Tema 2:

Elección del Consumidor

OWC Economía para Matemáticos

Fernando Perera Tallo

http://bit.ly/8l8DDu

Preferencias (gustos) del consumidor

Supongamos que hay n bienes. Todas las posibles combinaciones de consumo las podemos representar por vectores $x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in \Re_+^n$, donde x_i es la cantidad de consumo de bien i. Sobre este conjunto podemos definir las siguientes relaciones binarias:

$\succsim$: al menos tan preferido, $x^1 \succsim x^2$
se lee x^1 es al menos tan preferido como x^2.

$\succ$: estrictamente preferido $x^1 \succ x^2 \Leftrightarrow x^1 \succsim x^2$ y $x^2 \not\succsim x^1$

$\sim$: indiferente $x^1 \sim x^2 \Leftrightarrow x^1 \succsim x^2$ y $x^2 \succsim x^1$

Axiomas:

Completitud: $\forall x^1, x^2 \in \Re_+^n$ o bien $x^1 \succsim x^2$, o bien $x^2 \succsim x^1$o ambos.

Reflexividad: $\forall x \in \Re_+^n \; x \succsim x$

Transitividad: $\forall x^1, x^2, x^3 \in \Re_+^n$ si $x^1 \succsim x^2$ y $x^2 \succsim x^3 \Rightarrow x^1 \succsim x^3$.

Estos tres axiomas garantizan que si tenemos n combinaciones de bienes $x^1, x^2, ..., x^n$, se pueden comparar entre si, y se puede elegir entre esas combinaciones de bienes una al menos tan preferida a todas las demás.

Conjunto de contorno superior a la cesta de consumo x^*: cestas de consumo que son al menos tan preferidas como x^*:

$\{ x \in \Re^n_+ / x \succsim x^* \}$

Conjunto de contorno inferior a la cesta de consumo x^*: cestas de consumo que x^* es al menos tan preferida como esas cestas**:** $\{ x \in \Re^n_+ / x^* \succsim x \}$

Conjunto de indiferencia a la cesta de consumo x*: cestas de consumo que son indiferentes a x^*:

$\{ x \in \Re^n_+ / x \sim x^* \}$

Continuidad: $\forall x^* \in \Re^n_+$ los conjuntos de contorno superior $\{x \in \Re^n_+ / x \succsim x^*\}$ y de contorno inferior $\{x \in \Re^n_+ / x^* \succsim x\}$ son cerrados (en el espacio métrico Euclideo).

Este axioma garantiza que las preferencias sean representables por una función de utilidad y que esa función de utilidad sea continua.

Notación Vectorial:

$$x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \in \Re^n_+$$

$$x^1 = \left(x^1_1, x^1_2, ..., x^1_n\right) \in \Re^n_+$$

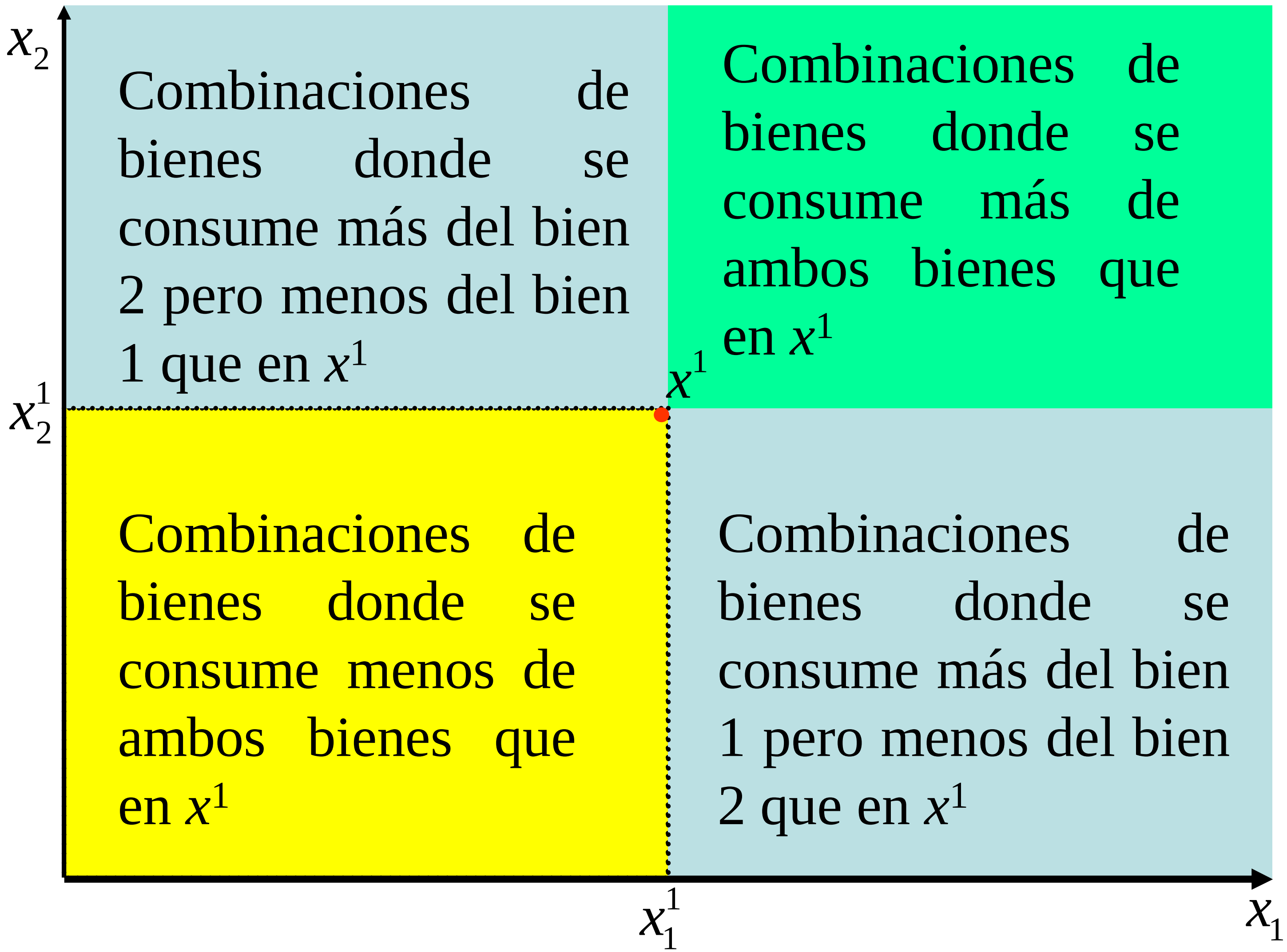
Dados $x^1, x^2 \in \Re^n_+$ se dice que:

- $x^1 \geq x^2$ si $\forall i\ x^1_i \geq x^2_i$
- $x^1 > x^2$ si $\forall i\ x^1_i \geq x^2_i$ y $\exists j\ x^1_j > x^2_j$
- $x^1 \gg x^2$ si $\forall i\ x^1_i > x^2_i$

