Universidad de La Laguna

Curso Introductorio a las Matemáticas Universitarias

Tema 3: Funciones elementales

Lourdes Rodríguez Mesa

3. FUNCIONES ELEMENTALES

El objetivo de este tema es repasar el concepto de función, así como el estudio de sus propiedades básicas y sus gráficas.

3.1. Concepto de función y propiedades básicas

Decimos que hay una *correspondencia* entre dos conjuntos cuando existen unas determinadas reglas que permiten asociar elementos del primer conjunto (*conjunto inicial*) con elementos del segundo conjunto (*conjunto final*).

Una *aplicación* es una correspondencia que asigna a cada elemento del conjunto inicial un único elemento del conjunto final.

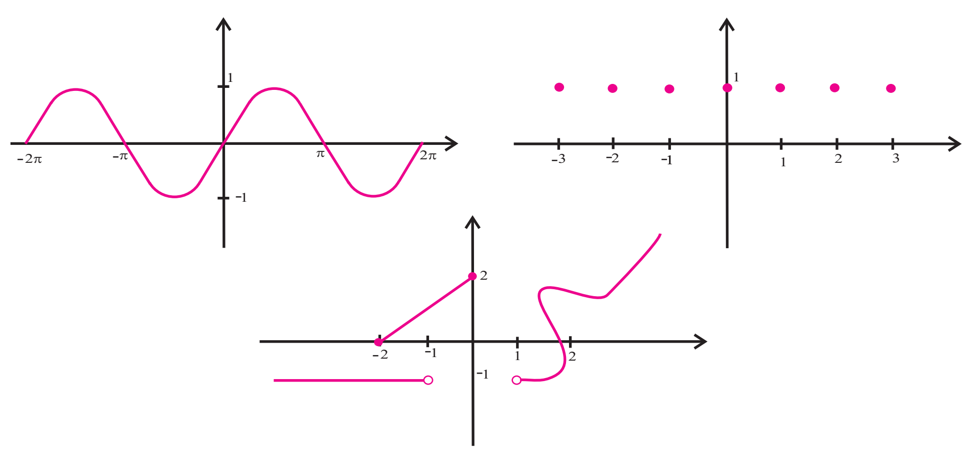
Cuando los conjuntos inicial y final son subconjuntos de $\mathbb{R}$, hablamos de *funciones reales de variable real*. Si f es una función de $A \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, llamamos *dominio* de la función al conjunto de los elementos de A cuya imagen pertenece a $\mathbb{R}$ y *recorrido* o *imagen* de la función al conjunto de todos los valores que toma la función.

3.2. Ejercicios

1. (a) Si a cada persona del mundo se le asigna su madre biológica, ¿es aplicación?

   (b) Si a cada mujer del mundo se le asignan sus hijos, ¿es aplicación? ¿Por qué?

2. Indicar cuáles de las siguientes gráficas representan funciones y en tal caso, hallar el dominio y recorrido.



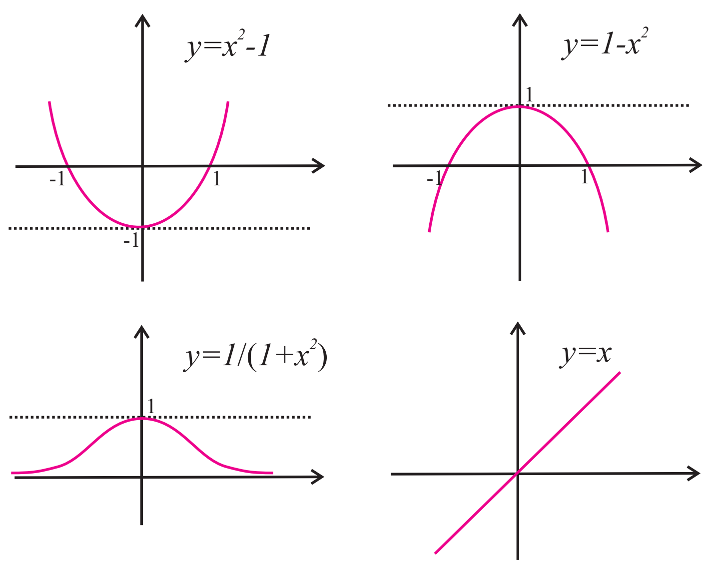
3.3. Propiedades de las funciones

Acotación. Una función f está *acotada superiormente* si sus imágenes no superan cierto valor, esto es, cuando existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$, para cualquier x del dominio de f. Se dice que M es una cota superior.

De la misma forma, la función f está *acotada inferiormente* si sus imágenes superan siempre un cierto número, es decir, si existe $m \in \mathbb{R}$ de tal forma que $f(x) \geq m$, para todo x en el dominio de f.

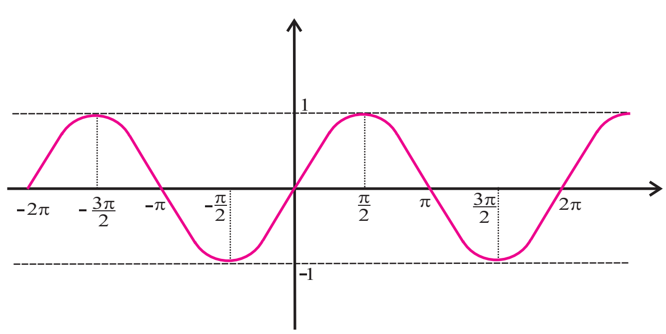
Decimos que una función f está *acotada* si lo está superior e inferiormente. Esto equivale a que existe $M \geq 0$ de tal forma que $|f(x)| \leq M$, para todo x del dominio de la función.

<u>Ejemplos</u>. La función $f(x) = x^2 - 1$ sólo está acotada inferiormente ($f(x) \geq -1$) mientras que la función $g(x) = 1 - x^2$ lo está sólo superiormente ($g(x) \leq 1$). La función $h(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ está acotada ($|h(x)| \leq 1$)y la función $l(x) = x$ no está acotada ni superior ni inferiormente.



