, a los puntos del plano tales que la proyectividad subordinada por la cónica en ellos es tal que a cada recta le hace corresponder una recta perpendicular.

Observación 5.18. Nótese que un foco debe ser un punto propio, puesto que son paralelas todas las rectas de un haz definido por un punto impropio.

Para calcular los focos procederemos de la siguiente manera: Sea $F(p_1, p_2)$ y consideremos una recta r que pasa por F, con vector director (v_1, v_2),

$$r \equiv (v_2 p_1 - v_1 p_2) - v_2 x + v_1 y = 0.$$

Para que F sea un foco tiene que ocurrir que la recta perpendicular a r

$$r' \equiv (v_1 p_1 + v_2 p_2) - v_1 x - v_2 y = 0,$$

sea conjugada de r respecto de la cónica tangencial.

En particular, consideremos la recta que pasa por F y tiene por vector director el $(1, 0)$, esto es, la recta de coeficientes $U_1 = (-p_2, 0, 1)$. Su conjugada respecto de la cónica tangencial será la recta que pasa por F y tiene por vector director el $(0, 1)$, la recta $U_2 = (p_1, -1, 0)$. El hecho de que U_1 y U_2 sean conjugadas respecto de la cónica tangencial nos dá la condición

$$f^*(U_1, U_2) = 0.$$

Por otra parte, toda recta r que pase por F y tenga por dirección (v_1, v_2), tiene unas coordenadas tangenciales,

$$U = \begin{pmatrix} v_2 p_1 - v_1 p_2 \\ -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} p_1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_1 \begin{pmatrix} -p_2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 U_1 + v_2 U_2$$

y para su conjugada r' será $U' = -v_2U_1 + v_1U_2$. Poniendo la condición de conjugación

$$0 = f^*(U, U') = v_1v_2(\omega^*(U_2) - \omega^*(U_1),$$

de donde se deduce que

$$\omega^*(U_1) = \omega^*(U_2).$$

Por tanto, para calcular los focos sólo es necesario recordar que para las rectas U_1 y U_2 se tiene que

$$\begin{aligned} f^*(U_1, U_2) &= 0, \\ \omega^*(U_1) &= \omega^*(U_2). \end{aligned}$$

Esto resulta un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que son p_1 y p_2, las coordenadas de un foco $F(p_1, p_2)$. Al resolver dicho sistema, se obtendrán los focos de la cónica.

Definición 5.19. Se llaman *directrices* a las polares de los focos.

EJERCICIOS:

(a) Mostrar que los focos de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, con $a \geq b$, son $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$, donde c es el número real positivo tal que $a^2 = b^2 + c^2$.

(b) Mostrar que los focos de la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, son $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$, donde c es el número real positivo tal que $c^2 = a^2 + b^2$.

(c) Mostrar que el foco de la parábola $y^2 = 2px$, es $F(\frac{p}{2}, 0)$.

(d) Mostrar que el foco de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, coincide con el centro $C(0, 0)$.

5.6. Apéndice: caracterizaciones métricas (euclídeas) de las cónicas ordinarias reales.

Proposición 5.20. *En una elipse real, la suma de distancias desde un punto cualquiera de la elipse a los dos focos es constante. Además, la distancia entre los focos es menor que dicha constante.*

Demostración. Dada una elipse real $\mathcal{C}(\omega)$, consideramos la referencia normal para la cual la elipse tiene como ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde $a \geq b > 0$. Sabemos que en este caso los focos de la elipse son los puntos $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$, donde $a^2 = b^2 + c^2$. Sea $X(x, y)$ un punto de la elipse, entonces la distancia $d(X, F)$

viene dada por

$$\begin{aligned} d(X,F)^2 &= (x-c)^2+y^2 \\ &= x^2+c^2-2xc+b^2(1-\frac{x^2}{a^2}) \\ &= x^2(1-\frac{b^2}{a^2})+a^2-2xc \\ &= \frac{x^2c^2}{a^2}+a^2-2\frac{xc}{a}a \\ &= \left(a-\frac{xc}{a}\right)^2. \end{aligned}$$

