Curso Introductorio a las Matemáticas Universitarias

Tema 2: Trigonometría

Antonio Bonilla Ramírez
Jorge J. García Melián

2. TRIGONOMETRÍA

En el presente tema nos ocuparemos de la trigonometría. Definiremos las razones trigonométricas de un ángulo y veremos algunas de las relaciones básicas entre ellas. También consideraremos la resolución de triángulos y sus aplicaciones más significativas.

2.1. Medida de ángulos. Razones trigonométricas

Un ángulo viene determinado por dos semirrectas, llamadas *lados*, con un mismo origen llamado *vértice*. Hay diversas maneras de medir la amplitud de un ángulo: en el sistema sexagesimal se toma como unidad el ángulo recto. Un ángulo recto se divide en 90 partes llamadas *grados sexagesimales*. En el sistema circular la unidad de medida es el *radián*. Un ángulo mide un radián cuando la longitud del arco es igual al radio. Tenemos que

$$360^{\mathrm{o}} = 2\pi \text{ radianes.}$$

Por tanto, mediante una regla de tres simple obtenemos que, si la medida de un ángulo es de g grados sexagesimales, su equivalencia en radianes viene dada por:

$$r = \frac{\pi}{180}\, g.$$

En general, en el contexto de la trigonometría se suelen usar los grados sexagesimales, pero hay que tener en cuenta que en el Análisis se deben usar radianes. En este tema utilizaremos principalmente grados sexagesimales.

Definamos a continuación las llamadas *razones trigonométricas* para los ángulos del intervalo $(0, 90)$. Dado un ángulo α, definimos (véase la figura):

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

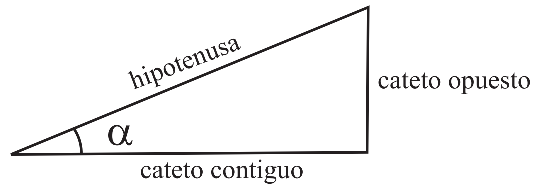

FIGURA 1. Triángulo rectángulo

Las razones trigonométricas se suelen representar en la llamada *circunferencia goniométrica*, que no es más que una circunferencia de radio 1, en la que los ángulos se representan inscritos, es decir, con el vértice en el centro.

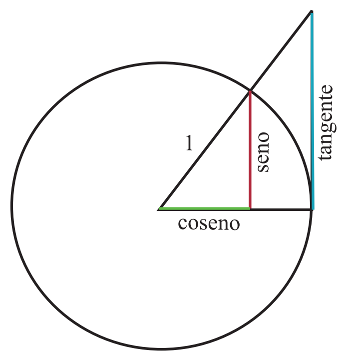

FIGURA 2. Circunferencia goniométrica

Una aplicación del teorema de Pitágoras en la figura anterior nos proporciona la llamada *identidad fundamental de la trigonometría*:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Extendemos la definición anterior de razones trigonométricas a los ángulos en el intervalo $(0, 360)$ con los convenios habituales: las longitudes horizontales hacia la derecha y verticales hacia arriba son positivas, mientras que las longitudes horizontales hacia la izquierda y verticales hacia abajo son negativas.

A continuación mencionamos las razones trigonométricas de los ángulos más usuales:

	0º	30º	45º	60º	90º
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	no definida

Además del seno, coseno y tangente de un ángulo, se definen otras razones relacionadas, que son la secante (sec), cosecante (cosec) y cotangente (cotg), de la siguiente forma:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\ .$$

Hay muchas fórmulas que son útiles a la hora de calcular senos y cosenos de unos ángulos, conocidos otros. Por ejemplo, las fórmulas de adición y sustracción

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$
$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

donde α, β son ángulos arbitrarios, o las fórmulas del ángulo doble:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

siendo α arbitrario. A partir de las fórmulas anteriores se pueden deducir otras, por ejemplo, obteniendo las razones trigonométricas de $90 - \alpha$ ó $180 - \alpha$ en términos de las de α, o también las propiedades de simetría del seno, coseno y tangente:

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

2.2. Ejercicios

1. Calcula la altura que alcanza una escalera de 6 metros de longitud cuando descansa sobre una pared y forma un ángulo de 60º con el suelo.
2. Resuelve la ecuación $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x$.
3. Resuelve la ecuación $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$.

