Universidad de La Laguna

Curso Introductorio a las Matemáticas Universitarias

Tema 7: Modelización básica

Víctor M. Almeida Lozano

7. MODELIZACIÓN BÁSICA

La modelización matemática es uno de los ámbitos menos trabajado en los currículos de matemática de enseñanza primaria y secundaria. En este tema pretendemos introducir a los alumnos en este campo a través de ejercicios con enunciado, donde se debe extraer la información aportada, comprender lo que se nos pide que resolvamos y plantear un modelo de resolución accesible. Todos los ejercicios que presentamos pueden resolverse con las herramientas trabajadas en los temas anteriores.

Presentamos indicaciones de cómo se pueden resolver los ejercicios, sin menospreciar la posiblidad de la existencia de otras maneras de resolverlos. Lo bueno, en cualquier caso, es que el alumno puede comprobar de forma sencilla si su solución es válida.

7.1. Trigonometría

1. Calcula el ángulo que forman las tangentes a una circunferencia de radio 5 cm trazadas desde un punto situado a 7 cm del centro de la misma.
   Ayuda: la clave está en el hecho de que la tangente a una circunfrencia en un punto de la misma es perpendicular al radio que une el centro con dicho punto. Por lo tanto si dibujamos las dos tangentes, los correspondientes radios y la línea que une el centro de la circunferencia con el punto exterior obtendremos dos triángulos rectágulos iguales que comparten la hipotenusa. Ésta última divide al ángulo que hemos de calcular en dos partes iguales, por lo que llamando a cada una de ellas α la solución a nuestro ejercicio será el ángulo 2α. (**Solución**: $2\ arcsen(\frac{5}{7})$).

2. Julia y María caminan juntas, llegan a un cruce de caminos rectos que forman entre sí un ángulo de 50 grados y cada una toma un camino. A partir de este momento Julia camina a 4 km/h y María a 6 km/h. ¿A qué distancia estará una de la otra al cabo de una hora y media?
   Ayuda: al cabo de hora y media Julia habrá caminado 6 km y María 9 km. Si representamos el triángulo de lados 6 y 9 con el ángulo entre estos de 50 grados, resolver este ejercicio consiste en calcular el tercer lado de dicho triángulo, para lo que podrá usarse el teorema de los cosenos. (**Solución**: $\sqrt{117 - 108\ cos50}$).

3. Kepler pensaba que las órbitas de los planetas estaban relacionadas con los radios de 6 esferas concéntricas inscritas y circunscritas alternativamente en los poliedros regulares. Si el radio de la esfera inscrita en un cubo mide 1 metro, ¿Cuánto mide la arista del cubo? ¿Y el radio de la esfera circunscrita a él?

Ayuda: dibujar el cuadrado de lado l y la circunferencia inscrita en el mismo (este dibujo representará una sección plana de nuestra situación). Trazemos el radio que va al punto medio de uno de los lados del cuadrado y la línea que une el centro con uno de los vértices de dicho lado, con lo que obtendremos un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 y la mitad del lado (este lado mide lo mismo que la arista del cubo). Dado que el ángulo que se forma en el centro es de 45 grados, la tangente de éste nos dará el valor del lado. La medida de la hipotenusa de este triángulo coincide con el valor del radio de la esfera circunscrita. (**Solución**: $lado = 2$, $radio = \sqrt{2}$).

4. En la pirámide de Keops, de base cuadrada, el lado de la base mide 230 m y el ángulo que forma una cara con la base es de 52 grados. Calcula:

   a) La altura de la pirámide.

   b) La altura de una cara.

   c) La longitud de una arista.

   d) El ángulo que forma la arista con la base del triángulo.

   e) El ángulo superior de cada cara.

   f) El volumen de la pirámide.

   Ayuda: la solución a este ejercicio se obtiene dibujando el triángulo apropiado en cada apartado. Para el último apartado sólo hay que recordar que el volumen de una pirámide es un tercio del área de la base por la altura. (**Solución**: a) $115\ tag52$ b) $115\sqrt{1+(tag52)^2}$ c) $115\sqrt{2+(tag52)^2}$ d) $arctag(\frac{tag52}{\sqrt{2}})$ e) $2\ arctag(\frac{1}{\sqrt{1+(tag52)^2}})$ f) $\frac{1}{3}(230)^2 115\ tag52$).