Análogamente, se puede mostrar que

$$d(X,F')^2 = \left(a+\frac{xc}{a}\right)^2.$$

Además, sabemos que $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$. Por tanto, $-a \leq x \leq a$. Por otro lado, se tiene que $0 \leq c < a$, teniendo en cuenta que $b \neq 0$, lo que implica que $0 \leq \frac{c}{a} < 1$. Por consiguiente,

$$-a \leq -a\frac{c}{a} \leq \frac{xc}{a} \leq a\frac{c}{a} \leq a.$$

Luego

$$d(X,F) = \left(a-\frac{xc}{a}\right) \geq 0.$$

$$d(X,F') = \left(a+\frac{xc}{a}\right) \geq 0.$$

Finalmente, se puede afirmar que

$$d(X,F)+d(X,F') = 2a.$$

□

Nótese que en el caso de que la elipse anterior fuese una circunferencia, se tendría $a = b$, $c = 0$ y $F = F' = (0,0)$. Por lo que el único foco coincide con el centro de la circunferencia y $d(X,F) = a$.

Corolario 5.21. *En una circunferencia real, la distancia desde un punto cualquiera de la circunferencia al centro es constante.*

Recíprocamente.

Proposición 5.22. *Dados dos puntos F y F' y una constante positiva $2a$ mayor que la distancia entre F y F', el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a F y F' es $2a$, es una elipse real.*

Demostración. Sea $2c$ la distancia entre F y F' y consideramos una referencia euclídea de modo que $(c,0)$ y $(-c,0)$ sean las coordenadas de los puntos F y F', respectivamente. Por hipótesis, $2c < 2a$ y si $X(x,y)$ es un punto del lugar geométrico y se denotan $d = d(X,F)$ y $d' = d(X,F')$, entonces $d + d' = 2a$. Además, como $d^2 = x^2 + c^2 - 2xc + y^2$ y $d'^2 = x^2 + c^2 + 2xc + y^2$, se tiene que $d'^2 - d^2 = 4xc$. Lo que implica

$$2a(d' - d) = (d' + d)(d' - d) = 4xc.$$

Por tanto, $d' - d = \dfrac{2xc}{a}$. Teniendo en cuenta que $d + d' = 2a$, se sigue que

$$\begin{aligned} d &= a - \frac{xc}{a}, \\ d' &= a + \frac{xc}{a}. \end{aligned}$$

Ahora, a partir de

$$\left(a - \frac{xc}{a}\right)^2 = x^2 + c^2 - 2xc + y^2,$$

se tiene

$$a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2.$$

Denotando $b^2 = a^2 - c^2$, se llega a la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que es una elipse real. $\square$

Si la distancia $2c = 0$, entonces $F = F' = (0, 0)$ y se obtiene la ecuación

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Por consiguiente, resulta la siguiente afirmación.

Corolario 5.23. *El lugar geométrico de todos los puntos equidistan de uno fijo F, siendo dicha equidistancia un número real positivo a no nulo, es una circunferencia real.*

Proposición 5.24. *En una elipse real, la razón entre la distancia de un punto a un foco y la distancia de dicho punto a la correspondiente directriz es constante. Dicha constante es la excentricidad $e = \dfrac{c}{a} < 1$.*

Demostración. Sea la elipse real

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde $a \geq b$. Por tanto, sabemos que los focos son $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$, donde c es un número real no negativo tal que $c^2 = a^2 - b^2$. A los focos F y F' le correponden las directrices $r_F \equiv cx = a^2$ y $r_{F'} \equiv cx = -a^2$, respectivamente.

Si $X(x, y)$ es un punto de la elipse, sabemos por una demostración de una proposición anterior que

$$\begin{aligned} d(X, F) &= a - \frac{xc}{a}, \\ d(X, F') &= a + \frac{xc}{a}. \end{aligned}$$

Calculamos ahora los cocientes mencionados en el enunciado, suponiendo que c es no nulo,

$$\frac{d(X,F)}{d(X,r_F)} = \frac{a - \frac{xc}{a}}{\frac{|a^2-cx|}{c}} = \frac{c\left(a - \frac{xc}{a}\right)}{a\left(a - \frac{xc}{a}\right)} = \frac{c}{a}.$$