2.3. Resolución de triángulos

Uno de los objetivos principales de la trigonometría es la resolución de triángulos. Es decir, dados ciertos ángulos y lados de un triángulo, calcular los restantes. Para facilitar esta tarea, adoptamos el siguiente convenio: un triángulo con vértices en los puntos A, B y C se denota por ABC. Además, llamamos a, b y c a los lados enfrentados a los vértices A, B y C, respectivamente. Los ángulos correspondientes a cada vértice se suelen denotar como los vértices.

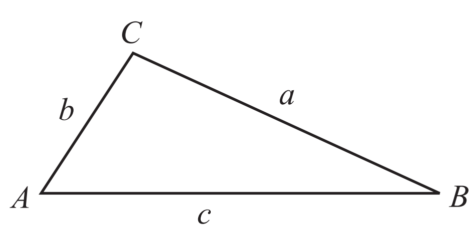

Figura 3. Notación para lados y ángulos en un triángulo

Para la resolución de triángulos es útil tener en cuenta tres propiedades básicas. En primer lugar, en todo triángulo se verifica $A+B+C=180^{\circ}$. En segundo lugar, tenemos el *teorema del seno*

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a}=\frac{\operatorname{sen} B}{b}=\frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

y el *teorema del coseno*:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2 &= a^2+c^2-2ac\cos B \\ c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos C. \end{aligned}$$

Cuando los triángulos a tratar son rectángulos, también podemos usar el *teorema de Pitágoras*, que es un caso particular del teorema del coseno.

Veamos algunos ejemplos de resolución de triángulos.

Ejemplo

(a) Resolver un triángulo del que se sabe que $A=36^{\circ}$, $B=44^{\circ}$ y $c=7$ cm.

En primer lugar, observamos que $C=180^{\circ}-A-B=180^{\circ}-36^{\circ}-44^{\circ}=100^{\circ}$. Si usamos el teorema del seno, obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a}=\frac{\operatorname{sen} C}{c} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\operatorname{sen} 36^{\circ}}{a}=\frac{\operatorname{sen} 100^{\circ}}{7},$$

de donde

$$a=\frac{7\operatorname{sen} 36^{\circ}}{\operatorname{sen} 100^{\circ}}=4'18 \text{ cm}.$$

De la misma forma, usando de nuevo el teorema del seno,

$$b=\frac{7\operatorname{sen} 44^{\circ}}{\operatorname{sen} 100^{\circ}}=4'94 \text{ cm}.$$

Por tanto, para el triángulo propuesto tenemos $A=36^{\circ}$, $B=44^{\circ}$, $C=100^{\circ}$, $a=4'18$ cm, $b=4'94$ cm, $c=7$ cm.

(b) Resolver el triángulo que tiene $b=10$ cm, $c=23'86$ cm y $A=55'62^{\circ}$. Usamos el teorema del coseno para calcular el lado a:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=100+569'2996-477'2\cos(55'62)=399'83,$$

de donde $a=19'99$. Para calcular C, podríamos usar el teorema del seno:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a}=\frac{\operatorname{sen} C}{c} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\operatorname{sen}(55'62^{\circ})}{19'99}=\frac{\operatorname{sen} C}{23'86}$$

y llegamos a $\operatorname{sen} C=0'985$. De aquí obtendríamos $C=80'09^{\circ}$.

Pero en lugar de calcular C mediante el teorema del seno se nos podría ocurrir usar el teorema del coseno. En tal caso:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \quad\Longrightarrow\quad 569'2996=399'83+100-399'8\cos C$$

y tenemos $\cos C=-0'17376$, con lo que $C=100^{\circ}$. ¿Por qué nos da un valor diferente? Lo que ocurre es que no es conveniente usar el teorema del seno para calcular ángulos, ya que en el intervalo $(0,180)$ hay dos ángulos con el mismo seno. Esto no ocurre con el coseno, y por eso para calcular ángulos debe usarse el teorema del coseno en lugar de el del seno. Por tanto el valor correcto en nuestro ejemplo es $C = 100^o$, con lo que $B = 24'38^o$.

Resumiendo, para nuestro triángulo tenemos $a = 19'99$ cm, $b = 10$ cm, $c = 23'86$ cm, $A = 55'62^o$, $B = 24'38^o$, $C = 100^o$.

