Curso Introductorio a las Matemáticas Universitarias

Tema 8: Derivación

Víctor M. Almeida Lozano
Jorge J. García Melián

Licencia Creative Commons 2013

8. DERIVACIÓN

En este tema veremos el concepto de derivada de una función y repasaremos las principales reglas de cálculo de derivadas, así como la principal aplicación de las mismas: el cálculo de máximos y mínimos, sobre todo en los llamados problemas de optimización.

8.1. Definición e interpretación geométrica de la derivada

Nos interesa el problema de determinar la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$. Para ello, consideramos las rectas secantes que pasan por el punto $(a, f(a))$ y otro punto de la curva, de la forma $(a + h, f(a + h))$, según la figura.

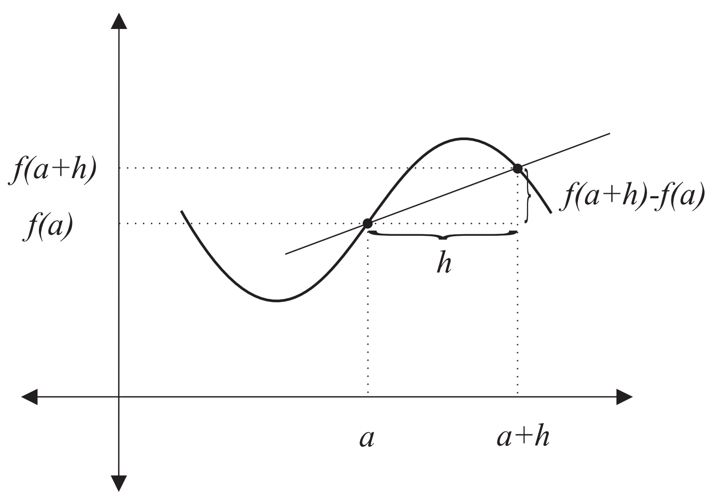

FIGURA 1. Recta tangente a una curva

La pendiente de cada una de estas rectas es

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Cuando hacemos $h \to 0$, el punto $(a + h, f(a + h))$ tiende a $(a, f(a))$, y las rectas secantes se acercan a la tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$. Por tanto, la pendiente de la tangente será:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

siempre que el límite exista. Esto motiva la siguiente definición:

Definición. Se dice que una función $f(x)$ es derivable en un punto a de su dominio si existe el límite

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

El valor $f'(a)$ se llama la *derivada* de la función $f(x)$ en $x=a$. Decimos que f es derivable en un intervalo (c,d) si es derivable en a, para todo $a \in (c,d)$.

En caso de que la función $f(x)$ sea derivable en $x=a$, la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es

$$y - f(a) = f'(a)(x-a).$$

Ejemplo. Tomemos la función $f(x)=x^2$, en un punto a arbitrario.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2ah+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2a+h = 2a.$$

Nota. La existencia del límite depende de que existan y sean iguales los correspondientes límites laterales, a los que se denomina derivadas por la izquierda y por la derecha, respectivamente:

$$f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \quad f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

8.2. Ejercicios

1. Calcular, mediante la definición, la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

   (a) $f(x) = x^3+1$ en $x=1$, (b) $g(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x=-2$.

8.3. Reglas operacionales y cálculo de derivadas

Como muestra el ejemplo anterior, en general va a ser complicado calcular una derivada directamente usando la definición. Por eso, en la práctica es conveniente hacer uso de tablas de derivadas y reglas de derivación para calcular derivadas de funciones que se pueden escribir en términos de las funciones elementales.

Las derivadas de las principales funciones elementales son (véase una tabla más completa al final del tema):

$$\begin{aligned}
&(x^n)' = nx^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N};\\
&(e^x)' = e^x;\\
&(\ln x)' = \frac{1}{x};\\
&(\operatorname{sen} x)' = \cos x;\\
&(\cos x)' = -\operatorname{sen} x.
\end{aligned}$$

Reglas operacionales

Para cada valor de x en que existan $f'(x)$ y $g'(x)$, se verifica:

(a) $[cf(x)]' = cf'(x)$, c cualquier número real.

(b) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$.

(c) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

(d) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$ (si $g(x) \neq 0$).

Ejemplos

(a) Si $f(x) = xe^x - 2x$, entonces $f'(x) = e^x + xe^x - 2 = (x+1)e^x - 2$.

(b) Cuando $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, se tiene

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

Regla de la cadena:

Si existen $f'(a)$ y $g'(f(a))$, entonces existe $(g \circ f)'(a)$ y se cumple que

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Ejemplos

(a) $(e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$.