7.2. Progresiones aritméticas y geométricas

1. Al preguntar a un empleado cuánto tiempo llevaba trabajando en una empresa, contestó: “No lo sé; sólo puedo decir que llevo cobrados 174.000 euros, que este año me han dado 14400 euros y que cada año he tenido un aumento de salario, respecto al anterior de 600 euros.” ¿Cuántos años lleva trabajando en esa empresa?
   Ayuda: un simple, aunque largo, ejercicio de sucesivas restas nos lleva a la solución. Comenzamos restando 14.400 a 174.000, lo que nos da 159.600 que representa la cantidad acumulada hasta el año pasado. A continuación le restamos 13.800 (14.400-600, cantidad cobrada el año anterior) a 159.600, con lo que obtenemos la cantidad acumulada hasta hace dos años que será de 145.800. Repitiendo este proceso hasta llegar a la situación en que a la cantidad acumulada ya no se le pueda restar el sueldo de un año, tendremos los datos necesarios para responder a las preguntas planteadas. (**Solución**: 20 años trabajando y el sueldo del primer año fue de 3.000 euros).

2. A las nueve de la noche terminó una de las sesiones del Congreso, y en el tiempo que duró la sesión el reloj dio 48 campanadas. ¿A qué hora empezó la sesión si el reloj da las horas y las medias horas (éstas con una campanada)?
   Ayuda: hay que tener en cuenta que en el tránsito de una hora a otra el reloj da una campanada más de las que marca la hora de partida, por ejemplo a las tres en punto el reloj dará tres campanada y en su camino hacia las cuatro pasará por las tres y media donde dará una campanada más. Teniendo en cuenta esto y sabiendo la hora de finalización

y el número total de campanadas, nuevamente el procedimiento de restas sucesivas nos llevará a la solución. (**Solución**: a las 3 de la tarde.).

3. Una persona, no pudiendo pagar de una vez una deuda de 12.950 euros, propone a su acreedor pagarle 600 euros al final del primer mes y cada mes 50 euros más que el mes anterior. ¿En cuántos meses se cancelará la deuda y cuál será el importe del último pago?
Ayuda: en este caso, análogo a los anteriores, sólo hemos de modificar un poco nuestra técnica, en el sentido de que pasaremos de un procedimiento de restas sucesivas a uno de sumas sucesivas, ya que conocemos la cantidad total, igual que anteriormente, junto con el primer pago en lugar del último. (**Solución**: 14 meses.).

4. Deducir la expresión general del término n-ésimo de una progresión aritmética de diferencia d y primer término a_1. Deducir una fórmula para sumar los n primeros términos de la misma.
Solución:

Los ejercicios anteriores pueden resolverse de manera sistemática usando la teoría de las progresiones aritméticas, las cuales constituyen secuencias numéricas donde cada término se obtiene sumando al anterior una cantidad fija que denominamos diferencia y representamos por la letra d, es decir $a_n = a_{n-1} + d$ (la diferencia puede tomar valores negativos). Esta última igualdad nos permite expresar todos los términos de una progresión aritmética en función del primero y la diferencia.

$$a_2 = a_1+d; \quad a_3 = a_2+d = a_1+2d; \quad a_4 = a_3+d = a_1+3d; \; ...... \; a_n = a_{n-1}+d = a_1+(n-1)d$$

y estas relaciones nos facilitan el cálculo de una expresión para la suma de los n primeros términos de la progresión. El procedimiento para llegar a la misma consiste en plantear la suma dos veces colocando los términos una vez en orden ascendente $S_n = a_1 + a_2 + \; ... \; + a_n$ y otra en orden descendente $S_n = a_n + a_{n-1} + \; ... \; + a_1$, es decir.

$$\begin{array}{lccccccccc} S_n = & a_1 & + & a_1+d & + & ...... & + & a_1+(n-2)d & + & a_1+(n-1)d \\ S_n = & a_1+(n-1)d & + & a_1+(n-2)d & + & ...... & + & a_1+d & + & a_1 \end{array}$$

si sumamos las dos igualdades obtendremos dos veces la suma deseada en el lado izquierdo de la igualdad, y en el derecho la repetición n veces del mismo sumando, $2a_1 + (n-1)d$, o de forma equivalente $a_1 + a_n$. Por tanto, obtenemos $2S_n = (a_1 + a_n)n$, es decir

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n$$

Nota: se recomienda resolver de nuevo los 3 ejercicios anteriores usando estas fórmulas a modo de comprobación y entrenamiento.