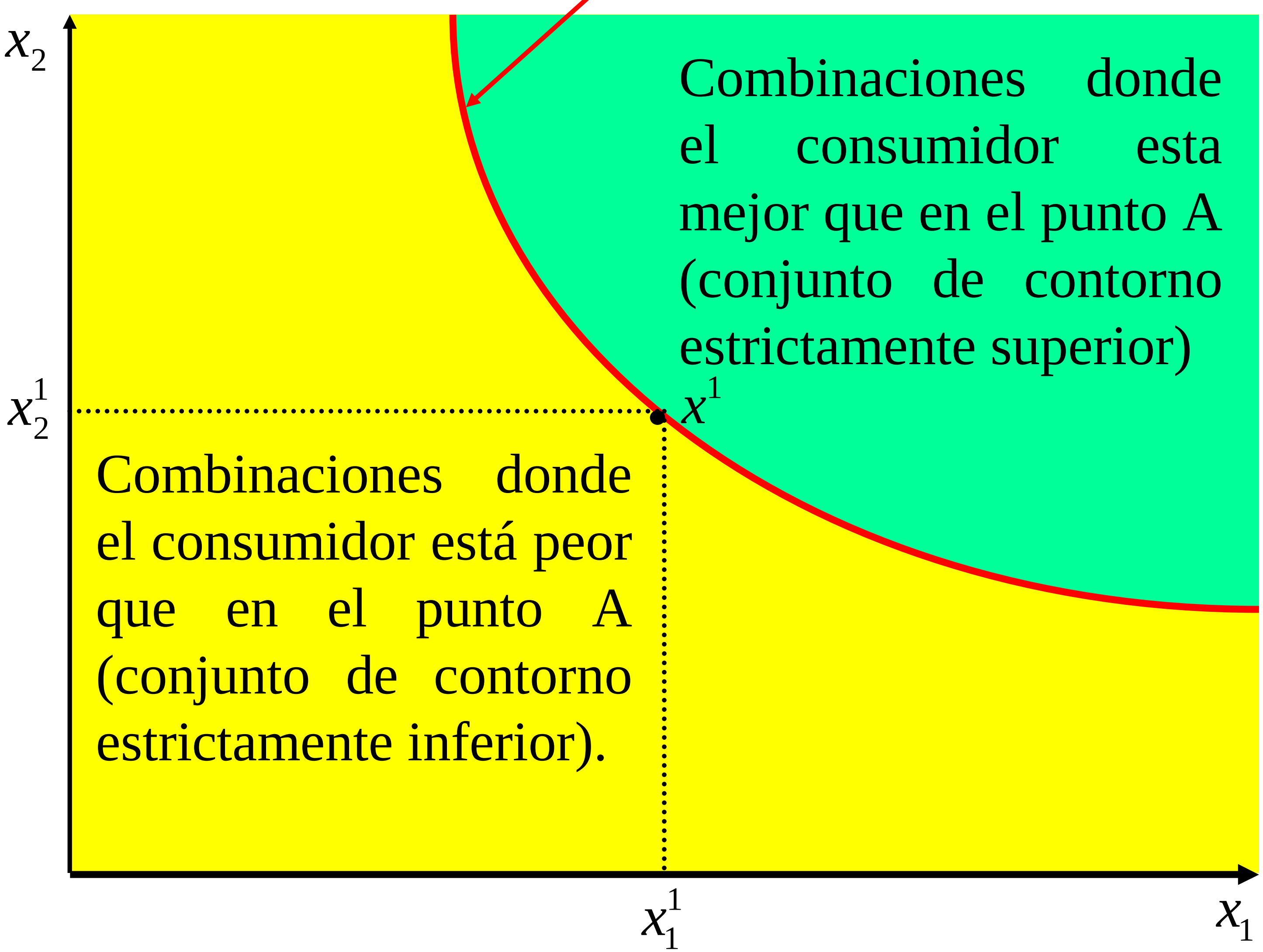
Fernando Perera-Tallo

Monotonicidad (fuerte): si $x^1, x^2 \in \Re^n_+$ son tales que $x^1 > x^2 \Rightarrow x^1 \succ x^2$. Es decir, $\forall i\, x_i^1 \geq x_i^2$ y $\exists j\, x_j^1 > x_j^2 \Rightarrow x^1 \succ x^2$.

Siempre se prefiere las combinaciones que tengan más cantidad de cada bien. Es decir, "cuanto más mejor"

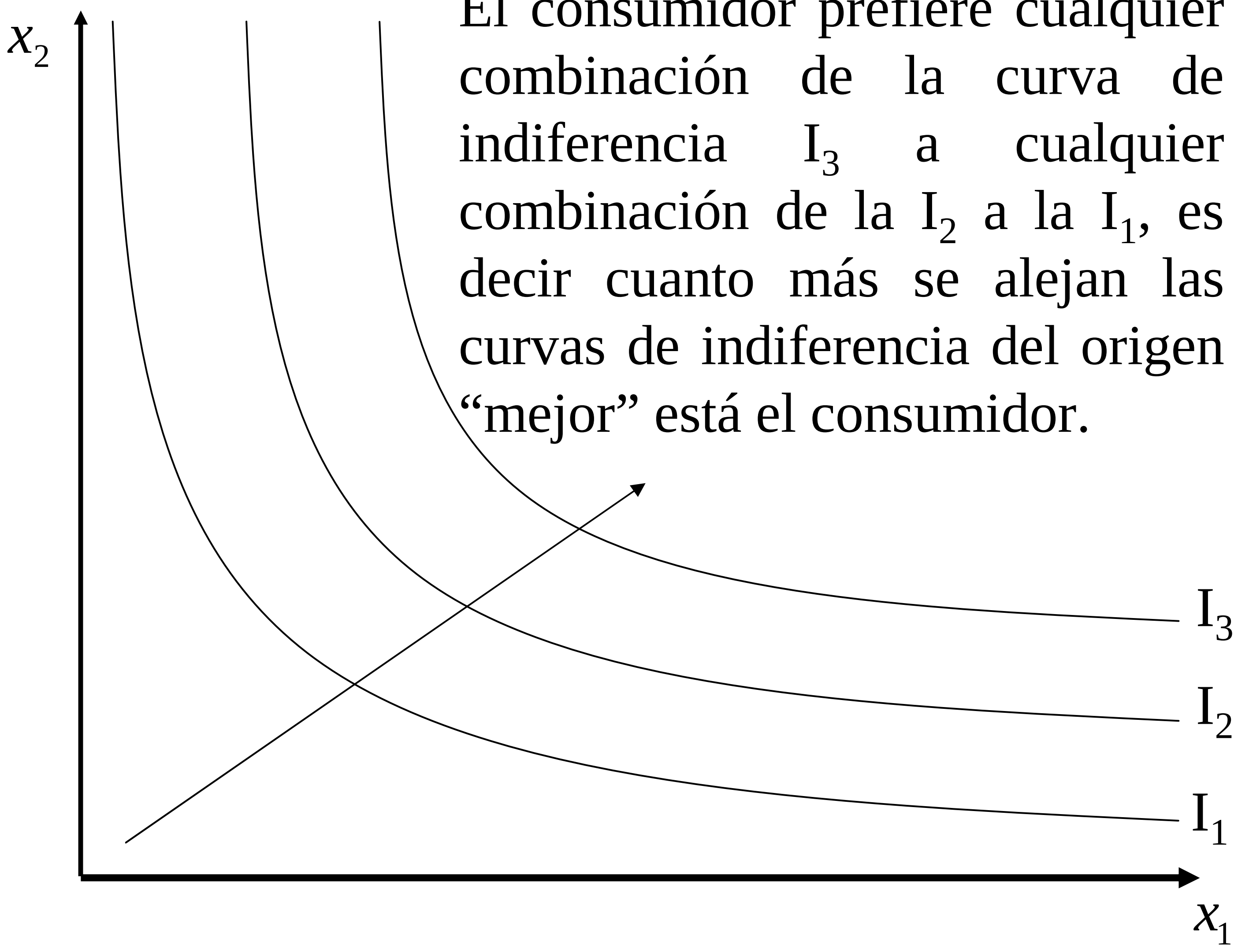

x_2
Combinaciones de bienes donde se consume más del bien 2 pero menos del bien 1 que en x^1
Combinaciones de bienes donde se consume más de ambos bienes que en x^1
x^1
x_2^1
Combinaciones de bienes donde se consume menos de ambos bienes que en x^1
Combinaciones de bienes donde se consume más del bien 1 pero menos del bien 2 que en x^1
x_1^1
x_1

Curva de indiferencia: en todas las combinaciones de bienes de la curva de indiferencia el consumidor está igual (es indiferente entre cualquier combinación).