Para el otro foco F'

$$\frac{d(X,F')}{d(X,r_{F'})} = \frac{a + \frac{xc}{a}}{\frac{|a^2+cx|}{c}} = \frac{c\left(a + \frac{xc}{a}\right)}{a\left(a + \frac{xc}{a}\right)} = \frac{c}{a}.$$

En el caso que $c = 0$, se tiene $F = F'$, la elipse es una circunferencia y la directriz es la recta del infinito. Por tanto, la distancia $d(X,F) = a$ y la distancia de X a la recta impropia es infinita, por lo que el cociente es $0 = \dfrac{c}{a}$. □

Observación 5.25. La excentricidad de una elipse real es no negativa y menor que 1. Si la excentricidad es nula, entonces la elipse es una circunferencia.

Un resultado recíproco al anterior es el siguiente.

Proposición 5.26. *Sea F un punto y r una recta tal que $F \notin r$ y e una constante positiva menor que* 1. *El lugar geométrico de los puntos X tales que*

$$\frac{d(X,F)}{d(X,r)} = e,$$

es una elipse real, donde F es un foco y r una directriz.

Demostración. Sea k la distancia de F a la recta r. Elegimos una referencia euclídea tal que $F(c,0)$ y $r \equiv x = \frac{a^2}{c}$, donde a y c son tales que $c + k = \dfrac{a^2}{c}$ y $e = \frac{c}{a}$. De estas condiciones se sigue que $a = \dfrac{ke}{1-e^2}$ y que $c = \dfrac{ke^2}{1-e^2}$. El lugar geométrico considerado está formado por los puntos $X(x,y)$ tales que

$$\frac{d(X,F)}{d(X,r)} = e.$$

Por tanto,

$$\frac{x^2 + c^2 - 2xc + y^2}{\frac{(a^2-cx)^2}{c^2}} = \frac{c^2}{a^2}.$$

De donde se tiene que

$$x^2 + y^2 + c^2 = a^2 + \frac{x^2c^2}{a^2}.$$

Denotando $b^2 = a^2 - c^2$, se llega finalmente a la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

□

Observación 5.27. Si en la proposición anterior, la constante e fuese nula y F siguiese siendo un punto no incluido en la recta r, entonces el lugar geométrico estaría constituido por el punto F únicamente.

Proposición 5.28. *En una hipérbola, la diferencia de distancias desde un punto cualquiera de la hipérbola a los dos focos es constante. Además, la distancia entre los focos es mayor que dicha constante.*

Demostración. Dada una hipérbola $\mathcal{C}(\omega)$, consideramos la referencia normal para la cual la hipérbola tiene como ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sabemos que en este caso los focos de la hipérbola son los puntos $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$. Sea $X(x,y)$ un punto de la hipérbola, entonces la distancia $d(X,F)$ viene dada por

$$\begin{aligned} d(X,F)^2 &= (x-c)^2 + y^2 \\ &= x^2 + c^2 - 2xc + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) \\ &= x^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) + a^2 - 2xc \\ &= \frac{x^2c^2}{a^2} + a^2 - 2\frac{xc}{a}a \\ &= \left(\frac{xc}{a} - a\right)^2. \end{aligned}$$

Análogamente, se puede mostrar que

$$d(X,F')^2 = \left(a + \frac{xc}{a}\right)^2.$$

Además, sabemos que $\dfrac{x^2}{a^2} \geq 1$. Por tanto, $x \leq -a < 0$ ó $0 < a \leq x$. Por otro lado, se tiene que $0 < a < c$, teniendo en cuenta que $b \neq 0$, lo que implica que $1 < \dfrac{c}{a}$. Por consiguiente, $\dfrac{xc}{a} \leq -a < 0$ ó $0 < a \leq \dfrac{xc}{a}$.

Si $\dfrac{xc}{a} \leq -a < 0$, se tiene que

$$d = d(X,F) = \left(\frac{xc}{a} - a\right) \geq 0.$$

$$d' = d(X,F') = \left(\frac{xc}{a} + a\right) \geq 0.$$

Por tanto, $d' - d = 2a$.