Periodicidad. Una función es *periódica de periodo* T ($T \neq 0$) cuando para todo x del dominio, se tiene que $x + T$ está en el dominio y $f(x+T) = f(x)$. Se llama *periodo fundamental* de f al periodo más pequeño de f.

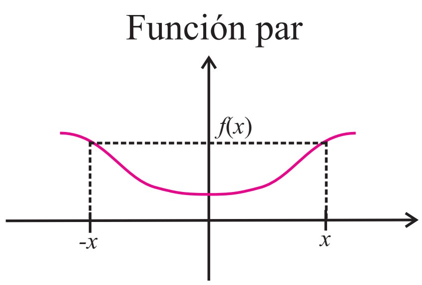
<u>Ejemplo</u> La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es una función periódica de periodo fundamental 2π.

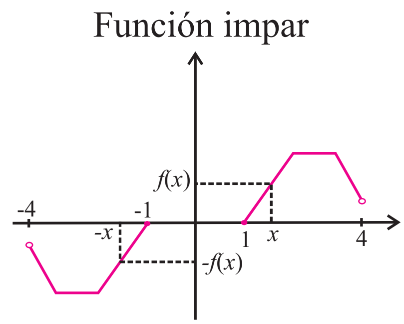


Paridad. Se dice que una función f es *par* cuando, para cada x de su dominio, $-x$ es también del dominio y se satisface $f(-x) = f(x)$. En este caso, la gráfica de la función es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Decimos que una función f es *impar* cuando, para cada x de su dominio, $-x$ pertenece también al dominio y se verifica $f(-x) = -f(x)$. En este caso, la gráfica de la función es simétrica respecto del origen de coordenadas.

Ejemplos



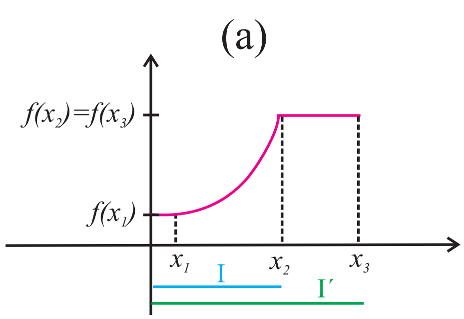


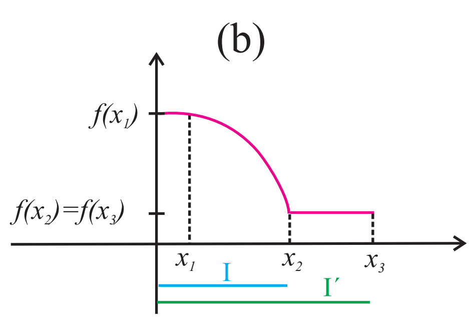
Existen funciones que no son pares ni impares, como $f(x) = x^2 + x$.

Crecimiento y decrecimiento. Sea f una función real de variable real e I un intervalo contenido en su dominio.

- f es *creciente en I* si para cada par de números x_1, x_2 de I tales que $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- f es *decreciente en I* si para cada par de números x_1, x_2 de I tales que $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- f es *estrictamente creciente en I* si para cada par de números x_1, x_2 de I tales que $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_1) < f(x_2)$.
- f es *estrictamente decreciente en I* si para cada par de números x_1, x_2 de I tales que $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_1) > f(x_2)$.
- Decimos que f es *monótona en I* cuando es creciente, decreciente o constante en el intervalo.

Ejemplos. La función en (a) es creciente en el intervalo I' y es estrictamente creciente en I. En la figura (b) podemos observar que la función es decreciente en I' y estrictamente decreciente en el intervalo I.





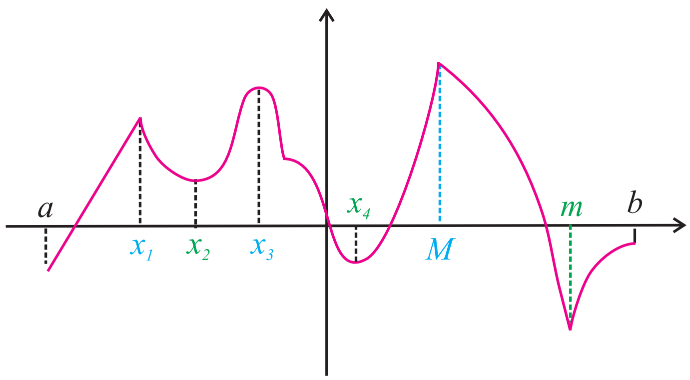
Máximos y mínimos. Se dice que un punto $(x_0, f(x_0))$ de la gráfica de la función f es un *máximo absoluto* de f cuando $f(x_0)$ es el mayor valor que toma f en su dominio, esto es, $f(x_0) \geq f(x)$, cuando x pertenece al dominio.

Análogamente, decimos que un punto $(x_0, f(x_0))$ de la gráfica de la función f es un *mínimo absoluto* de f cuando $f(x_0)$ es el menor valor que toma f en su dominio, es decir, $f(x_0) \leq f(x)$, para cada x del dominio.

Un punto $(x_0, f(x_0))$ de la gráfica de la función f es un *máximo relativo* si $f(x_0)$ es el mayor valor que toma f en un entorno del punto x_0.

Un punto $(x_0, f(x_0))$ de la gráfica de la función f es un *mínimo relativo* si $f(x_0)$ es el menor valor que toma f en un entorno de x_0.

Ejemplo.



En la gráfica de la función f se observa que el dominio de f es $[a, b]$. El punto $(M, f(M))$ es el máximo absoluto, mientras que los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_3, f(x_3))$ son máximos relativos. Asimismo, el punto $(m, f(m))$ es el mínimo absoluto, mientras que los puntos $(x_2, f(x_2))$ y $(x_4, f(x_4))$ son mínimos relativos.