2.4. Ejercicios

1. Resolver el triángulo ABC sabiendo que $c = 25$, $A = 35^o$ y $B = 68^o$.
2. Desde un aeropuerto C se observan dos aviones A y B bajo un ángulo de 38^o. Si distan 5 y 8 km del aeropuerto, respectivamente, calcula la distancia que los separa.

2.5. Algunas aplicaciones

El estudio de situaciones de la vida real conduce muchas veces a la resolución de triángulos. Uno de los ejemplos típicos es el de la doble medición para calcular la altura de un edificio, un árbol, etc., pero también hay otros muchos. Veamos algunas aplicaciones típicas.

Ejemplo

(a) Un bote de motor navega durante tres horas a razón de 20 millas por hora en dirección Norte 40^o Este. ¿Qué distancia hacia el Norte y qué distancia hacia el Este ha recorrido?

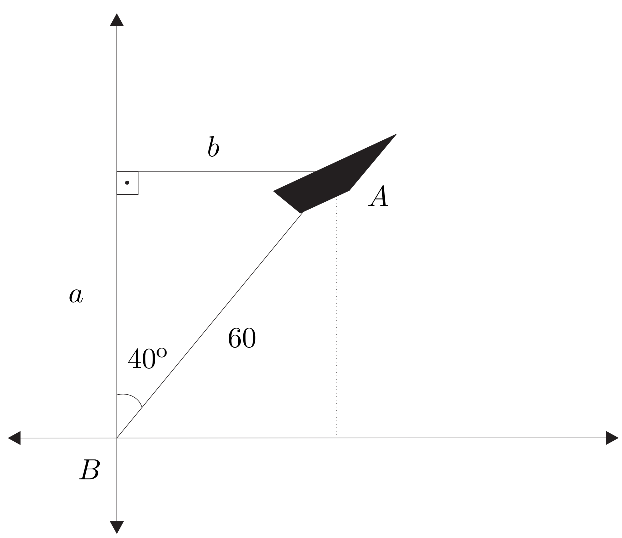

Figura 4. Posición del bote

Puesto que el bote ha navegado durante 3 horas a 20 millas/hora, ha recorrido 60 millas. Se trata de calcular los lados a y b en el triángulo de la figura. Tenemos $A = 180^o - 90^o - 40^o = 50^o$, y por el teorema del seno:

$$\frac{\operatorname{sen} 50^o}{a} = \frac{\operatorname{sen} 90^o}{60},$$

es decir, $a = 60 \operatorname{sen} 50^{\mathrm{o}} = 45'96$. Usando el teorema de Pitágoras tendremos $60^2 = a^2 + b^2$, de donde $b = \sqrt{60^2 - 45'96^2} = 38'57$. Por tanto el bote ha recorrido $45'96$ millas hacia el Norte y $38'57$ hacia el Este.

(b) Encontrar la altura de un árbol si se sabe que el ángulo de elevación disminuye desde 45^{o} hasta 30^{o} cuando nos alejamos 10 metros.

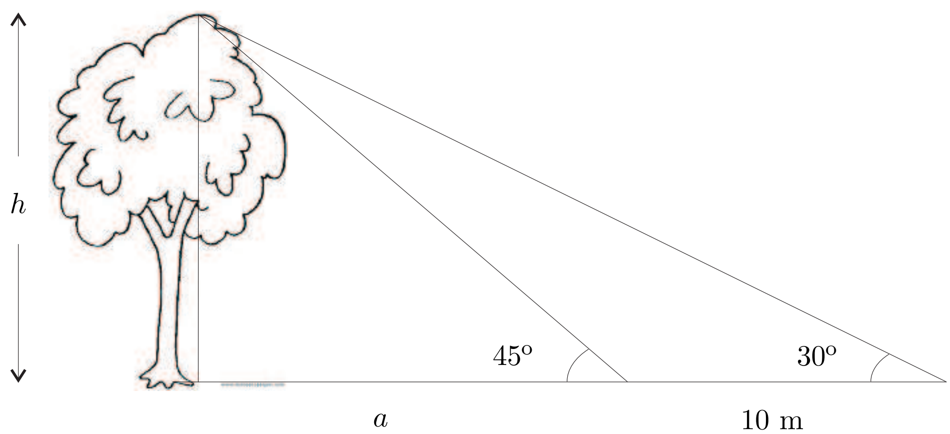

Figura 5. Problema de doble medición

Vemos en la figura que

$$\operatorname{tg} 45^{\mathrm{o}} = \frac{h}{a}$$
$$\operatorname{tg} 30^{\mathrm{o}} = \frac{h}{a+10}.$$