Mapa de curvas de indiferencia

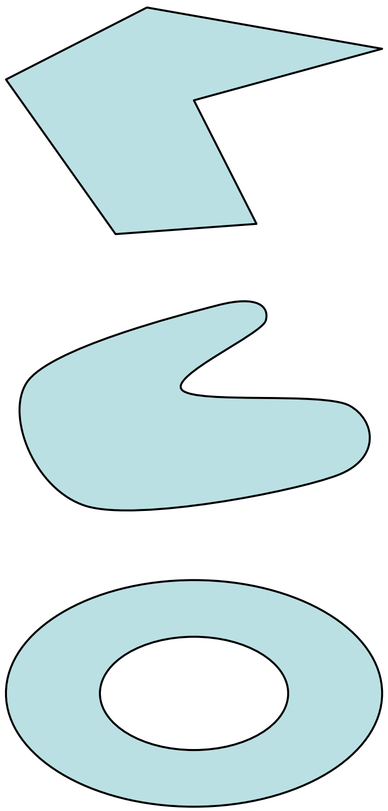
El consumidor prefiere cualquier combinación de la curva de indiferencia I_3 a cualquier combinación de la I_2 a la I_1, es decir cuanto más se alejan las curvas de indiferencia del origen “mejor” está el consumidor.



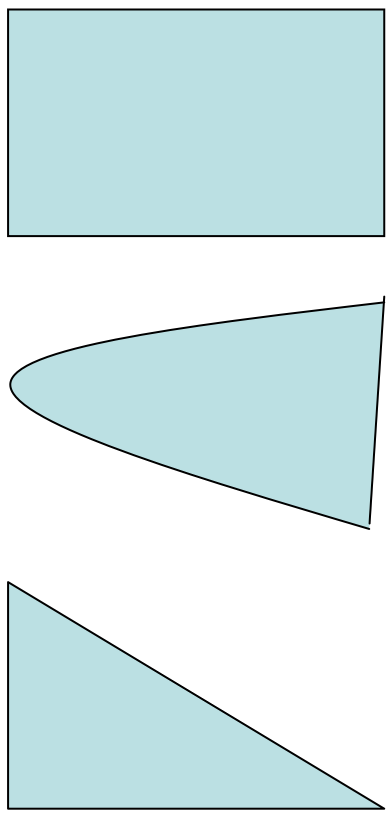
Conjunto convexo: El conjunto $A \subset \Re^n$ es **convexo** si y sólo si $\forall x, y \in A, \forall \lambda \in (0,1), \quad \lambda x + (1-\lambda) y \in A$. A nivel gráfico esto es lo mismo que decir que un conjunto es convexo si la línea que une cualquier par de puntos de este conjunto está dentro del conjunto.

El conjunto $A \subset \Re^n$ es **estrictamente convexo** si $\forall x, y \in A, \forall \lambda \in (0,1), \lambda x + (1-\lambda) y \in Interior(A)$. A nivel gráfico esto es lo mismo que decir que un conjunto es convexo si la línea que une cualquier par de puntos de este conjunto está en el interior de este conjunto

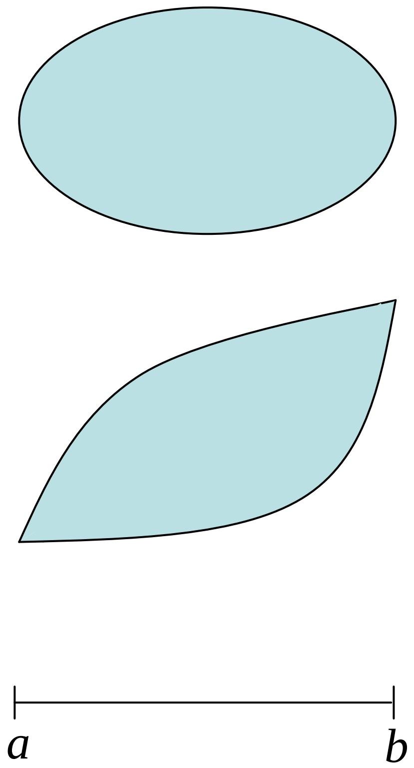
Conjuntos no convexos



Conjuntos convexos pero no estrictamente.



