Curso Introductorio a las Matemáticas Universitarias

Tema 4: Números complejos

Juan Carlos Fariña Gil

Licencia Creative Commons 2013

4. NÚMEROS COMPLEJOS

En el presente tema consideraremos los números complejos. Nos ocuparemos principalmente de las diferentes formas de representarlos, así como las operaciones básicas entre ellos.

4.1. Introducción

Si intentamos resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$ nos encontramos que no tiene solución ya que ésta debería ser $x = \sqrt{-1}$ y, como sabemos, la raíz cuadrada de un número negativo no existe en $\mathbb{R}$, conjunto de los números reales. Denotemos $\sqrt{-1}$ por i y definamos un *número complejo* como una expresión de la forma $x + iy$, donde x e y son números reales. Dado un número complejo $z = x + iy$, a x e y se les denomina *parte real* y *parte imaginaria* de z respectivamente y se denotan por

$$x = Re\ z \quad e \quad y = Im\ z.$$

En caso de que $z = x+i0$ escribiremos $z = x$ y diremos que z es *real*. Por otro lado, si $z = 0+iy$, escribiremos $z = iy$ y le llamaremos *imaginario puro*. En particular $0 = 0 + i0$ e $i = 0 + i1$. El conjunto de todos los números complejos se denota por $\mathbb{C}$ y éste contiene al conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales que podemos identificar con el conjunto de los números complejos cuya parte imaginaria es 0, es decir $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \ Im\ z = 0\}$. El conjunto $\mathbb{C}$ se puede representar gráficamente en el plano real ($\mathbb{R}^2$) sin más que asociar el número complejo $z = x + iy$ con el par o punto (x, y) de $\mathbb{R}^2$. Este punto se conoce como *afijo* de z. La forma de expresar z como $a + ib$ se conoce como *expresión binómica* de un número complejo.

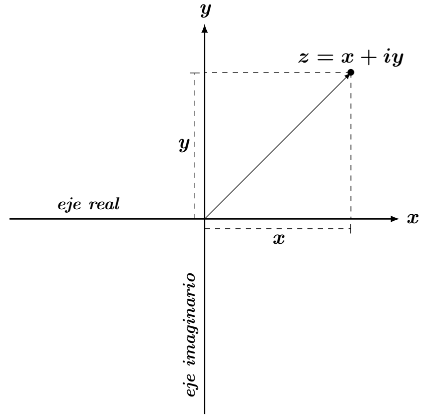

Figura 1. Plano complejo

4.2. Operaciones algebraicas

Para sumar o restar dos números complejos hemos de sumar o restar sus respectivas partes reales e imaginarias:

$$(x+iy)+(a+ib)=(x+a)+i(y+b)$$
$$(x+iy)-(a+ib)=(x-a)+i(y-b).$$

La multiplicación viene definida por la regla:

$$(x+iy)(a+ib)=(xa-yb)+i(xb+ya).$$

Esta regla parece complicada y difícil de recordar, pero si tenemos en cuenta que

$$i^2=(0+i1)(0+i1)=(0-1)+i(0+0)=-1+i0=-1, \tag{1}$$

y multiplicamos $(x+iy)(a+ib)$ como dos polinomios en i, obtenemos dicha regla:

$$(x+iy)(a+ib)=xa+x(ib)+(iy)a+(iy)(ib)=xa+ixb+iya+i^2yb=(xa-yb)+i(xb+ya).$$

Notemos que (1) nos dice que i es una solución de $x^2+1=0$.

La suma y la multiplicación de números complejos verifican las mismas propiedades que las de los números reales:

1. Asociativa: $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$; $z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$.
2. Conmutativa: $z_1+z_2=z_2+z_1$; $z_1z_2=z_2z_1$.
3. Elementos neutros: $z+0=0+z=z$; $z,1=1.z=z$.
4. Distributiva: $z_1(z_2+z_3)=(z_1z_2)+(z_1z_3)$.
5. $z\cdot 0=0\cdot z=0$.

4.3. Conjugación y módulo

Dado un número complejo $z=x+iy$, llamamos *conjugado* de z al complejo que resulta al cambiar de signo la parte imaginaria y lo denotaremos por $\overline{z}$. Así $\overline{z}=x-iy$. Se puede observar que:

$$\overline{z}=z \text{ si, y solamente si, } z\in\mathbb{R}$$

y

$$\overline{z}=-z \text{ si, y solamente si, } z=iy.$$

Además, con la definición que hemos dado del producto de dos números complejos se tiene

$$z\overline{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2,$$

lo que implica que $z\overline{z}$ es un número real positivo y $\sqrt{z\overline{z}}$ estaría siempre bien definida. A este valor se le llama *módulo* de z y se denota por $|z|$, esto es,