En cambio, si $0 < a \leq \dfrac{xc}{a}$, se puede afirmar que

$$d = d(X,F) = \left(a - \frac{xc}{a}\right) \geq 0.$$

$$d' = d(X,F') = \left(-\frac{xc}{a} - a\right) \geq 0.$$

De donde $d - d' = 2a$. □

Recíprocamente.

Proposición 5.29. *Dados dos puntos F y F' y una constante positiva $2a$ menor que la distancia entre F y F', el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a F y F' es $2a$, es una hipérbola.*

Demostración. Sea $2c$ la distancia entre F y F' y consideramos una referencia euclídea de modo que $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ sean las coordenadas de los puntos F y F', respectivamente. Por hipótesis, $2a < 2c$ y si $X(x, y)$ es un punto del lugar geométrico y se denotan $d = d(X, F)$ y $d' = d(X, F')$, entonces $d - d' = 2a$ ó $d' - d = 2a$. Además, como $d^2 = x^2 + c^2 - 2xc + y^2$ y $d'^2 = x^2 + c^2 + 2xc + y^2$, se tiene que $d'^2 - d^2 = 4xc$. Lo que implica

$$(d + d')2a = (d' + d)(d' - d) = 4xc.$$

o alternativamente,

$$(d + d')2a = (d' + d)(d - d') = -4xc.$$

Por tanto, $d' + d = \pm\dfrac{2xc}{a}$. Teniendo en cuenta que $d' - d = \pm 2a$, se sigue que

$$\begin{aligned} d &= \pm\left(\frac{xc}{a} - a\right), \\ d' &= \pm\left(\frac{xc}{a} + a\right). \end{aligned}$$

Ahora, a partir de

$$d^2 = \left(\frac{xc}{a} - a\right)^2 = x^2 + c^2 - 2xc + y^2,$$

se tiene

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Denotando $b^2 = c^2 - a^2$, se llega a la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que es una hipérbola. □

Proposición 5.30. *En una hipérbola, la razón entre la distancia de un punto a un foco y la distancia de dicho punto a la correspondiente directriz es constante. Dicha constante es la excentricidad $e = \dfrac{c}{a} > 1$.*

Demostración. Sea la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

sabemos que los focos son $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$, donde c es un número real no negativo tal que $c^2 = a^2 + b^2$. A los focos F y F' le correponden las directrices $r_F \equiv cx = a^2$ y $r_{F'} \equiv cx = -a^2$, respectivamente.

Si $X(x, y)$ es un punto de la hipérbola, sabemos por la demostración de una proposición anterior que

$$\begin{aligned} d(X, F) &= \pm\left(\frac{xc}{a} - a\right), \\ d(X, F') &= \pm\left(a + \frac{xc}{a}\right). \end{aligned}$$

Calculamos ahora los cocientes mencionados en el enunciado, suponiendo que c es no nulo,

$$\frac{d(X,F)}{d(X,r_F)} = \frac{\pm\left(\frac{xc}{a}-a\right)}{\frac{|a^2-cx|}{c}} = \frac{\pm c\left(\frac{xc}{a}-a\right)}{\pm a\left(\frac{xc}{a}-a\right)} = \frac{c}{a}.$$

Para el otro foco F'

$$\frac{d(X,F')}{d(X,r_{F'})} = \frac{\pm\left(\frac{xc}{a}+a\right)}{\frac{|a^2+cx|}{c}} = \frac{\pm c\left(\frac{xc}{a}+a\right)}{\pm a\left(\frac{xc}{a}+a\right)} = \frac{c}{a}.$$

$\square$

También se tiene el resultado recíproco.

Proposición 5.31. *Sea F un punto y r una recta tal que $F \notin r$ y e una constante positiva mayor que* 1. *El lugar geométrico de los puntos X tales que*

$$\frac{d(X,F)}{d(X,r)} = e,$$

es una hipérbola, donde F es un foco y r una directriz.