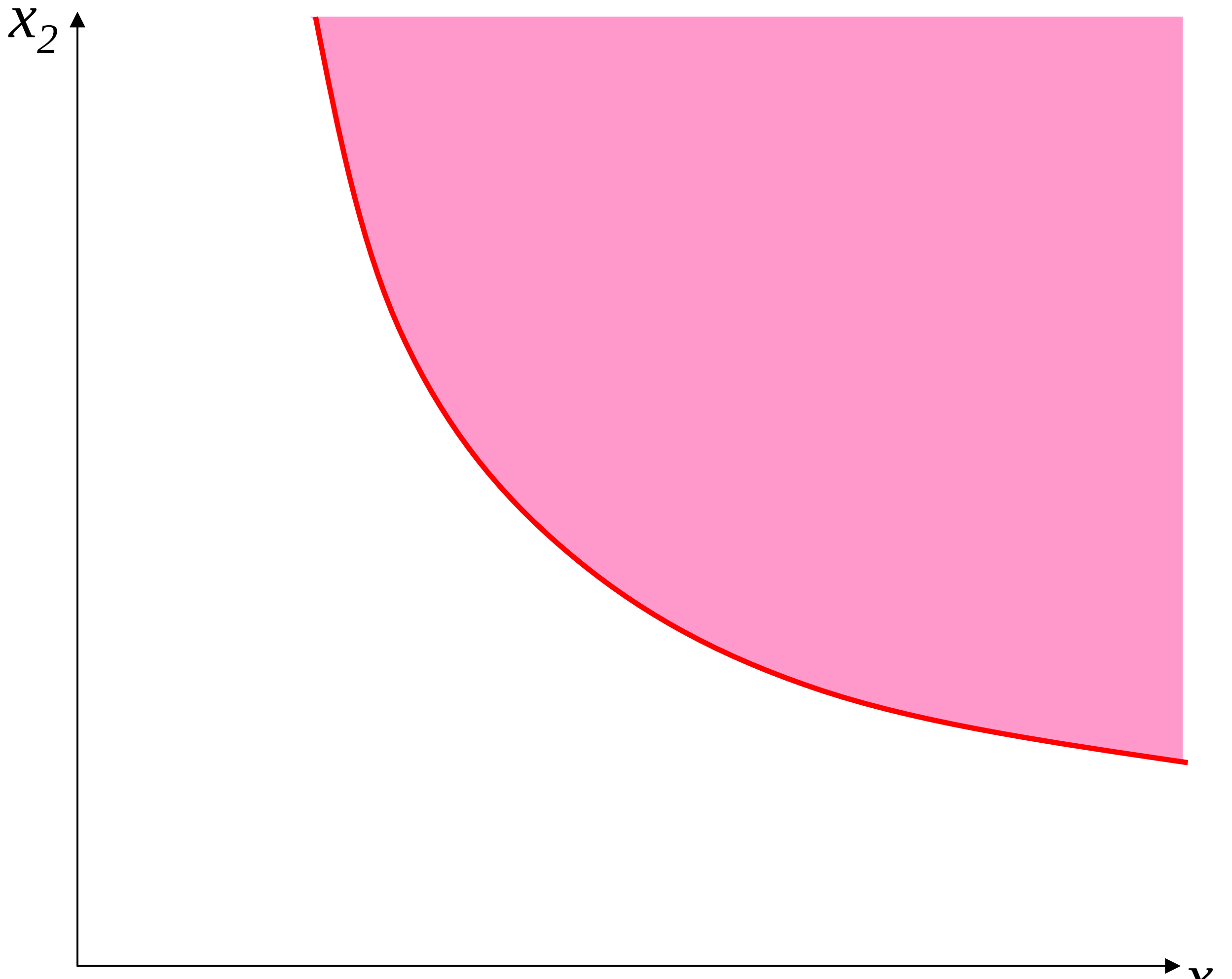
Conjuntos estrictamente convexos



Fernando Perera-Tallo

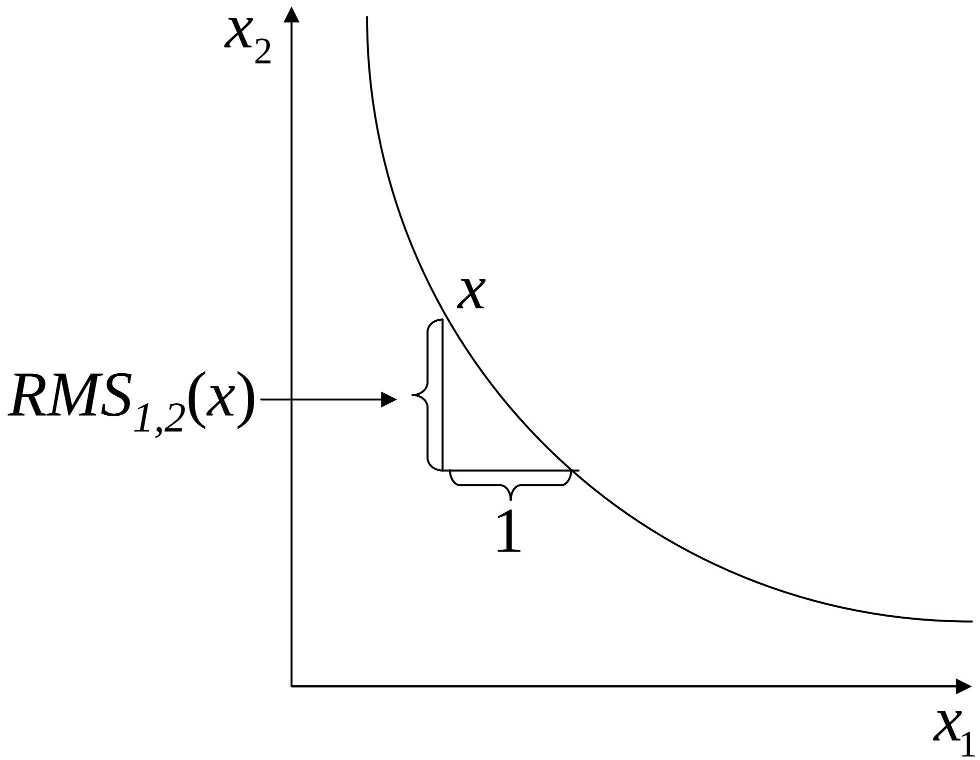
Convexidad estricta: si $x^1, x^2 \in \Re^n_+$, $x^1 \neq x^2$ son tales que $x^1 \succsim x^2 \Rightarrow \forall \lambda \in (0,1) \quad \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2 \succ x^2$

Este axioma es garantiza que la elección del consumidor sea única (dados unos precios hay una única combinación de bienes que es preferida a las demás). El significado económico del axioma es que la relación marginal de substitución entre dos bienes es decreciente. Es decir, cuanto más unidades de un bien tiene el consumidor menos unidades de otros bienes esta dispuesto a intercambiar por ese bien.



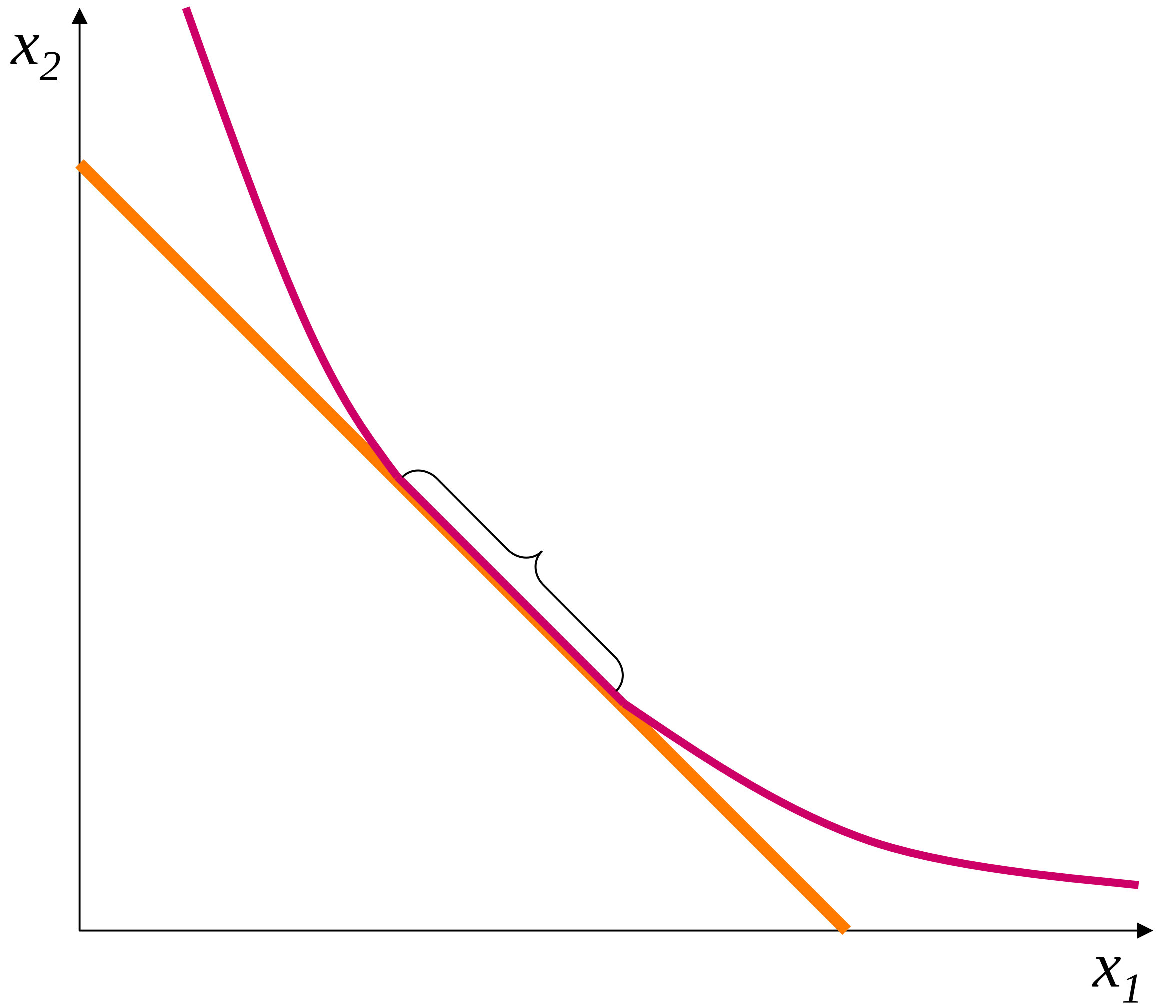
x_2
x_1

Relación marginal de substitución: entre el bien i y el bien j ($RMS_{i,j}(x)$) es el máximo número de unidades del bien j que el consumidor está dispuesto a intercambiar por una unidad del bien i. La relación marginal de substitución en un punto coincide con la pendiente de la curva de indiferencia en ese punto.