$$|z|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

El hecho de que $z\overline{z}$ sea un número real nos permite definir el inverso de un complejo $z = a+ib \neq 0$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2},$$

y consiguientemente la división de números complejos vendría dada por

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\frac{1}{z_2}.$$

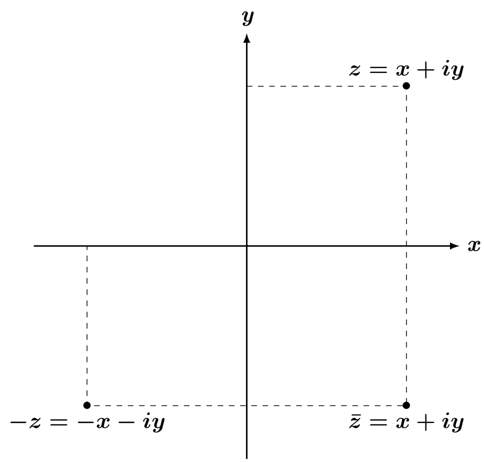

Figura 2. Módulo, conjugado y opuesto

Propiedades del módulo y conjugación respecto de las operaciones:

1. $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$.
2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$.
3. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0)$.
4. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
5. $|z| = |\overline{z}|$.
6. $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0)$.

4.4. Forma trigonométrica

Recordemos que un número complejo $z = x + iy$ puede ser representado como un par (x, y) y como tal constituye un punto del plano, lo que permite asociarle un vector con punto inicial en $(0, 0)$ y final en (x, y). Podemos entonces determinar el complejo z dando el módulo de dicho vector, que coincide con el módulo de z definido anteriormente, y el ángulo que forma con el eje real, que se denomina argumento de z. En otras palabras, lo podemos expresar en coordenadas polares:

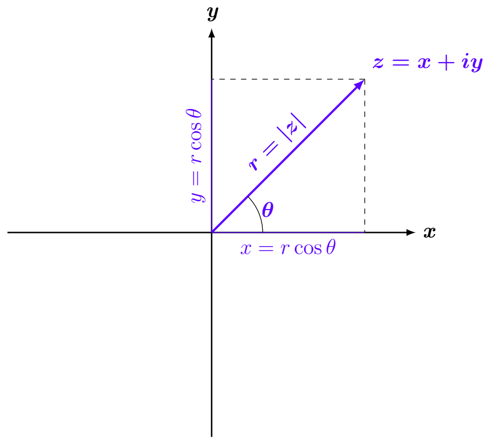

FIGURA 3. Módulo, conjugado y opuesto

Observemos que si nos dicen que un número complejo z tiene por módulo r y argumento θ, entonces (como indica la figura) su parte real será $x = r\cos\theta$ y su parte imaginaria será $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Podemos expresar z como

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\,\mathrm{sen}\,\theta = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

expresión que se conoce como *forma trigonométrica* de z. Una de las grandes ventajas de esta manera de representar a los números complejos es que facilita la operación de potenciación

$$z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)] \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{2}$$

Además la multiplicación y división se pueden expresar de forma más sencilla como sigue:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \;\; ; \;\; \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \quad (z_2 \neq 0).$$

Por otro lado, si nos dan un complejo z en forma binómica $z = x + iy$, tenemos que su módulo es $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y su argumento será un ángulo θ tal que $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{y}{x}$. Podemos entonces expresar z de una forma abreviada por $z = r_\theta$, expresión que se conoce como *forma polar*:

$$z = r_\theta = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta). \tag{3}$$

Es importante observar que el argumento de un complejo no es único ya que si el ángulo θ es un argumento de z y le sumamos un ángulo de amplitud 2π, es decir le damos una vuelta completa, volvemos a caer en el mismo sitio, por lo cual $\theta + 2\pi$ sería también un posible valor del argumento de z. Lo mismo sucede si damos k vueltas y por tanto $\theta + 2k\pi$ será también otro valor del argumento de z.

La expresión en forma polar nos permite introducir la radicación de los números complejos de forma más o menos sencilla. La $\sqrt[n]{z}$ será cualquier complejo ω tal que $\omega^n = z$. Así, expresando ambos números en forma polar $\omega = \rho_\alpha$ y $z = r_\theta$, y recordando que según (2) y (3) $(\rho_\alpha)^n = (\rho^n)_{n\alpha}$, obtenemos que

$$\rho^n_{n\alpha} = r_\theta \text{ si, y solamente si, } \rho = \sqrt[n]{r} \; y \; \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, 2, ..., n-1).$$

Luego un complejo $z = r_\theta$ tiene n raíces n-ésimas $\{z_k\}_{k=0}^{n-1}$ que podemos expresar como:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) \quad (k = 0, 1, 2, ..., n-1).$$

A modo de ejemplo, observemos en el siguiente gráfico cómo se representan en el plano las cinco raíces quintas de $z = \cos(\frac{\pi}{3}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{3})$. Todas tienen el mismo módulo y se distribuyen de manera que forman un pentágono regular (en el caso de raíces n-ésimas formarían un polígono regular de n lados).