3.4. Ejercicios

1. Estudia la acotación de las siguientes funciones:

   (a) $y = 2x - 1$ (b) $y = \dfrac{1}{x}$ (c) $y = 2x - x^2$ (d) $y = \dfrac{1}{2 + x^4}$

2. Consideramos la función $f(x) = x^2$ definida en $[0, 1)$. Se pide extenderla periódicamente a todo $\mathbb{R}$ y trazar su gráfica.

3. Estudiar la paridad de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = -x - 2$, $x \in (-\infty, -2)$.

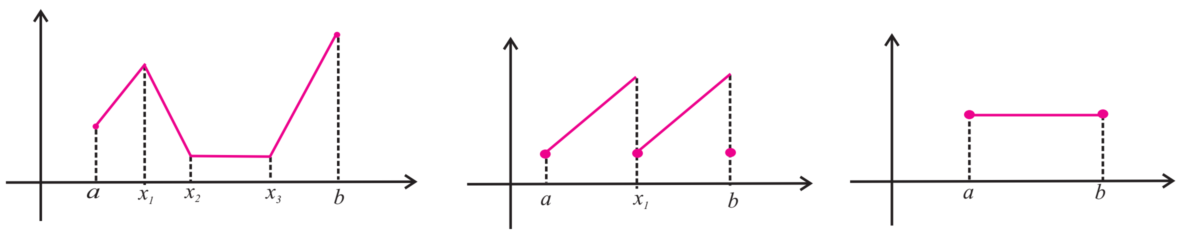
   (b) $f(x) = x^3$, $x \in [-2, 2]$.

   (c) $f(x) = -x^2$, $x \in (2, \infty)$.

   (d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^4 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

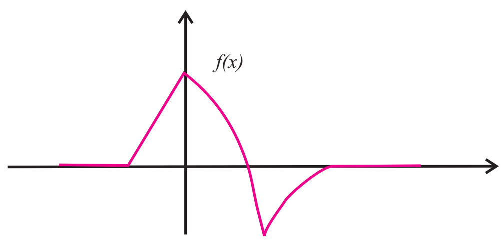
4. Sea $f(x) = x^2/2$. Probar que la función es creciente en el intervalo $I = [1, 5]$. ¿Qué sucede en el intervalo $J = [-4, -1]$?

5. ¿Cuáles son los máximos y mínimos absolutos y relativos de las funciones representadas en las siguientes gráficas?

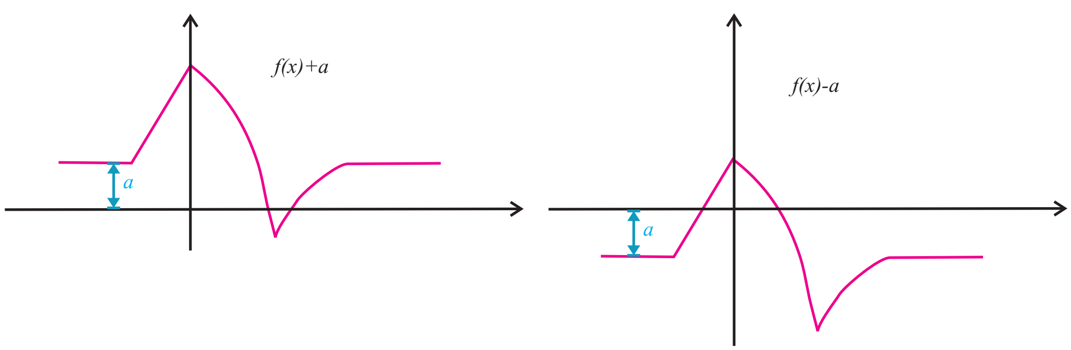


3.5. Transformaciones elementales

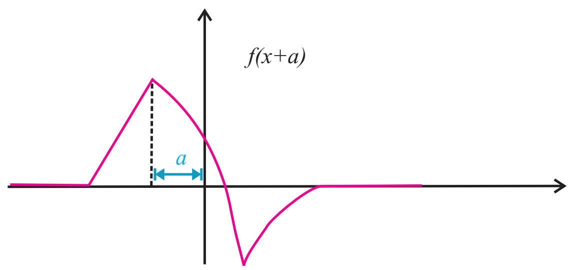
Sea f una función real de variable real. Nuestro objetivo en este apartado es analizar cómo se modifica la gráfica de la función f cuando realizamos ciertos cambios en la misma.

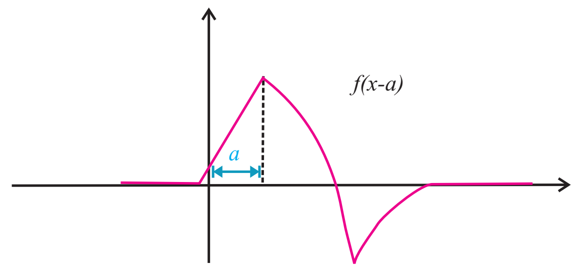


Traslaciones verticales. Sea $a > 0$. Consideramos las funciones $y = f(x) + a$ e $y = f(x) - a$. La gráfica de cada una de estas funciones se obtiene trasladando verticalmente en a unidades la gráfica de la función f, hacia arriba en el primer caso y hacia abajo en el segundo.