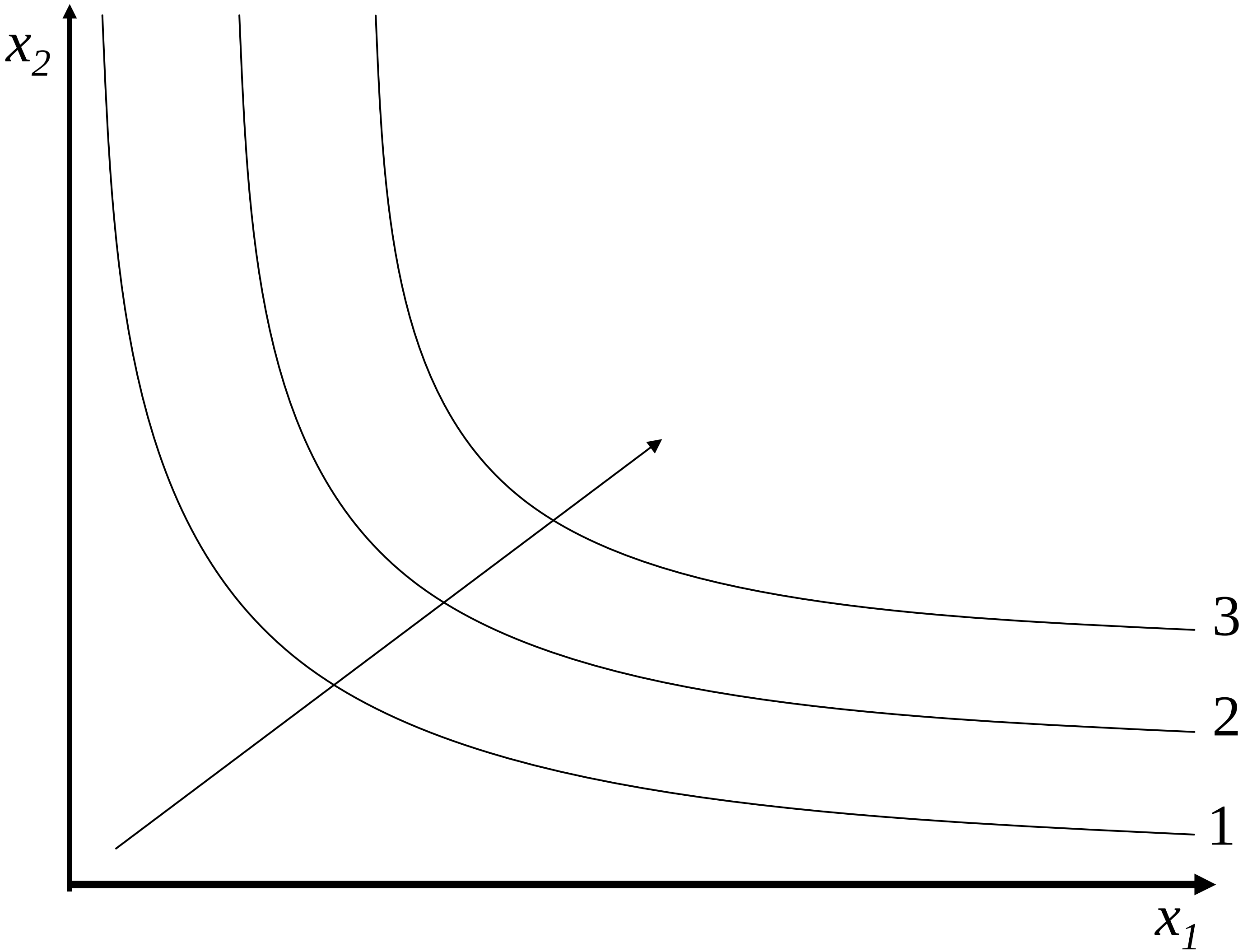


Convexidad: si $x^1, x^2 \in \Re^n_+$ son tales que $x^1 \succsim x^2 \Rightarrow$ $\forall \lambda \in (0,1) \quad \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2 \succsim x^2$

Cuando se da el supuesto de convexidad pero no de convexidad fuerte, la elección del consumidor no tiene por que ser única. Gráficamente significa que las curvas de indiferencia tienen tramos lineales.


x_2
x_1

Función de Utilidad: Si asignamos un número real a cada curva de indiferencia obtendremos una función de utilidad.



Función de utilidad: La función $u:\Re_+^n \to \Re$ representa las preferencias $\succsim$ si $x^1 \sim x^2 \Leftrightarrow u(x^1) = u(x^2)$ y $x^1 \succ x^2 \Leftrightarrow u(x^1) > u(x^2)$.

La utilidad es ordinal (no cardinal): Cualquier transformación monótona de una función de utilidad representa las mismas preferencias. Si la función $u:\Re_+^n \to \Re$ representa las preferencias $\succsim$ y $g:\Re \to \Re$ es una función estrictamente creciente, entonces g(u(.)) representa las mismas preferencias $\succsim$**.**

Propiedades de la función de utilidad: Dados los axiomas que hemos supuesto la función de utilidad tiene que tener las siguientes propiedades:

- Estrictamente creciente (monotonicidad fuerte)
- Es estrictamente cuasicóncava (estricta convexidad)

Sea $S \subset \Re^n$ un conjunto convexo.

Una función $f : S \rightarrow \Re$ es **cóncava** si $\forall x, y \in S$, $\forall \lambda \in (0,1)$, $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. Es **estrictamente cóncava** si $\forall x, y \in S, x \neq y$, $\forall \lambda \in (0,1)$, $f(\lambda x + (1-\lambda) y) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

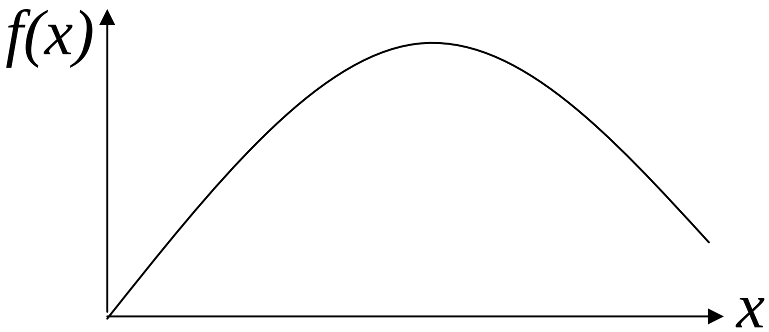
Una función $f : S \rightarrow \Re$ es **convexa** si $\forall x, y \in S$, $\forall \lambda \in (0,1)$, $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. Es **estrictamente convexa** si $\forall x, y \in S, x \neq y$, $\forall \lambda \in (0,1)$, $f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

Sea $S \subset \Re^n$ un conjunto convexo.