5. En una bodega hay dos enormes depósitos de vino A y B. Todos los días se sacan ciertas cantidades de vino de cada uno de los depósitos. Del depósito A se extrajeron 5 litros el primer día, 10 el segundo, 20 el tercero y así sucesivamente. Del depósito B se extrajeron 2 litros el primer día, 4 el segundo, 8 el tercero y así sucesivamente. El último día se extrajeron del depósito A 96 litros más que del B. ¿Cuántos litros de vino se extrajeron en total en cada depósito y durante cuántos días?

Ayuda: si denotamos por a_n y b_n las cantidades de vino extraidas del depósito A y el B respectivament el día n, partiendo de los valores $a_1 = 5$ y $b_1 = 2$ y duplincándolos obtenemos la extracción de cada depósito el segundo día. Simplemente hemos de repetir este proceso hasta llegar a los valores de a_n y b_n que verifican la igualdad $a_n = b_n + 96$, el valor de n nos dirá el número de días y unas simples sumas nos darán los totales de litros extraídos en cada depósito. (**Solución**: 6 días de extracción y los totales son 315 litros en el depósito A y 126 en el B).

6. Un pueblo que hace unos años tenía una población de 10.000 habitantes, hoy sólo tiene 6.561. Cada año la disminución ha sido del 10 por ciento de sus habitantes. ¿Cuántos años hace que la población era de 10.000?
   Ayuda: si denotamos por p_0 =10.000 el número de habitantes iniciales, hemos de calcular n para que p_n =6.561. Sabemos que pasado un año la situación será la siguiente $p_1 = p_0 - 0{,}1p_0 = 0{,}9p_0$ =9.000, ahora basta repetir el proceso hasta llegar al valor requerido. (**Solución**: hace 4 años).

7. Radio Macuto: a las 9 de la mañana una persona cuenta un secreto a tres amigos con la condición de que no se lo cuenten absolutamente a nadie. A las 9.30 horas de la mañana cada uno de esos tres amigos se lo han contado a otros tres con la misma condición . A las 10 de la mañana cada uno de estos amigos se lo han contado a otros tres y así sucesivamente cada media hora. Suponiendo que se ha tenido la inmensa suerte de que a nadie se lo han contado por dos vías diferentes, ¿Cuánta gente estaría enterada del "secreto" a las 4 de la tarde?
   Ayuda: nuevamente podemos resolver el ejercicio mediante un proceso de sucesivas multiplicaciones por una cantidad fija. Partiendo del valor $a_1 = 3$ (los tres primeros custodios del secreto), si vamos multiplicando sucesivamente por 3, iremos obteniendo el número de personas enteradas del ya mal llamado secreto. Teniendo en cuenta que entre las 9 y las 4 han pasado 14 medias horas no es complicado llegar a la solución, ahora bien no olvidemos a la persona que comenzó la cadena. (**Solución**: $3^{15} + 1$).

8. Deducir la expresión general del término n-ésimo de una progresión geomética de razón r y primer término a_1. Deducir una fórmula para sumar los n primeros términos de la misma.
   Solución:

   Los ejercicios anteriores pueden resolverse, nuevamente, de manera sistemática usando la teoría de las progresiones geométricas, las cuales constituyen secuencias numéricas donde cada término se obtiene multiplicando al anterior por una cantidad fija que denominamos razón y representamos por la letra r, es decir $a_n = a_{n-1}r$ (la razón puede tomar valores negativos). Esta última igualdad nos permite expresar todos los términos de una progresión geomética en función del primero y la razón.