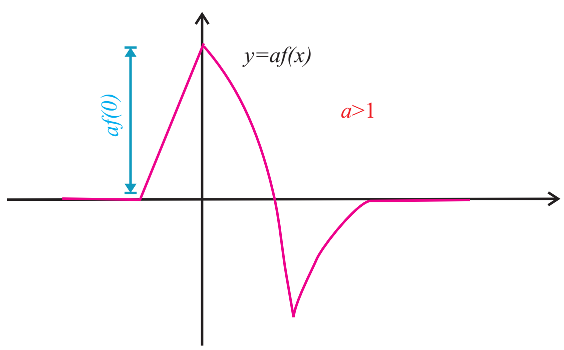


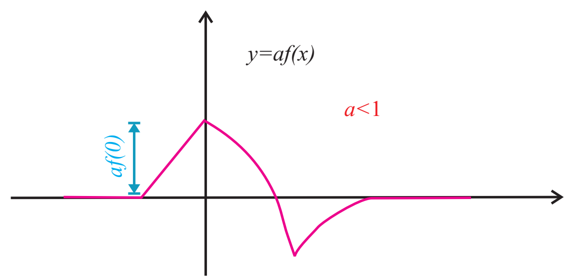
Traslaciones horizontales. Sea $a > 0$. Construimos las funciones $y = f(x + a)$ e $y = f(x - a)$. La gráfica de estas funciones se obtiene por traslación horizontal en a unidades de la gráfica de la función f, hacia la izquierda en el primer caso y hacia la derecha en el otro.



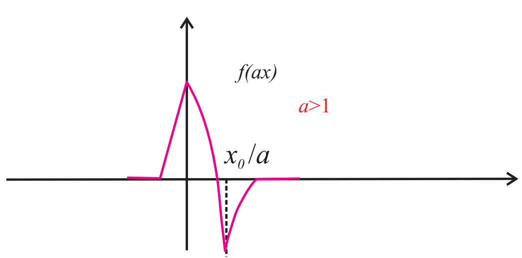


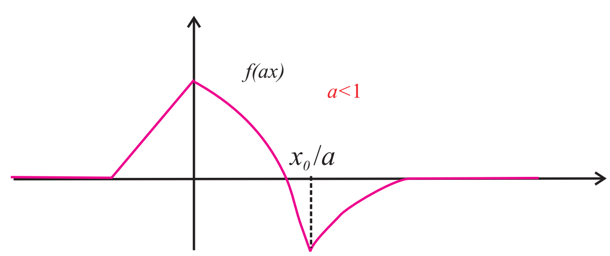
<u>Dilataciones y contracciones verticales</u>. Consideramos ahora la función $y = af(x)$, con $a > 0$. La gráfica de esta función es una dilatación vertical (si $a > 1$) o una contracción vertical (si $a \in (0, 1)$) de la gráfica de la función f.





<u>Dilataciones y contracciones horizontales</u>. Tratamos ahora la función $y = f(ax)$, con $a > 0$. En este caso, la dilatación o contracción de la gráfica de la función f se produce horizontalmente, de forma que si $a \in (0, 1)$ se dilata y si $a > 1$ se contrae.



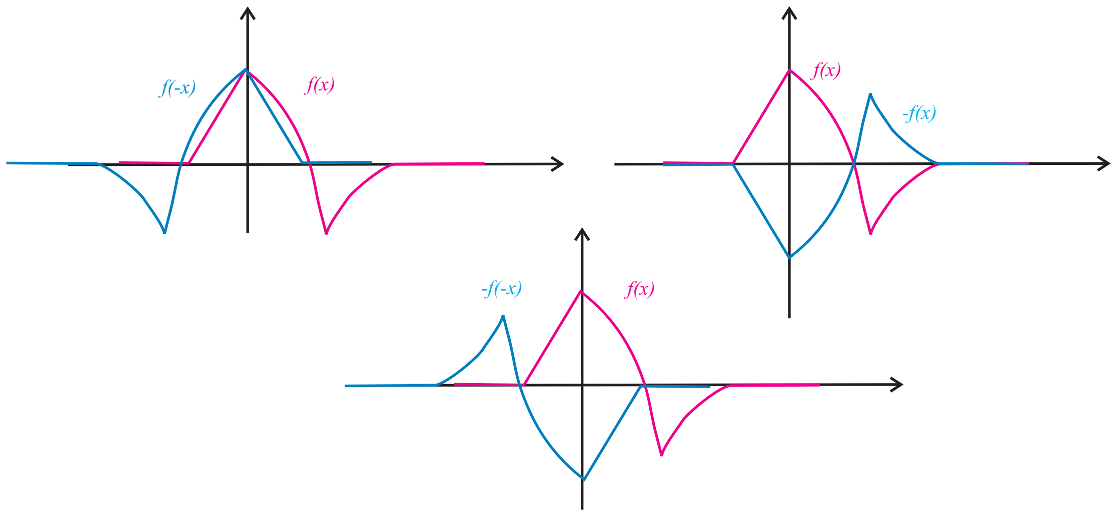


<u>Simetrías</u>.

- Simetría respecto a OY: La gráficas de las funciones $y = f(x)$ e $y = f(-x)$ son simétricas respecto al eje de ordenadas.

- Simetría respecto a OX: Las funciones $y = f(x)$ e $y = -f(x)$ son simétricas respecto al eje de abcisas.

- Simetría origen: Las gráficas de las funciones $y = f(x)$ e $y = -f(-x)$ son simétricas respecto al origen de coordenadas.



3.6. Funciones elementales

Analizamos ahora las características de algunas funciones básicas.

Funciones polinómicas

Son aquellas que están definidas mediante un polinomio, esto es, son de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

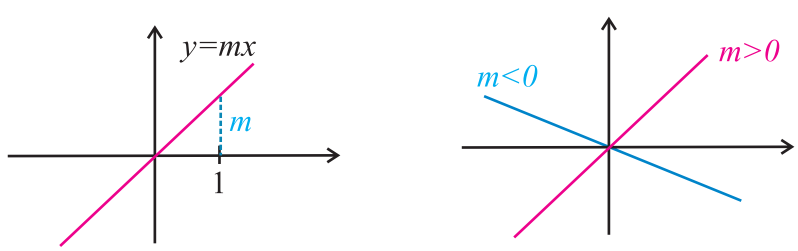
donde los coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ son números reales.