Demostración. Sea k la distancia de F a la recta r. Elegimos una referencia euclídea tal que $F(c,0)$ y $r \equiv x = \frac{a^2}{c}$, donde a y c son tales que $c-k = \dfrac{a^2}{c}$ y $e = \frac{c}{a}$. De estas condiciones se sigue que $a = \dfrac{ke}{e^2-1}$ y que $c = \dfrac{ke^2}{e^2-1}$. El lugar geométrico considerado está formado por los puntos $X(x,y)$ tales que

$$\frac{d(X,F)}{d(X,r)} = e.$$

Por tanto,

$$\frac{x^2+c^2-2xc+y^2}{\frac{(a^2-cx)^2}{c^2}} = \frac{c^2}{a^2}.$$

De donde se tiene que

$$x^2+y^2+c^2 = a^2 + \frac{x^2c^2}{a^2}.$$

Denotando $b^2 = c^2-a^2$, se llega finalmente a la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$\square$

Proposición 5.32. *Los puntos de una parábola equidistan del foco y de su directriz.*

Demostración. Dada una parábola $\mathcal{C}(\omega)$, consideramos la referencia euclídea para la cual la parábola tiene como ecuación $y^2 = 2px$.

Sabemos que en este caso el foco de la parábola es el punto $F(\frac{p}{2}, 0)$ y la directriz es la recta $r \equiv x = -\frac{p}{2}$. Sea $X(x, y)$ un punto de la parábola, entonces la distancia $d(X, F)$ viene dada por

$$\begin{aligned} d(X,F)^2 &= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 \\ &= x^2 + \frac{p^2}{4} - xp + 2px \\ &= x^2 + \frac{p^2}{4} + xp \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \\ &= d(X, r). \end{aligned}$$

□

Recíprocamente.

Proposición 5.33. *Dado un punto F y una recta r tal que F no esté en la recta r, el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de la recta r y del punto F, es una parábola de foco F y de directriz r.*

Demostración. Sea p la distancia entre F y r y consideramos una referencia euclídea de modo que $F(\frac{p}{2}, 0)$ y $r \equiv x = -\frac{p}{2}$. Si $X(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, entonces $d(X, F) = d(X, r)$. Por tanto,

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

De donde se sigue que $y^2 = 2px$. □

Autor: Francisco Martín Cabrera, Departamento Matemática Fundamental, Universidad de La Laguna, Islas Canarias, España

5.7. Ejercicios.

1. Hallar las ecuaciones reducidas de las siguientes cónicas:
   a) $6x^2 + 6y^2 + 4xy - 16x - 16y = 0$.
   b) $x^2 - y^2 - 2xy - 4x + 4y - 3 = 0$.
2. Hallar la ecuación de una cónica que pasa por los puntos $(3, 0)$ y $(0, 1)$, con centro en el punto $(2, 1)$ y con los ejes paralelos a los ejes de coordenadas.
3. Clasifíquense y obténganse las ecuaciones reducidas de las cuádricas que en una referencia rectangular del espacio euclídeo admiten por ecuaciones:
   a) $7x^2 - 8y^2 - 8z^2 + 8xy - 8xz - 2yz - 16x + 14y - 14z - 5 = 0$.
   b) $x^2 + 2xy + 2xz - 2x + 2y - 2 = 0$.
   c) $x^2 + 2xy + 2xz - 2x + 2y + 2z - 2 = 0$.
   d) $x^2 + y^2 + 4z^2 - 4yz + 4y - 8z + 4 = 0$.
   e) $x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 6yz - 2xz = 0$.
   f) $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xz + 4y - 3z = 0$.
4. Obténganse la ecuación reducida de la cuádrica que con respecto a una referencia cartesiana rectagular del espacio euclídeo admite por ecuación $7x^2 - 8y^2 - 8z^2 + 8xy - 8xz - 2yz - 16x + 14y - 14z - 5 = 0$.
5. Dada la cuádrica
$$\mathcal{C} \equiv 4x^2 + y^2 + 4z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 6x - 12y - 12z = 0.$$
   Se pide:
   a) Hallar una ecuación reducida de $\mathcal{C}$
   b) Dar explícitamente una referencia normal.
6. Dada la cuádrica
$$\mathcal{C} \equiv x^2 + y^2 - 2xy + 6x + 4y + 2z = 0.$$
   Se pide:
   a) Hallar una ecuación reducida de $\mathcal{C}$
   b) Dar explícitamente una referencia normal.