(b) $[\cos(3x-1)]' = -\text{sen}(3x-1) \cdot 3 = -3\text{sen}(3x-1)$.

(c) $[\ln(x^2+1)]' = \dfrac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

8.4. Ejercicios

1. Calcular la función derivada de cada una de las siguientes funciones:

$$(a)\ f(x) = \frac{x^3-a^3}{x-a} \qquad (b)\ f(x) = x^2\text{sen}\,\frac{1}{x} \qquad (c)\ f(x) = \frac{2x^2-3x+4}{x}$$

$$(d)\ \psi(\theta) = \frac{(\theta+3)^2}{\theta+2} \qquad (e)\ f(x) = \frac{1}{x(x+1)} \qquad (f)\ f(x) = \frac{3}{4x^7}.$$

8.5. Aplicaciones de la derivada

Veamos finalmente algunas de las innumerables aplicaciones del cálculo de derivadas. Hemos elegido, por simplicidad, presentar solamente las más destacadas.

8.5.1. Regla de l'Hôpital

La primera de las aplicaciones es el uso de las derivadas para calcular límites. Muchos límites de la forma

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

(y otros que se pueden reducir a éstos) en los que aparecen indeterminaciones del tipo $(0/0)$ ó (∞/∞) se resuelven mediante la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

suponiendo que este último límite exista.

Ejemplos. (a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = 0.$$

(b) Al aplicar la regla de l'Hôpital es a veces necesario derivar más de una vez:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^2}{\operatorname{sen}^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos x)\operatorname{sen} x}{3\operatorname{sen}^2 x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos x)}{3\operatorname{sen} x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} x}{3\cos^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x} = 0.$$

(c) Algunos límites que no son de los tipos $(0/0)$ ó (∞/∞) se pueden reducir a éstos, para luego calcularlos usando la regla de l'Hôpital. Por ejemplo:

$$l = \lim_{x\to 0} x^x = (\infty^\infty).$$

Si tomamos logaritmos:

$$\ln l = \ln(\lim_{x\to 0} x^x) = \lim_{x\to 0} \ln(x^x) = \lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0.$$

Luego $l = e^0 = 1$.

8.5.2. Crecimiento y decrecimiento

Decimos que la función real $f(x)$ es creciente en el intervalo (a,b) si para $x,y \in (a,b)$ tales que $x<y$ se cumple $f(x)<f(y)$. Análogamente, $f(x)$ es decreciente en (a,b) si para $x,y\in(a,b)$ tales que $x<y$ se tiene $f(x)>f(y)$.

Los intervalos de crecimiento o decrecimiento de una función real se pueden determinar con ayuda de las derivadas. Más precisamente, dada una función $f(x)$ derivable en el intervalo (a,b), se tiene:

- si $f'(x)>0$ para todo $x\in(a,b)$, $f(x)$ es creciente en dicho intervalo;

- si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, $f(x)$ es decreciente en dicho intervalo.

Estrechamente relacionados con los conceptos de crecimiento y decrecimiento están los de máximos y mínimos (locales) de una función. Decimos que la función $f(x)$ tiene un máximo local en a si $f(x) \leq f(a)$ para x cerca de a. Análogamente se define un mínimo local.

De nuevo hay una relación entre las derivadas y los máximos y mínimos locales:

- si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, entonces $f(x)$ tiene un máximo máximo local en $x = a$;
- si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, $f(x)$ tiene un mínimo local en $x = a$.

Cuando se verifica $f(x) \leq f(a)$ para todos los valores de x en el dominio de definición de f, se dice que en $x = a$ se tiene un máximo global o absoluto. Para los mínimos se tiene una situación análoga.

La discusión anterior muestra que para determinar los máximos y mínimos locales de una función derivable tenemos que hallar las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$. Éstas nos darán los candidatos a máximos y mínimos locales, y tendremos que comprobar el signo de la derivada segunda para decidir.

Observación. Hay que tener mucho cuidado a la hora de calcular los máximos y mínimos globales de una función en un intervalo $[a, b]$. De hecho, puede ocurrir que los puntos en los que se anula la derivada sean solamente máximos y mínimos locales, mientras que el máximo o mínimo global puede alcanzarse en los extremos del intervalo. Es justamente lo que ocurre para la función cuya gráfica aparece en la figura.