Las operaciones usuales, suma, resta y producto de funciones polinómicas son nuevamente funciones polinómicas. Sin embargo, el cociente de funciones polinómicas no es, en general, una función polinómica.

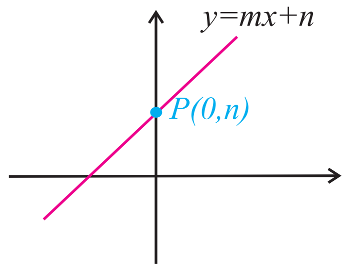
Analicemos las características más importantes en tres tipos particulares de funciones polinómicas.

(A) Función lineal y función afín. Las funciones cuya representación gráfica es una recta que pasa por el origen, se denominan *funciones lineales*.

Su fórmula siempre es de la forma $y = mx$. El valor m es la *pendiente* de la recta y nos indica la mayor o menor inclinación de la recta. Si la pendiente es positiva, la recta es creciente y si es negativa, entonces la función lineal es decreciente.



Las funciones cuya representación gráfica es una recta que no pasa por el origen se denominan *funciones afines*. Su fórmula es de la forma $y = mx + n$, siendo m la *pendiente* de la recta y n la *ordenada en el origen*.



Las rectas de la forma $y = a$ son rectas horizontales (de pendiente 0), mientras que las rectas de la forma $x = a$, son verticales (y por tanto, no se trata de funciones).

Ejercicios

1. Encuentra la fórmula de la función asociada a los siguientes fenómenos:

   (a) Cantidad de gasolina en el depósito de un coche de 60 litros de capacidad, inicialmente lleno, que consume 10 litros cada 100 km, en función de la distancia recorrida en un trayecto de 400km.

   (b) Longitud de una circunferencia cuando su radio crece desde 1 cm hasta 5 cm.

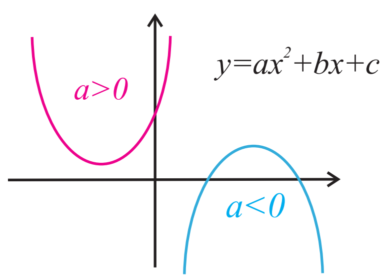
2. Representa gráficamente las funciones obtenidas en el ejercicio anterior.

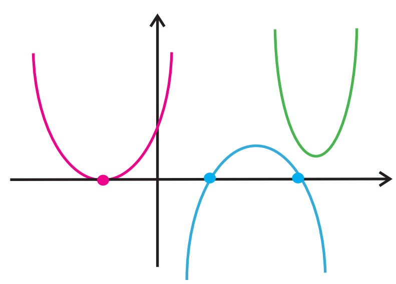
(B) Función cuadrática. Una función cuadrática en una función polinómica que viene dada por un polinomio de grado 2. Dada una función cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$, su gráfica es una parábola con las siguientes características:

- Si $a > 0$ las ramas van hacia arriba y si $a < 0$ hacia abajo.

- Las abcisas de los puntos de corte de la parábola con el eje OX son las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Por tanto, el número máximo de puntos de corte con el eje OX es de 2, pudiendo darse el caso de que exista sólo 1 o incluso, ninguno. Con el eje OY la parábola siempre se corta en el punto $P = (0, c)$.

- En el vértice la parábola presenta un máximo o mínimo, según sea a positivo o negativo. La abcisa del vértice viene dada por $x = -\dfrac{b}{2a}$.





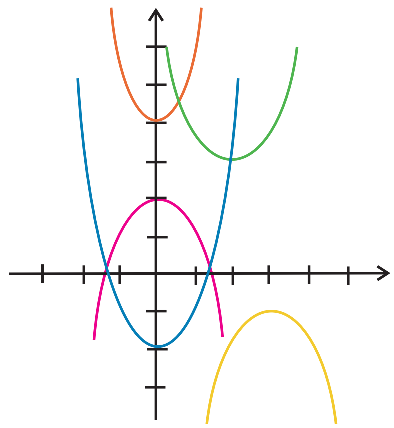
Ejercicios

1. Representa las parábolas siguientes sobre un mismo eje de coordenadas.

   (a) $y = 3x^2$ (b) $y = -3x^2$ (c) $y = \dfrac{x^2}{4}$ (d) $y = -\dfrac{x^2}{4}$

2. Relaciona las gráficas de la figura con las funciones cuadráticas que se proporcionan. Escribe la ecuación de la gráfica que sobra.

   (a) $y = 2x^2 - 2$ (b) $y = -2x^2 + 2$ (c) $y = x^2 - 4x + 7$ (d) $y = -2x^2 + 12x - 19$



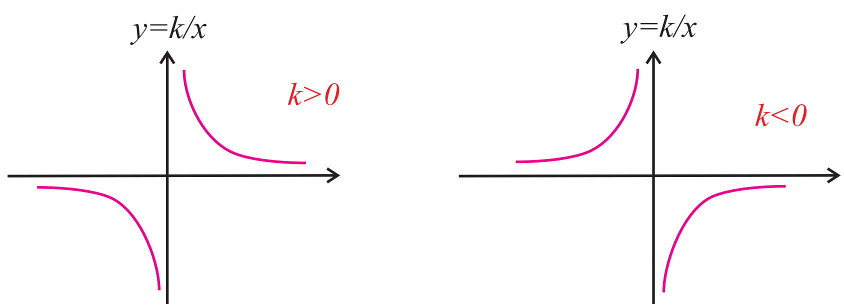
Funciones racionales

Son funciones de la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. El dominio de estas funciones es el conjunto de números reales para los que $Q(x) \neq 0$.

En particular la *función de proporcionalidad inversa* $f(x) = \dfrac{k}{x}$, (donde k es una constante no nula) es una función racional. Esta función está definida en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, y su gráfica es simétrica respecto del origen y recibe el nombre de *hipérbola equilátera*.