$$a_2 = a_1 r; \quad a_3 = a_2 r = a_1 r^2; \quad a_4 = a_3 r = a_1 r^3; \ ...... \ a_n = a_{n-1} r = a_1 r^{n-1}$$

   y estas relaciones nos facilitan el cálculo de una expresión para la suma de los n primeros términos de la progresión. Cambiaremos el procedimiento respecto al de las progresiones aritméticas. En primer lugar expresaremos la suma $S_n = a_1 + a_2 + \ ... \ + a_n$ y luego esta misma multiplicada por la razón $rS_n = a_1 r + a_2 r + \ ... \ + a_n r$, es decir.

$$\begin{array}{rccccccccc} S_n = & a_1 & + & a_1 r & + & ...... & + & a_1 r^{n-2} & + & a_1 r^{n-1} \\ rS_n = & a_1 r & + & a_1 r^2 & + & ...... & + & a_1 r^{n-1} & + & a_1 r^n \end{array}$$

si restamos las dos igualdades obtendremos la expresión $S_n - rS_n = (1-r)S_n$ en el lado izquierdo de la igualdad, y en el derecho $a_1 - a_1 r^n$, o de forma equivalente $a_1 - a_n r$, ya que el resto de sumandos se cancelan. Por tanto, obtenemos $(1-r)S_n = a_1 - a_n r$, es decir

$$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r} = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$$

es curioso comprobar que cuando la razón es un valor entre -1 y 1, es decir $|r| < 1$, obtenemos un valor finito para la suma de infinitos sumandos, ya que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a_1}{1-r}$, dado que $\lim\limits_{n\to\infty} a_1 r^n = 0$ en dicho caso.

Nota: se recomienda resolver de nuevo los 3 ejercicios anteriores usando estas fórmulas a modo de comprobación y entrenamiento.

7.3. Números complejos

1. Un cuadrado tiene un vértice A en el punto $(3,1)$ y su centro en $(2,2)$. Calcula las coordenadas de los otros tres vértices, usando números complejos.
   Ayuda: si denotamos por O al centro, el vector $\overline{OA}$ al ser girado 90 grados se convertirá en el vcector $\overline{OB}$, siendo B el siguiente vértice del cuadrado, repitiendo este proceso sobre el vector $\overline{OB}$ obtenemos el vector $\overline{OC}$ y aplicando a este el giro de 90 grados nos lleva al vector $\overline{OD}$. Hemos de recordar que podemos identificar cualquier punto del plano (a,b) con el número complejo $a+bi$ y que si multiplicamos cualquier número complejo por el número $1_\theta = cos\theta + i\ sen\theta$, su vector de posición experimentará un giro de θ grados. En nuestro caso basta con tomar θ =90. Por último no debemos olvidar que nuestro procedimiento nos llevará a obtener las coordenadas de los vectores $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$ y en realidad queremos obtener las coordenadas de los puntos B, C y D, por lo que habremos de sumar a las coordenadas de los vectores obtenidos las coordenadas del centro. (**Solución**: $B(3,3)$, $C(1,3)$ y $D(1,1)$).

2. Un hexágono regular tiene su centro en el origen de coordenadas y uno de sus vértices en el punto (6,0). Hallar las coordenadas de los demás vértices.
   Ayuda: el procedimiento es el mismo que en el ejercicio anterior tomando como ángulo θ =60 grados, resultado de dividir 360 grados entre 6 que es el número de ángulos que se forman al trazar las líneas desde el centro del hexágono a cada uno de sus vértices. En este caso y dado que el centro es el punto $(0,0)$ las coordenadas de los vectores $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OE}$ y $\overline{OF}$, coinciden con las de los respectivos vértices. (**Solución**: $A(6,0)$, $B(3,3\sqrt{3})$, $C(-3,3\sqrt{3})$, $D(-6,0)$, $E(-3,-3\sqrt{3})$y $FE(3,-3\sqrt{3})$).

7.4. Ecuaciones

1. Se quiere hacer una caja de 50 cm^3 de volumen con una cartulina cuadrada. Para hacerla se cortan en las esquinas cuadrados de 2 cm de lado. ¿Cuánto mide el lado de la cartulina cuadrada?
   Ayuda: el volumen de una caja es igual al área de la base por la altura, si llamamos x al tamaño del cuadrado que forma la base de la caja, es fácil comprobar, teniendo en cuenta que la altura es 2, que x vale 5. (**Solución**: 7 cm).