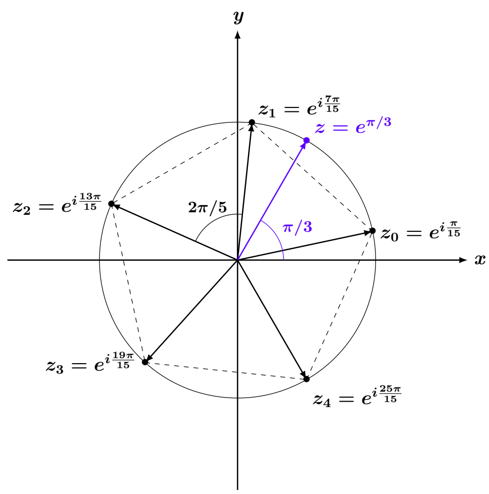

FIGURA 4. Raíces quintas de $z = \cos(\pi/3) + i\,\mathrm{sen}(\pi/3)$.

4.5. Ejercicios complementarios

1. Calcula las raíces de las siguientes ecuaciones:

   a) $x^2 + x + 1 = 0$; *b*) $x^2 + 2x + 5 = 0$.

2. Efectúa las siguientes operaciones entre números complejos:

   a) $(3 + 5i) + (4 - 3i)$; *b*) $(5 + 3i) - (6 - 4i)$;

   c) $(6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i)$; *d*) $(2 - i) - (5 + 4i) + \frac{1}{2}(6 - 4i)$.

3. Multiplica:

   a) $(3 + i)(4 - 2i)$; *b*) $(2 + i)(5 - 6i)$;

   c) $(-i + 1)(3 - 2i)(1 + 3i)$; ; *d*) $5(2 - 4i)(1 + 3i)i$.

4. Efectúa las siguientes divisiones de números complejos:
$$a)\ \frac{2+4i}{4-2i};\quad b)\ \frac{1-4i}{3+i};\quad c)\ \frac{4-4i}{-3+5i}.$$

5. Calcula las potencias:
$$a)\ (2-3i)^2;\quad b)\ (3-i)^3;\quad c)\ i^{123};\quad d)\ (2-4i)^4.$$

6. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica:
$$a)\ 6-3(5+\frac{2}{5}i);\quad b)\ \frac{3i(-4i+2)}{-2+3i}\ ;\quad c)\ \frac{(-3i)^2(1-2i)}{2+2i}\ ;\quad d)\ \frac{(2-3i)(1+6i)}{1+5i}.$$

7. Calcula i^{17}, i^9, i^{10}, i^{25}, i^{31}.

8. ¿Cuánto debe valer x para que el número $(2+xi)^2$ sea imaginario puro?

9. Calcula $(1+i)^4$, $(1-i)^4$, $(-1+i)^4$ y $(-1-i)^4$.

10. Resuelve las siguientes ecuaciones en el campo complejo:
$$a)\ (5+i)z = 3-7i;\qquad b)\ \frac{z}{3+4i} = 3-5i\ ;$$
$$c)\ \frac{z}{3+2i}+\frac{2z-i}{4-2i} = 3;\quad d)\ \frac{z}{-z}+\frac{2z-3i}{2-i} = 6-3i.$$

11. Representa gráficamente los afijos de todos los números complejos z tales que al sumarlos con su respectivo conjugado, se obtenga 1.

12. Representa gráficamente los números complejos z tales $z-\overline{z} = i$. ¿Qué debe verificar z?

13. Representa gráficamente el número complejo $4-3i$. Aplícale un giro de 90 grados alrededor del origen. ¿Cuál es el nuevo número? Multiplica ahora $4-3i$ por i.

14. Escribe en forma trigonométrica y polar los números:
$$a)\ 1+3i;\quad b)\ -1+i;\quad c)\ 5-12i.$$

15. Escribe en la forma binómica y trigonométrica los números:
$$a)\ 5_{\frac{\pi}{6}};\quad b)\ 2_{135^\circ};\quad c)\ 3_{240^\circ}.$$

16. Calcula tres argumentos del número $1+i$.

17. Expresa en forma binómica y en forma polar el conjugado y el opuesto de $5_{\frac{\pi}{4}}$.

18. Calcula sin desarrollar los binomios y expresar el resultado en forma polar:
$$a)\ (1+i)^{10};\quad b)\ (-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i)^8;\quad c)\ (1-i)^6.$$

19. Utiliza la fórmula de Moivre, $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = [\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)] \quad (n \in \mathbb{N})$, para deducir las fórmulas de las razones trigonométricas del ángulo doble.