Ejercicios

1. Hallar el dominio de las siguientes funciones racionales.

   (a) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2 - x}$. (b) $f(x) = \dfrac{x}{16 - x^2}$.

2. Representa gráficamente las siguientes funciones racionales.

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$. (b) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$.

Función exponencial.

Es una función de la forma $f(x) = a^x$, donde a es un número positivo distinto de 1. La condición sobre la base a hace posible que el exponente pueda tomar cualquier valor. Por tanto, el dominio de la función es $\mathbb{R}$. Por otro lado, los valores que toma la función son siempre positivos, siendo su recorrido $(0, +\infty)$. La función exponencial es una función continua y acotada inferiormente.

Si $f(x) = a^x$ es una función exponencial, entonces verifica las siguientes propiedades:
- $f(0) = 1$, esto es, $a^0 = 1$.
- $f(1) = a^1 = a$, esto es, $a^1 = a$.
- $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$, es decir, $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

Una función exponencial especialmente importante es $y = e^x$, cuya base es el número e que se define como

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

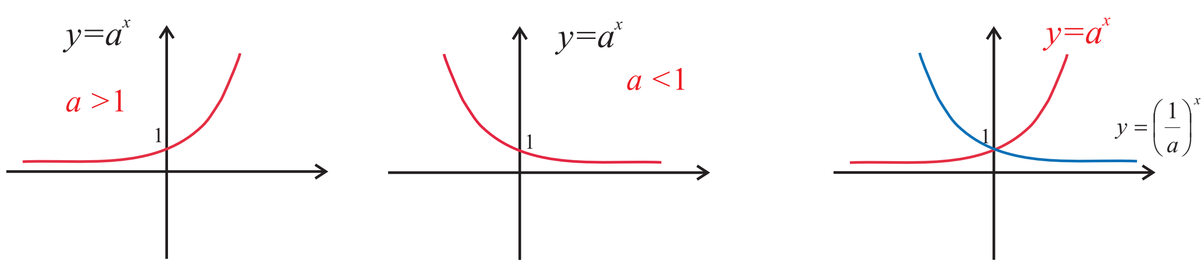
y cuyo valor es $e = 2{,}718281...$

La gráfica de una función exponencial viene condicionada fundamentalmente por el valor de la base a, de tal forma que:

- Si $a \in (0, 1)$ la función es estrictamente decreciente, tiende a infinito cuando x tiende a $-\infty$ y converge a 0 cuando x toma valores grandes. Además se tiene que cuanto más pequeño es el valor de la base a, más rápido converge a 0.

- Si $a > 1$ entonces la función es estrictamente creciente, converge a 0 cuando x tiende a $-\infty$ y crece a infinito cuando $x \to +\infty$. En este caso, cuanto mayor sea la base a, más rápido es el crecimiento de la función.

Se observa también que las gráficas de las funciones $y = a^x$ e $y = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ son simétricas respecto al eje OY.



Ejercicios

1. Representa gráficamente las siguientes funciones exponenciales.

   (a) $y = 675^x$ (b) $y = \left(\dfrac{4}{5}\right)^x$ (c) $y = 0{,}01^x$ (d) $y = 2{,}01^x$

2. Indica cuáles de las anteriores funciones son crecientes o decrecientes.

Función logarítmica.

La función $y = \log_a x$, siendo a un número positivo distinto de 1, es la función inversa de la función exponencial $y = a^x$, esto es,

$$y = \log_a x, \text{ si y sólo si } x = a^y.$$

Así $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$, $\log_{1/2} 4 = -2$, $\log_7 7 = 1$ y $\log_5 1 = 0$.

Como función inversa de la exponencial, se concluye que el dominio de la función logarítmica es $(0, +\infty)$ y su recorrido $\mathbb{R}$. Queda claro entonces que no tienen significado expresiones como $\log_2(-3)$, $\log_2 0$, $\log_{-2} 3$, $\log_1 8$.

Las bases más usadas son $a = 10$ y $a = e$. Si no se indica la base, se entiende que es $a = 10$ y se trata del *logaritmo decimal*; por ejemplo $\log 100 = 2$. Para el caso $a = e$, se llama *logaritmo neperiano* o *logaritmo natural* y se escribe de cualquiera de las siguientes maneras:

$$\log_e x = \ln x = \mathrm{L}x.$$

La siguiente igualdad nos permite pasar de logaritmos en una base a los de otra:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}, \quad x > 0 \quad (a, b > 0, a, b \neq 1).$$

Propiedades básicas

Sea $a > 0$, tal que $a \neq 1$. Se tiene:

1. $\lg_a(xy) = \lg_a x + \lg_a y, \quad x, y > 0.$
2. $\lg_a \dfrac{x}{y} = \lg_a x - \lg_a y, \quad x, y > 0.$
3. $\lg_a x^y = y \lg_a x, \quad x > 0,\ y \in \mathbb{R}.$
4. $\lg_a 1 = 0.$
5. $\lg_a a = 1.$

Ejercicios

1. Evaluar: (a) $\log_3 9$, (b) $\log_{10} 10$, (c) $\log_{16} 8$, (d) $\dfrac{\log_5 25 - \log_5 125 + \frac{1}{2}\log_5 625}{2\log_5 5}$.
2. Resolver las ecuaciones: (a) $\log x = 3$ (b) $\log_2 x = 3$, (c) $\log_5 x = -2$, (d) $\log(x-1) + \log(x+1) = 2\log(x+2)$.
3. Escribir $\log \dfrac{8 \times \sqrt[4]{5}}{81}$ en términos de $\log 2$, $\log 3$ y $\log 5$.
4. Simplificar $\log_2 64 - \log_2 128 + \log_2 32$.
5. Si
$$\log x = \frac{1}{2}\log a + 3\log b - \frac{1}{3}(\log c + 2\log d)\ ,$$
expresar el valor de x en función de a, b, c y d.