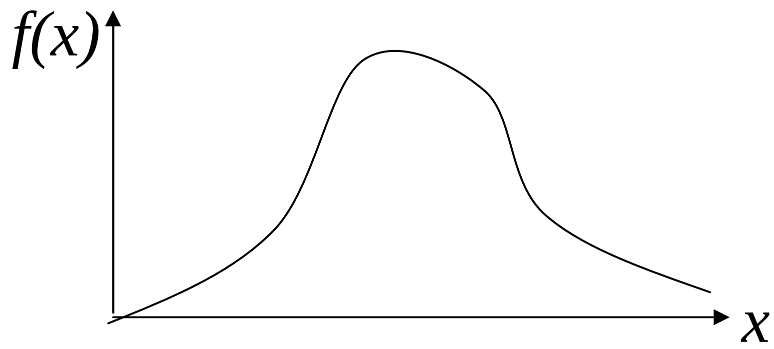
Una función $f: S \to \Re$ es **cuasicóncava** si $\forall x, y \in S$, $\forall \lambda \in (0,1)$, $\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq \min\{f(x), f(y)\}$.

Una función *f*: $f: S \to \Re$ es **cuasicóncava** si y sólo si $\forall a \in \Re$ el conjunto de contorno superior $\{x \in S \,/\, f(x) \geq a\}$ es convexo.

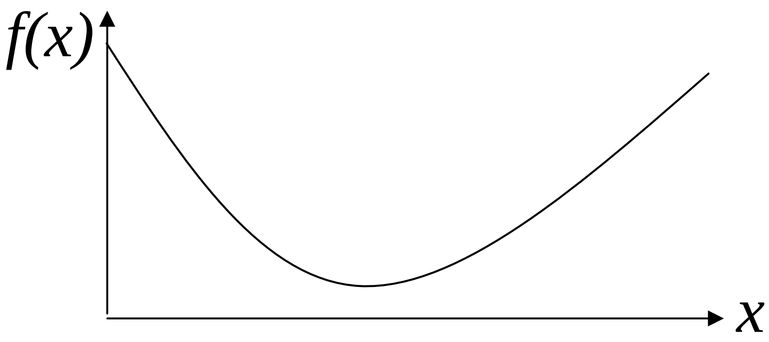
Función Cóncava



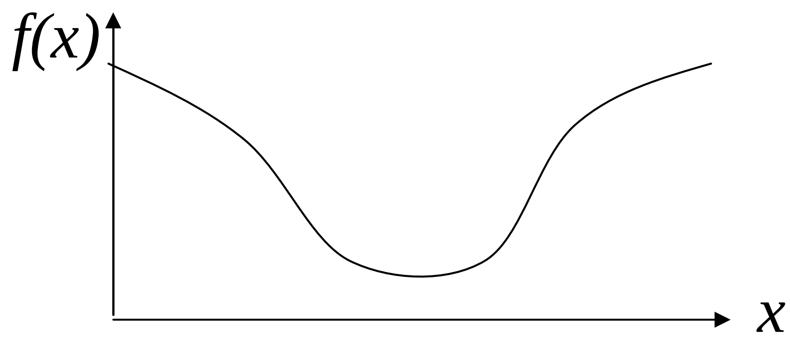
Función Cuasi-cóncava



Función Convexa



Función Cuasi-comvexa



Sea $S \subset \Re^n$ un conjunto convexo y $f : S \to \Re$ una función estrictamente cuasicóncava. Considere el problema de maximización $\max_{x \in S} f(x)$. Si este problema de maximización tiene solución, esta solución es única.

$$\max_{x} f(x)$$

$$s.a.\ g_j(x) \leq 0 \qquad j = 1,..,k$$

Definamos la función Lagrangiana:

$$L(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j(x)$$

Condiciones necesarias para que x^* sea un óptimo:

$$\frac{\partial L(x^*)}{\partial x_i} = 0$$

$$\lambda_j g_j(x) = 0$$

$$\min_x f(x)$$

$$s.a.\ g_j(x) \leq 0 \qquad j = 1,..,k$$

Función Lagrangiana:

$$L(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j(x)$$

Restricción presupuestaria: significa que el consumidor no puede gastar más que su renta (m).

$$\underbrace{p_1\, x_1}_{\text{gasto en 1}} + \underbrace{p_2\, x_1}_{\text{gasto en 2}} + \ldots + \underbrace{p_n\, x_n}_{\text{gasto en n}} \leq m$$

Usando notación vectorial: $\underbrace{p}_{1\times n}\underbrace{x}_{n\times 1} \leq m$

La restricción presupuestaria define el <u>conjunto presupuestario</u>, que son todas aquellas combinaciones de bienes que puede comprar el consumidor con su renta o gastando menos que su renta. $\left\{x \in \Re^n_+ \,/\, px \leq m\right\}$

Recta balance: representación gáfica de todas aquellas combinaciones de bienes en que el consumidor gasta toda su renta. En el caso de dos bienes:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \Leftrightarrow x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$$

Recta balance: representación gáfica de todas aquellas combinaciones de bienes en que el consumidor gasta toda su renta. En el caso de dos bienes:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \Leftrightarrow x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$$

Máxima cantidad de bien 2 que puede comprar el consumidor

Recta balance: representación gáfica de todas aquellas combinaciones de bienes en que el consumidor gasta toda su renta. En el caso de dos bienes:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \Leftrightarrow x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$$