2. Un rectángulo mide 15 cm de largo y 8 cm de ancho. ¿En cuántos centímetros habría que disminuir, simultáneamente, el largo y el ancho para que la diagonal sea 4 cm menor?
   Ayuda: al trazar la diagonal del rectángulo obtenemos dos triángulos rectángulos idénticos de catetos conocidos y cuya hipotenusa común es precisamente la diagonal. Aplicando el teorema de Pitágoras podremos obtener el valor de ésta. Llamando x a la cantidad a disminuir en el largo y en el ancho y aplicando nuevamente Pitágoras, obligando que el valor de la nueva hipotenusa sea el obtenido anteriormente menos 4, obtendremos la solución. (**Solución**: 3 cm).

3. Dos ciclistas parten al mismo tiempo y del mismo punto hacia un pueblo que está a 90 km. El primero, que recorre un kilometro más por hora que el segundo, tarda una hora menos que éste en hacer el recorrido. ¿Con qué velocidad marchó cada ciclista?
   Ayuda: si denotamos por x la velocidad del primer ciclista, es obvio que la del segundo será x-1. Ahora ha de tenerse en cuenta que el tiempo que emplea cada uno en recorrer la distancia es el cociente entre ésta y la velocidad. Escribiendo la relación entre los tiempos que tardan respectivamente, obtenemos una ecuación que nos permite calcular el valor de x. (**Solución**: el primer ciclista va a 10 km/h y el segundo a 9 km/h).

4. Una compañía fabrica tres modelos de telescopios de distintas características y alcance. Para la fabricación del primero de ellos, llamado Copérnico, necesita emplear 12 horas para el ensamblaje, $2'5$ horas para probarlo y 2 horas para instalarle el software que permitirá conectarlo a un ordenador. Para el segundo modelo, llamado Kepler, necesita 10 horas para ensamblaje, 2 para probarlo y 2 para la instalación del software. Para el tercero, llamado Galileo, se utilizan 6 horas de ensamblado, $1'5$ de prueba y $1'5$ de instalación de software. Si la fábrica cuenta con una disponibilidad de 556 horas para ensamblaje, 103 horas para la instalación de software y el material para la construcción de 56 telescopios, ¿cuántas horas dedicará a las pruebas?
   Ayuda: denotando por x la cantidad de telescopios tipo Copérnico, por y la cantidad de los del tipo Kepler y por z los del tipo Galileo, podremos plantear un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. La primera sabiendo que la suma de las tres cantidades ha de ser 56. La segunda usando que al multiplicar cada cantidad por el número de horas que se emplea en el ensamblaje de cada ordenador de cada tipo, la suma total ha de ser 556. La tercera aplicando la misma idea que en la segunda, pero con las horas necesarias para la instalación del software. Una forma sencilla de resolver el sistema obtenido sería restando a la tercera ecuación la primera multiplicada por 2, lo que nos permitiría obtener el valor de z. Llevando este valor a la primera y a la segunda ecuación obtendremos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, el cual no presenta dificultad en su resolución. Una vez obtenidos los valores de x, y y z, ya sólo resta multiplicar cada uno por el correspondiente número de horas necesarias para la prueba de cada tipo y sumar las cantidades obtenidas. (**Solución**: 120 horas).

5. Un estado compra 540.000 barriles de petróleo a tres suministradores diferentes que los venden a 27, 28 y 31 euros el barril respectivamente. La factura total asciende a 15.210.000 euros. Si al segundo suministrador le compra tanto como a los otros dos juntos, ¿cuál es la cantidad comprada a cada suministrador?
   Ayuda: denotando por x la cantidad de barriles comprados al primer suministrador, por y la cantidad comprada al segundo y por z al tercero, podremos plantear un sistema de

tres ecuaciones con tres incógnitas. (**Solución**: $x = 180$, $y = 270$ y $z = 90$).