6. Demostrar la siguiente relación

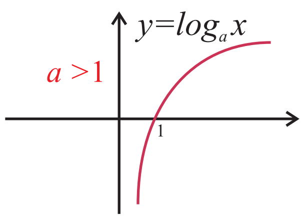
$$\log(a^2 - b^2) = \log(ab) + \log\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right).$$

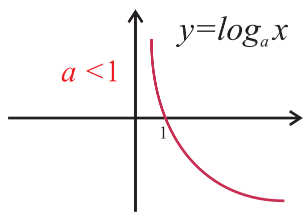
Teniendo presente que las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$, podemos obtener la gráfica de la función logarítmica a partir de la correspondiente exponencial. De esta forma, también en este caso la base a condiciona la forma de la gráfica.

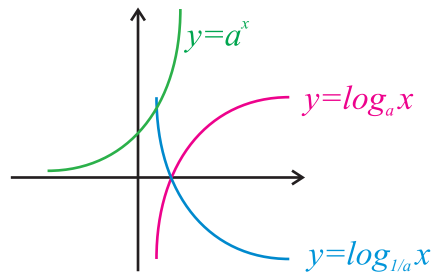
- Si $0 < a < 1$ la función f es estrictamente decreciente, tiende a $+\infty$ cuando x converge a 0 (por la derecha) y tiende a $-\infty$ cuando x toma valores muy grandes.

- Si $a > 1$ entonces es estrictamente creciente, y si $x \to 0^+$, la función tiende a $-\infty$ y cuando $x \to +\infty$, la función tiende a $+\infty$.

Se tiene, además, que las gráficas de las funciones $y = \log_a x$ e $y = \log_{1/a} x$ son simétricas respecto al eje OX.







Ejercicios

1. Representa la función $y = \log_{1/10} x$ y a partir de dicha representación responde a las siguientes preguntas:
   (a) ¿Cuál es el dominio y el recorrido de esta función?
   (b) ¿Pasa por el punto (1,0)? ¿Y por el (10,1)?
   (c) ¿Es acotada inferiormente? ¿Y superiormente?
   (d) ¿Qué ocurre cuando $x \to 0^+$? ¿Y cuando $x \to +\infty$?

2. Representa gráficamente las funciones $y = \log_3 x$ e $y = \log_9 x$. Analiza las gráficas y contesta:
   (a) ¿En el intervalo $(1, +\infty)$ se verifica $\log_3 x > \log_9 x$?
   (b) ¿Es cierta la expresión $\log_3 x = 2 \log_9 x$?

Funciones trigonométricas.

Estas funciones se definen a partir de las razones trigonométricas.

<u>Función seno</u>. La función seno $f(x) = \operatorname{sen} x$ hace corresponder a cada valor x de un ángulo, medido en radianes, el valor del seno de dicho ángulo.

Las propiedades más importantes de esta función trigonométrica se recogen a continuación.

- Su dominio es $\mathbb{R}$ y su recorrido $[-1, 1]$.

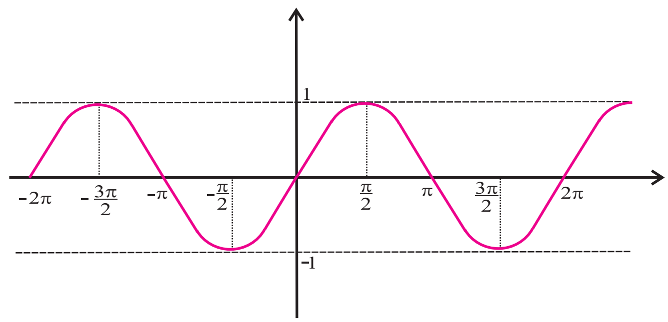
- Es una función acotada en $\mathbb{R}$.

- Es una función impar y periódica de periodo 2π.

- Posee infinitos máximos absolutos en los puntos de abcisa $x = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donde la función toma el valor 1.

- Asimismo presenta infinitos mínimos absolutos en los puntos de abcisa $x = \pi/2 + (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donde la función toma el valor -1.

- Corta al eje OX en los puntos de abcisa $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



<u>Función coseno</u>. La función coseno, $f(x) = \cos x$, hace corresponder a cada valor x de un ángulo, medido en radianes, el valor del coseno de dicho ángulo.

Las propiedades de la función coseno son análogas a las de la función seno como indicamos a continuación.

- Su dominio es $\mathbb{R}$ y su recorrido $[-1, 1]$.

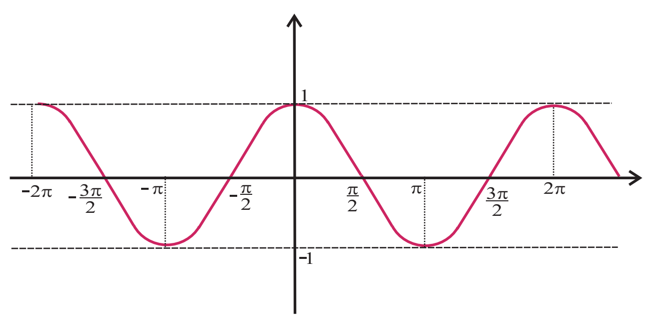
- Es una función acotada en $\mathbb{R}$.

- Es una función par y periódica de periodo 2π.

- Posee infinitos máximos absolutos en los puntos de abcisa $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donde la función toma el valor 1.

- Asimismo presenta infinitos mínimos absolutos en los puntos de abcisa $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donde la función toma el valor -1.