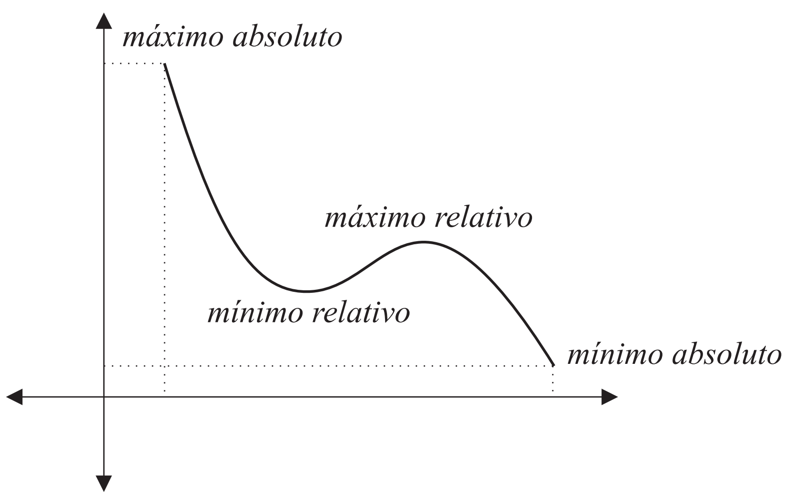

Figura 2. Máximos y mínimos absolutos y relativos

Ejemplo. Para hallar los máximos y mínimos de la función

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}, \quad x \in \mathbb{R},$$

calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x^2+3)^2}.$$

Al igualar a cero, encontramos los valores $x = 1$ y $x = -3$. Para saber cuál de ellos es un máximo y cuál un mínimo, calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{2(x^3 + 3x^2 - 9x - 3)}{(x^2 + 3)^3}$$

y obtenemos $f''(1) < 0$, $f''(-3) > 0$, con lo que $x = 1$ es un máximo local y $x = -3$ un mínimo local. Al no haber otros posibles máximos ni mínimos locales y como

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

deducimos que $x = 1$ es de hecho el máximo global de la función, mientras que $x = -3$ es el mínimo global.

8.5.3. Problemas de optimización

Muchos problemas prácticos se reducen a la determinación de máximos y mínimos de una función de variable real. Por ejemplo, en muchas situaciones se trata de determinar las dimensiones de un recipiente (con una forma determinada) para maximizar o minimizar alguna de sus características: volumen, coste, etc. Lo veremos con un ejemplo.

Ejemplo. Se quiere construir un depósito de forma cilíndrica cuyo volumen sea de 2π metros cúbicos. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que la superficie total sea mínima?

Si r es el radio del cilindro y h su altura (véase la figura), la superficie total es

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

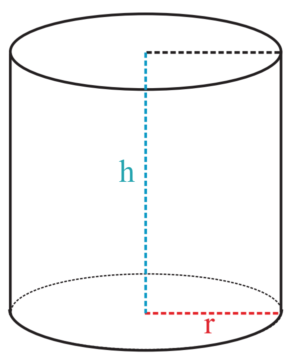

Figura 3. Cilindro

La relación entre r y h se determina por la condición de que el volumen sea 2π:

$$\pi r^2 h = 2\pi.$$

Por tanto, se trata de minimizar la función

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{4\pi}{r}.$$

Claramente, debe tenerse $0 < r < \infty$. Si derivamos e igualamos a cero:

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{4\pi}{r^2} = 0 \Rightarrow r = 1.$$

Además, en $r = 1$ se tiene un mínimo local: $S''(1) > 0$. Puesto que

$$\lim_{r\to 0} S(r) = \lim_{r\to\infty} S(r) = +\infty,$$

resulta que el mínimo es global, y las dimensiones pedidas son entonces $r = 1$, $h = 2$.

8.6. Ejercicios

1. Calcular, mediante la regla de l'Hôpital, los siguientes límites:

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}.$$

2. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la siguiente función. Calcular sus máximos y mínimos locales:

$$f(x) = -x - \frac{1}{x}\ .$$

3. Demostrar que, de todos los rectángulos con un perímetro dado, el que tiene el área máxima es un cuadrado.

Tabla de derivadas

En la siguiente tabla u representa una función de x y c una constante.