7.5. Geometría

1. Halla las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman la recta $5x+12y-60=0$ con el eje de ordenadas.
   Ayuda: primero calculamos el punto de corte de la recta con el eje OY (eje de ordenadas) el cual es $P(0,5)$. A continuación calculamos las razones trigonométricas del ángulo que forman los vectores directores del eje OY $\overline{u}=(0,1)$ y de la recta $\overline{v}=(12,-5)$, obteniéndose $cos\theta=-5/13$ y $sen\theta=12/13$. Usando las fórmulas que relaciona el coseno al cuadrado y el seno al cuadrado de un ángulo con el coseno del ángulo doble llegamos a que $cos(\theta/2)=2/\sqrt{13}$ y $sen(\theta/2)=3/\sqrt{13}$. Tomaremos como vector director de una de las bisectrices $\sqrt{13}(cos(\theta/2), sen(\theta/2))=(2,3)$ y al pasar por el punto P la ecuación de ésta será: $3x-2y+10$. La otra bisectriz se obtiene teniendo en cuenta que es la recta perpendicular a la obtenida pasando por P, lo que nos lleva a la ecuación $2x+3y-15=0$.

2. Un paralelogramo tiene dos de sus lados sobre las rectas $r:\ y=5x+2$ y $s:\ x+3y+7=0$ y un vértice en el punto $(4,6)$. Halla las ecuaciones de las rectas que contienen a los otros dos lados y las coordenadas del resto de los vértices.
   Ayuda: en primer lugar calculamos la intersección de r y s y obtenemos un punto distinto de $(4,6)$, además como este último no está en ninguna de las dos rectas, está claro que tenemos dos vértices opuestos del paralelogramo. A partir de aquí, por paralelismo, es fácil obtener la ecuación de las rectas que contienen a los otros dos lados, y por intersección de las rectas apropiadas las coordenadas de los otros dos vértices. (**Solución**: los vértices: $(4,6)$, $(-13/16, 33/16)$, $(1,7)$, $(-35/16, -399/16)$. Las rectas: $x+3y-22=0$, $y=5x-14$).

7.6. Problemas complementarios

1. El segundo curso de un colegio tiene tres alumnos más que el tercero, y el primero seis alumnos más que el segundo. En una colecta de caridad cada alumno del mismo curso da la misma suma, pero cada alumno del tercer curso da tanto como cada alumno del primero y segundo juntos. El tercer curso reunió 10.000 euros, el segundo 6.900 y el primero 5.800. ¿Cuántos alumnos tiene cada curso? (**Solución**: 29 alumnos en 1º, 23 en 2º y 20 en 3º).

2. Un coronel que manda 3.003 soldados quiere formarlos en triángulo, de manera que la primera fila tenga 1 soldado la segunda 2, la tercera 3 y así sucesivamente. ¿Cuántas filas tendrá la formación? (**Solución**: 77 filas).

3. En una circunferencia de 7 cm de radio de traza una cuerda de 9 cm. ¿Cuánto mide el ángulo central que abarca dicha cuerda? (**Solución**: arcosen(17/98)).

4. En una confitería envasan los bombones en cajas de 250 gr, 500 gr y 1 kg. Cierto día se envasaron 60 cajas en total, habiendo 5 cajas más de tamaño pequeño (250 gr) que de tamaño mediano (500 gr). Sabiendo que el precio del kilo de bombones es de 40 euros y que el importe total de los bombones envasados asciende a 1.250 euros, determinar cuántas cajas de cada tipo se han envasado. (**Solución**: 25 de 250 gr, 20 de 500 gr y 15 de 1 kg).

5. En un cuadrado de 5 cm de lado se unen los puntos medios de sus lados y se obtiene otro cuadrado inscrito; en éste se realiza la misma operación y así se continua indefinidamente.

Hallar la suma de las áreas de los cuadrados así obtenidos. Hacer lo mismo partiendo de un triángulo equilátero de 3 metros de lado. (**Solución**: 50 cm^2 para los cuadrados y $\sqrt{3}\ m^2$ para los triángulos).

6. Calcular cuántos días estuvo trabajando un camarero en un establecimiento sabiendo que el primer día recibió una gratificación de 10 euros, y que cada día que pasaba recibía 3 euros más de gratificación, llegando a cobrar el último día 55 euros. (**Solución**: 16 días).

7. En un círculo de 1 metro de radio se inscribe un cuadrado; en éste se inscribe un círculo, en éste otro cuadrado y así sucesivamente. Halla el límite de la suma de las áres de todos los círculos así construidos. (**Solución**: $2\pi\ m^2$).