Despejando a en ambas ecuaciones e igualando llegamos a que

$$\frac{h}{\operatorname{tg} 45^{\mathrm{o}}} = \frac{h}{\operatorname{tg} 30^{\mathrm{o}}} - 10,$$

y despejando h:

$$h = \frac{10 \operatorname{tg} 30^{\mathrm{o}} \operatorname{tg} 45^{\mathrm{o}}}{\operatorname{tg} 45^{\mathrm{o}} - \operatorname{tg} 30^{\mathrm{o}}} = 13'66.$$

Por tanto la altura del árbol es de $13'66$ metros.

2.6. Ejercicios

1. Se quiere medir la altura h de una estatua situada sobre un pedestal. Desde un punto que se encuentra a 20 metros del pedestal, éste se observa bajo un ángulo de 12^{o} y el extremo superior de la estatua bajo un ángulo de 28^{o}. ¿Qué altura tiene la estatua?

2. Calcula la altura h de un edificio sabiendo que, desde cierto punto, la cúspide del edificio forma un ángulo de 30^{o} con la horizontal y cuando nos aproximamos 70 metros el ángulo es de 60^{o}.

3. Un barco que se encuentra frente a un golfo es observado desde los dos cabos que lo forman y que distan 10 km. Desde cada cabo se ve el barco con ángulos de 28º y 32º. Calcula la menor distancia d a que se encuentra el barco de la costa.

2.7. Ejercicios complementarios

1. Resolver el triángulo ABC en los siguientes supuestos:

   (a) $b = 7$, $c = 8$, $A = 30^{\circ}$.

   (b) $c = 628$, $b = 480$ y $C = 55^{\circ}10'$.

2. De un triángulo se conocen dos ángulos que miden 55º y 45º y el lado opuesto al de 45º que mide 100 m. Calcula los otros dos lados.
3. Halla el área de un hexágono regular de 10 cm de lado.
4. Calcular el área de un octógono regular de lado 7 cm.
5. La diferencia entre la longitud de una circunferencia y el perímetro de un hexágono regular inscrito es de 28 m. Halla el radio de la circunferencia.
6. Cuando el Sol está a 30º por encima del horizonte, ¿cuánto mide la sombra proyectada por un árbol de 15 m de altura?
7. Calcula la longitud de un puente que se quiere construir sobre un barranco, conociendo que los ángulos que forman los extremos del barranco A y B con un punto en el fondo del barranco O son $ABO = 32^{\circ}$ y $OAB = 48^{\circ}$ y que la distancia entre A y O es de 120 m.
8. Encuentra un ángulo agudo tal que $\operatorname{sen}(x + 30^{\circ}) = \cos x$.
9. Desde un barco se ve la torre de un faro bajo un ángulo de 30º. Cuando el barco ha recorrido 200 m en la dirección del faro dicho ángulo es de 45º. Calcula la altura de la torre sobre el nivel del mar y la distancia a la que se encuentra el barco del faro en el momento de la segunda medición.
10. Se quiere medir la altura de una montaña cercana a un pueblo. A la salida de éste han medido el ángulo de elevación que es de 30º. Han avanzado 100 m hacia la base y han vuelto a medir el ángulo de elevación siendo ahora 45º. Calcula la altura de la montaña.

2.8. Soluciones a los ejercicios

2.2 Medida de ángulos. Razones trigonométricas

(1) $x = 6 \operatorname{sen} 60^{\circ}$.

(2) $x = k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{N}$.

(3) $x = 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{N}$.

2.4 **Resolución de triángulos**

(1) $a = 14'72$, $b = 23'79$, $c = 25$, $A = 35^{o}$, $B = 68^{o}$, $C = 77^{o}$.

(2) $a = \sqrt{8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cos 38^{o}} = 5'095$ km.

2.6 **Algunas aplicaciones**

(1) $h = 20(\operatorname{tg} 28^{o} - \operatorname{tg} 12^{o})$.

(2) $h = \dfrac{70 \operatorname{tg} 60^{o} \operatorname{tg} 30^{o}}{\operatorname{tg} 60^{o} - \operatorname{tg} 30^{o}}$.

(3) $d = \dfrac{10 \operatorname{sen} 28^{o}}{\operatorname{sen} 120^{o}}$.