- Corta al eje OX en los puntos de abcisa $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

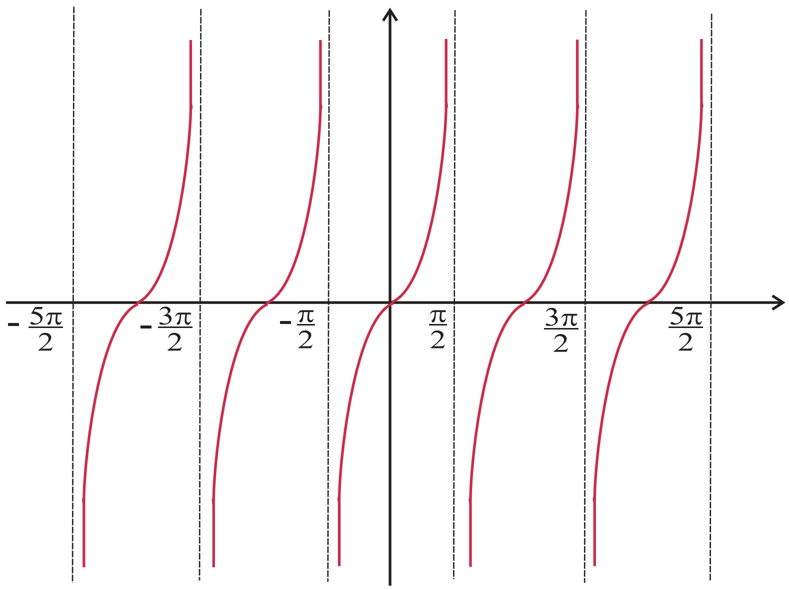


<u>Función tangente</u>. La función tangente, $f(x) = \operatorname{tg} x$, hace corresponder a cada valor x de un ángulo, medido en radianes, el valor de su tangente.

Las principales propiedades de la función tangente son las siguientes:

- Está definida para todos los valores $x \in \mathbb{R}$ que no anulan la función $y = \cos x$, esto es, su dominio es el conjunto $\mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- No está acotada, siendo $\mathbb{R}$ su recorrido.
- Es una función impar y periódica de periodo π.
- Es una función estrictamente creciente en los intervalos de la forma $\left((2k-1)\frac{\pi}{2},(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ y no tiene máximos ni mínimos.
- Corta al eje OX en los puntos de abcisa $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Las rectas de la forma $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ son asíntotas verticales para la función.



Ejercicio

Representa e indica las características más notables de las siguientes funciones.

(a) $y = 3 + \text{sen}(2x)$. (b) $y = 3\cos(4x)$. (c) $y = \text{tg}\,\frac{x}{4}$.

3.7. Ejercicios complementarios

1. Hallar el dominio de las siguientes funciones.

   (a) $f(x) = x^2 - x$; (b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x-9}$; (c) $f(x) = \dfrac{\ln(x-3)}{x+1}$.

2. Analizar si las siguientes funciones son pares o impares.

   (a) $f(x) = |x|$; (b) $f(x) = x^2 + 1$; (c) $f(x) = \sqrt{x}$;

   (d) $f(x) = E(x)$, $E(x)$ denota la función parte entera.

3. Sea f una función definida en $\mathbb{R}$, par y periódica de periodo 2. Además, se conoce que $f(x) = 1 - x$, para $x \in [0, 1)$. Representa gráficamente la función f.

4. Estudiar el crecimiento o decrecimiento de las siguientes funciones, así como los posibles máximos y mínimos.

   (a) $f(x) = |x| - 1$; (b) $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$;

(c) $f(x) = x^2 - 4$; (d) $f(x) = x + |x|$.

5. Sea f la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}\ , & -1 \leq x \leq 2\ , \\ 2(x-3)^2\ , & 2 < x \leq \dfrac{7}{2}\ . \end{cases}$$

   Estudiar si esta función posee máximos y mínimos relativos y absolutos.

6. Justifica analítica y gráficamente la veracidad o la falsedad de las siguientes afirmaciones sobre la función $f(x) = 2x + 1$.

   (a) $f(x+3) = f(x) + 3$; (b) $f(x+a) = f(x) + a$; (c) $f(x) + a = f(x) + f(a)$;

   (d) $f(x+a) = f(x) + f(a)$; (e) $f(ax) = af(x)$.

7. Hallar gráfica y analíticamente los puntos de intersección de las parábolas y rectas siguientes:

   (a) $y = x^2 - 2$, $y = 3x - 4$; (b) $y = -x^2 + 4x - 4$, $y = 3x - 4$; (c) $y = x^2 + 6x$, $y = -9$.

8. ¿En qué región del plano situamos la gráfica de las siguientes funciones?

   (a) $y = \ln(2x+3)$; (b) $y = \log_2 |x|$; (c) $y = \log(x^2 - x - 2)$; (d) $y = \log(1-x) + \log(x+1)$.

9. Representa gráficamente las funciones logarítmicas siguientes:

   $f(x) = \log_2 x$; $g(x) = \log_4 x$; $h(x) = \log_8 x$.

   (a) Ordena de mayor a menor estas funciones en el intervalo $(1, \infty)$.

   (b) ¿Existe alguna relación entre las funciones f y g? ¿Y entre f y h?

10. Representa en una misma gráfica las funciones exponenciales $y = \left(\dfrac{3}{2}\right)^x$ e $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$. ¿Qué característica observas?

11. Representa gráficamente las funciones: (a) $y = 2^x + 2^{-x}$; (b) $y = 2^x - 2^{-x}$. ¿Qué tipo de simetría presenta cada una?

12. Representa las funciones $y = \log_2 x$ e $y = \log_{1/2} x$ conjuntamente. ¿Observas alguna simetría?

13. Representa en una misma gráfica las funciones $y = 3^x$ e $y = \log_3 x$. ¿Qué tipo de simetría existe? ¿En cuántos puntos se cortan?

14. Representa y estudia la simetría y periodicidad de las siguientes funciones:

    (a) $y = 3 + \operatorname{sen} x$ (b) $y = \operatorname{tg}(x + \pi/4)$ (c) $y = 2\operatorname{sen}(2\pi - x)$

    (d) $y = \operatorname{tg}(x/4)$ (e) $y = \frac{1}{2}\cos(2x)$ (f) $y = \cos(2x - \pi/2)$.