Pendiente recta balance

http://bit.ly/8l8DDu

Fernando Perera-Tallo

$\frac{p_1}{p_2}$ = precio relativo del bien uno con respecto al bien 2

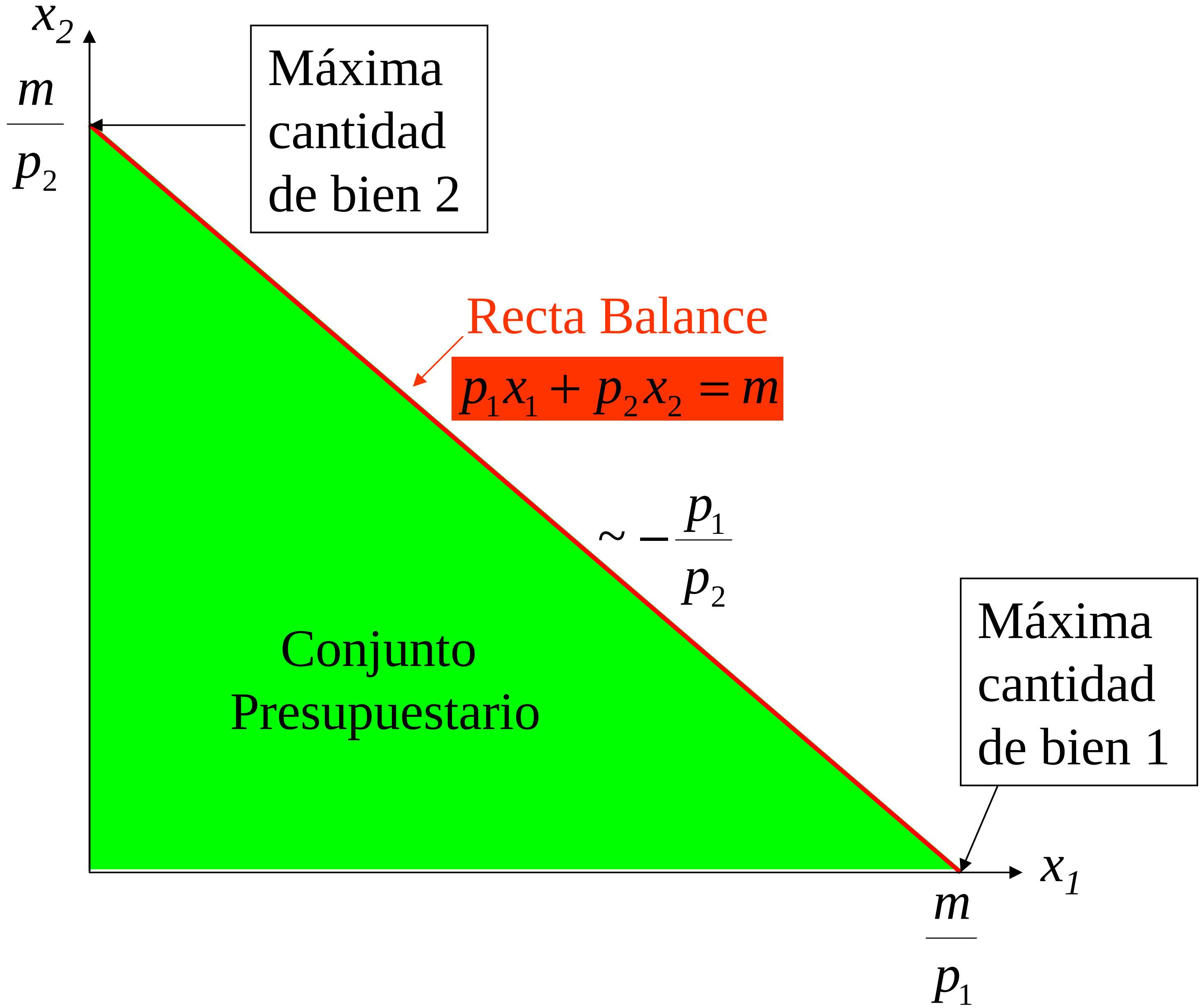
= número de unidades a las que hay que renunciar de bien 2 para comprar una unidad adicional de bien 1.

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \Leftrightarrow x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$$

Reducción de la compra del bien 2 para aumentar en una unidad la compra de bien 1:

$$\Delta x_2 = -\frac{p_1}{p_2}$$

Restricción presupuestaria



Toma de decisiones de los consumidores: Los consumidores eligen aquella cesta de consumo que es preferida a todas las demás de su conjunto presupuestario. Es decir, elige la cesta de consumo que maximiza su función de utilidad:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x} & u(x) \\ s.a: & px \leq m \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Supuesto: La función de utilidad es un función continua y diferenciable de segundo orden, estrictamente cuasicóncava y estrictamente creciente.

El conjunto presupuestario es compacto cuando todos los precios son positivos (p»0) y la función de utilidad es continua $\Rightarrow$ Según el Teorema de Weierstrass el problema de maximización de la utilidad tiene solución cuando p»0.

El conjunto presupuestario es convexo y la función de utilidad es estrictamente cuasicóncava $\Rightarrow$ El problema de maximización de la utilidad tiene solución única para p»0.

Lagrangiano

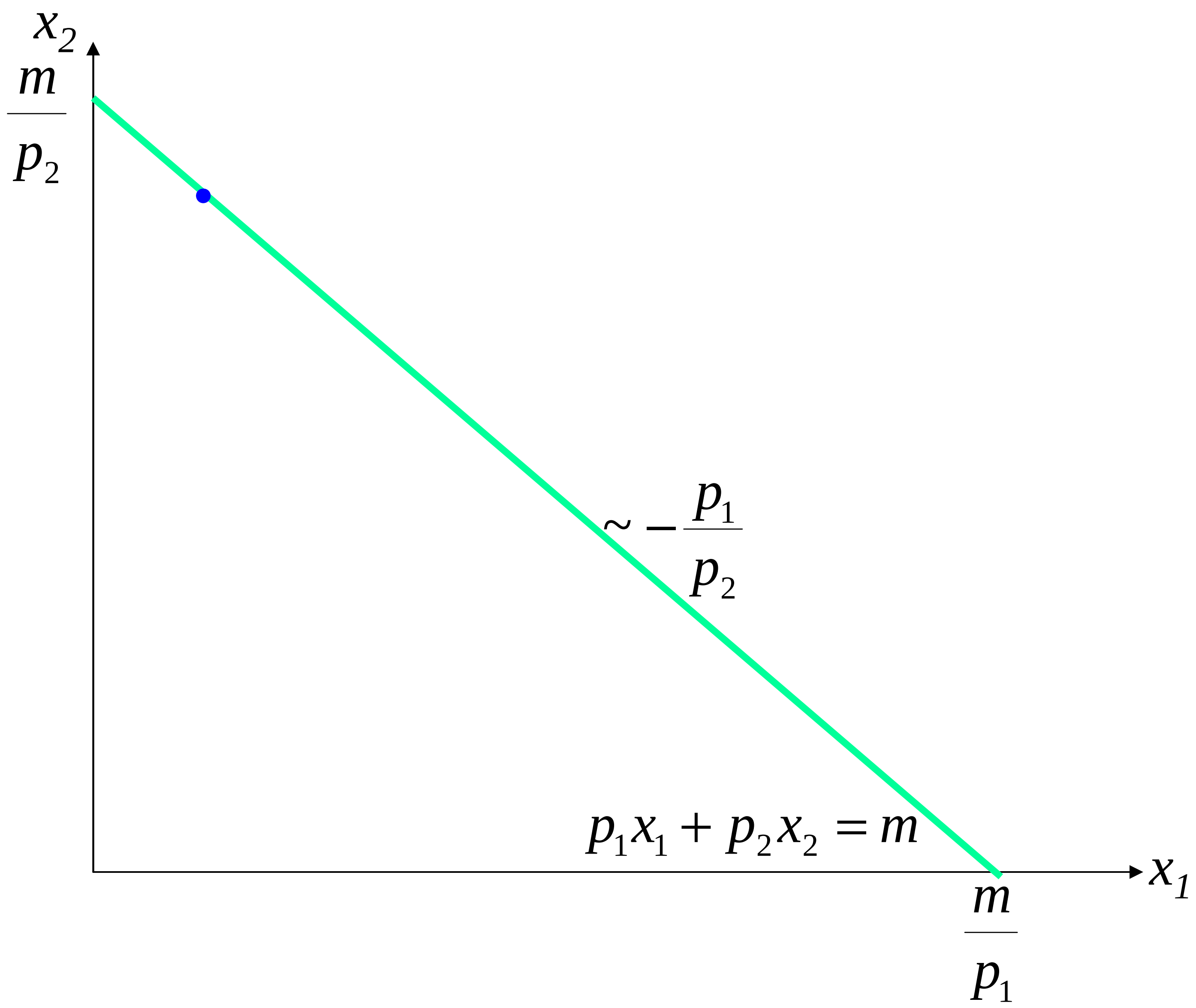
$$L = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda\left[m - p_1 x_1 - p_2 x_2 - \ldots - p_n x_n\right] +$$