20. Calcula las raíces sextas de la unidad.

21. Resuelve la ecuación $x^3 + 27 = 0$. Representa gráficamente todas sus soluciones.

22. Calcula $\sqrt[3]{-i}$; $\sqrt[4]{1+i}$; $\sqrt[3]{\dfrac{-1+i}{1+\sqrt{3}i}}$.

23. Halla las coordenadas de los vértices de un cuadrado (de centro el origen) sabiendo que uno de estos es el afijo del número complejo $1_{\frac{\pi}{2}}$.

24. Halla las coordenadas de los vértices de un hexágono regular, de centro el origen, sabiendo que uno de estos es el afijo del número complejo 3_{π}.

25. Representa gráficamente las igualdades siguientes. ¿Qué figura se determina en cada caso?

$$a)\ |z| = 2; \quad b)\ |z - (1+i)| = 5.$$

26. Escribe todos los números complejos cuyos afijos estén en la circunferencia de centro $(1,1)$ y radio 3.

4.6. Soluciones a los ejercicios

1. a) $x_1 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, b) $-1 \pm 2i$
2. a) $7+2i$, b) $-1+7i$, c) $18-18i$, d) $-7i$
3. a) $14-2i$, b) $16-7i$, c) $16-2i$, d) $-10+70i$
4. a) i, b) $-\frac{1}{10} - \frac{13}{10}i$, c) $\frac{-16}{17} - \frac{4}{17}i$
5. a)$-5-12i$, b) $18-26i$, c) $-i$, d) $-112+384i$
6. a) $-9-\frac{6}{5}i$, b) $\frac{-6}{13} - \frac{-48}{13}i$, c) $-\frac{9}{4} + \frac{9}{4}i$, d) $\frac{5}{2} - \frac{7}{2}i$
7. $i, i, -1, i, -i$
8. $x = \pm 2$
9. -4
10. a) $\frac{4}{13} - \frac{19}{13}i$, b)$29-3i$, c)$\frac{239}{52} - \frac{1}{52}i$, d) $\frac{11}{2} - 5i$
11. Recta $x = \frac{1}{2}$
12. Recta $y = \frac{1}{2}$
13. $3+4i$
14. a) $\sqrt{10}_{1'25}$, $\sqrt{10}(\cos(1'25) + i\,\mathrm{sen}(1'25))$; b) $\sqrt{2}_{\frac{3\pi}{4}}$, $\sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{3\pi}{4}))$; c) $13_{-1'17}$, $13(\cos(-1'17) + i\,\mathrm{sen}(-1'17))$

15. a) $5\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i$, $5(\cos(\frac{\pi}{6})+i\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6}))$; b) $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $\sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4})+i\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{4}))$; c) $-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $3(\cos(\frac{4\pi}{3})+i\operatorname{sen}(\frac{4\pi}{3}))$.

16. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$, $-\frac{7\pi}{4}$

17. Opuesto: forma binómica $-\frac{5\sqrt{2}}{2}-\frac{5\sqrt{2}}{2}i$, forma polar $5_{\frac{5\pi}{4}}$
    Conjugado: forma binómica $\frac{5\sqrt{2}}{2}-\frac{5\sqrt{2}}{2}i$, forma polar $5_{-\frac{\pi}{4}}$

18. a)$32_{\frac{\pi}{2}}$, b) $1_{\frac{4\pi}{3}}$, c) $8_{\frac{\pi}{2}}$

19. $\operatorname{sen}(2\theta)=2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)$, $\cos(2\theta)=\cos^2(\theta)-\operatorname{sen}^2(\theta)$

20. 1; $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; -1; $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

21. $x=-3$; $x=\frac{3}{2}+3\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $x=\frac{3}{2}-3\frac{\sqrt{3}}{2}i$

22. a) i, $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$, $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$; b) $\sqrt[4]{2}_{\frac{\pi}{16}}$, $\sqrt[4]{2}_{\frac{9\pi}{16}}$, $\sqrt[4]{2}_{\frac{17\pi}{16}}$, $\sqrt[4]{2}_{\frac{25\pi}{16}}$

23. i, -1, $-i$, 1

24. -3, $-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$, 3, $\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

25. a) Circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 2, b) circunferencia centrada en $(1,1)$ y radio 5

26. $(1+3\cos(\theta))+i(1+3\operatorname{sen}(\theta))$, $0\le\theta<2\pi$