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$
2. $\frac{d}{dx}(cu) = cu'$
3. $\frac{d}{dx}(x) = 1$
4. $\frac{d}{dx}(\ln\ u) = \frac{u'}{u}$
5. $\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}u'$
6. $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u u'$
7. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = (\cos\ u)u'$
8. $\frac{d}{dx}(\cos\ u) = -(\operatorname{sen} u)u'$
9. $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} u) = \frac{u'}{\cos^2 u} = (1 + \operatorname{tg}^2 u)u'$
10. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} u) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
11. $\frac{d}{dx}(\arccos\ u) = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
12. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} u) = \frac{u'}{1+u^2}$

8.7. Ejercicios complementarios

1. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

   (a) $f(\phi) = \dfrac{1}{\phi} - \dfrac{1}{\phi^2}$ (b) $f(t) = \sqrt[3]{t^3+3t+1}$ (c) $f(t) = \sqrt[3]{(t^3+3t+2)^2}$

   (d) $f(x) = (x+1)\sqrt{x^2-2x+2}$ (e) $f(t) = \sqrt{\dfrac{1+t^2}{1-t^2}}$ (f) $f(x) = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x}}$

   (g) $y = \cos x \operatorname{sen} x$ (h) $y = \cos^2\sqrt{x}$ (i) $f(x) = a\sqrt{\cos 2x}$

   (j) $\mu(\theta) = \operatorname{tg}\sqrt{1-\theta}$ (k) $f(x) = x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$.

2. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^x+1}$ (b) $f(x) = e^{-x}\cos x$ (c) $\sqrt{e^x-1}$

   (d) $f(x) = \ln(\ln x)$ (e) $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x) - \ln(\cos x)$ (f) $f(x) = \dfrac{\ln(x+2)}{\ln(x+1)}$

   (g) $f(x) = \ln(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2})$ (h) $f(x) = \dfrac{\ln\sqrt{x}}{\ln(x+e^x)}$ (i) $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$

   (j) $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$ (k) $f(x) = (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$ (l) $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$

3. ¿En qué punto la curva de ecuación

   $$y = \frac{x^2-4}{x^2+4}$$

   tiene una recta tangente horizontal? ¿Es posible que dicha curva tenga una tangente paralela a la recta $3x-3y+7=0$ en algún punto con $x<0$?

4. Calcular aplicando la regla de l'Hôpital los siguientes límites:

   $$\text{(a)} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x\right] \quad \text{(b)} \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{1 - \cos x} \quad \text{(c)} \lim_{x\to 2}\left(4-\frac{3x}{2}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}}$$

5. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones. Calcular sus máximos y mínimos locales.

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{2x^2+1}$; (b) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2+1}$; (c) $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$;

   (d) $f(x) = x\sqrt{5-x^2}$; (e) $f(x) = x+5-2\operatorname{sen} x$, $x\in[0,2\pi]$.

6. Se quiere construir una gasolinera de 1.800 m^2 en un terreno rectangular junto a una autopista. Para ello, se quiere cercar los tres lados no contiguos a la autopista. ¿Qué cantidad mínima de valla se necesitará para realizar el cercado?

7. A partir de una cartulina cuadrada de 60 cm de lado se va a construir una caja de base cuadrada, sin tapa, recortando cuatro cuadrados iguales en las esquinas de la cartulina y doblando después de la manera adecuada. Determinar cuándo se obtiene una caja de máxima capacidad.

8. Determinar las dimensiones del cilindro de área total 24π m^2, con tapa incluida, tal que su volumen sea máximo.

9. Se usan 4 metros de alambre para construir un cuadrado y un círculo. ¿Qué cantidad de alambre debe usarse para el cuadrado y qué cantidad para el círculo a fin de abarcar un área total máxima?

8.8. Soluciones a los ejercicios

8.2 **Definición de la derivada**.

(a) $f'(1) = 3$, **(b)** $g'(4) = -\frac{1}{4}$.

8.4 **Reglas operacionales y cálculo de derivadas**.

(a) $f'(x) = (2x^3 - 3ax^2 + a^3/(x-a)^2$; **(b)** $f'(x) = 2x\text{sen}(1/x) - \cos(1/x)$; **(c)** $f'(x) = (2x^2-4)/x^2$; **(d)** $\psi'(\theta) = (\theta+3)(\theta+1)/(\theta+2)^2$; **(e)** $f'(x) = -(2x+1)/(x^2(x+1)^2)$; (f) $f'(x) = -21/4x^8$.

8.6 **Aplicaciones de las derivadas**.

(1a) 2, **(1b)** 1.

(2). Es decreciente en $(-\infty,-1)$ y en $(1,+\infty)$, y creciente en $(-1,0)$ y en $(0,1)$; tiene un mínimo en $x=-1$ y un máximo en $x=1$.

(3). Si las longitudes de los lados son a y b y el perímetro P, se obtiene un máximo cuando $a = b = \frac{P}{4}$.