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_v x_n$$

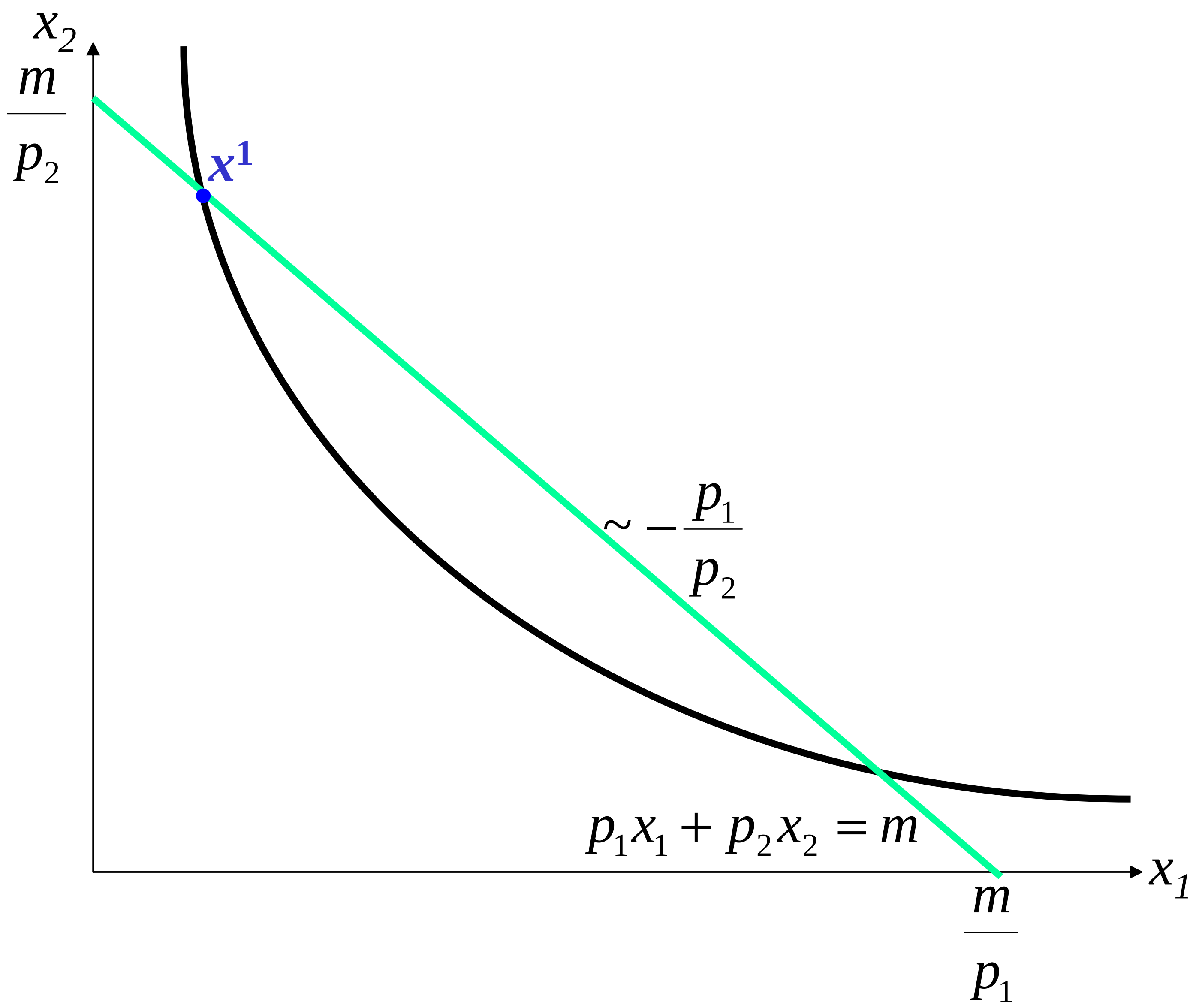
Condiciones de primer orden para solución interior ($x \gg 0$):

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_j} - \lambda p_j = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow RMS_{i,j}(x) = \frac{\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_j}} = \frac{p_i}{p_j}$$

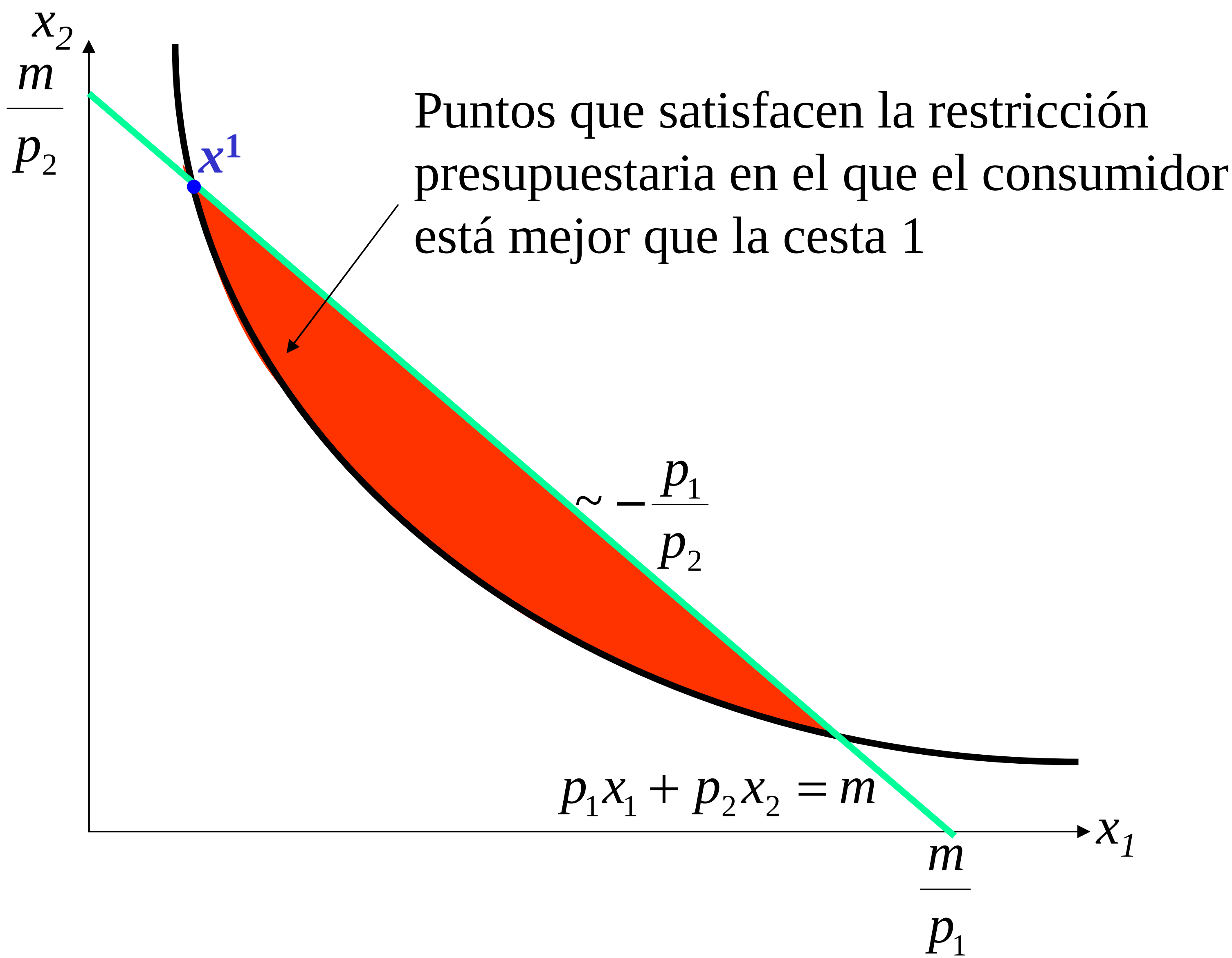
Elección del Consumidor



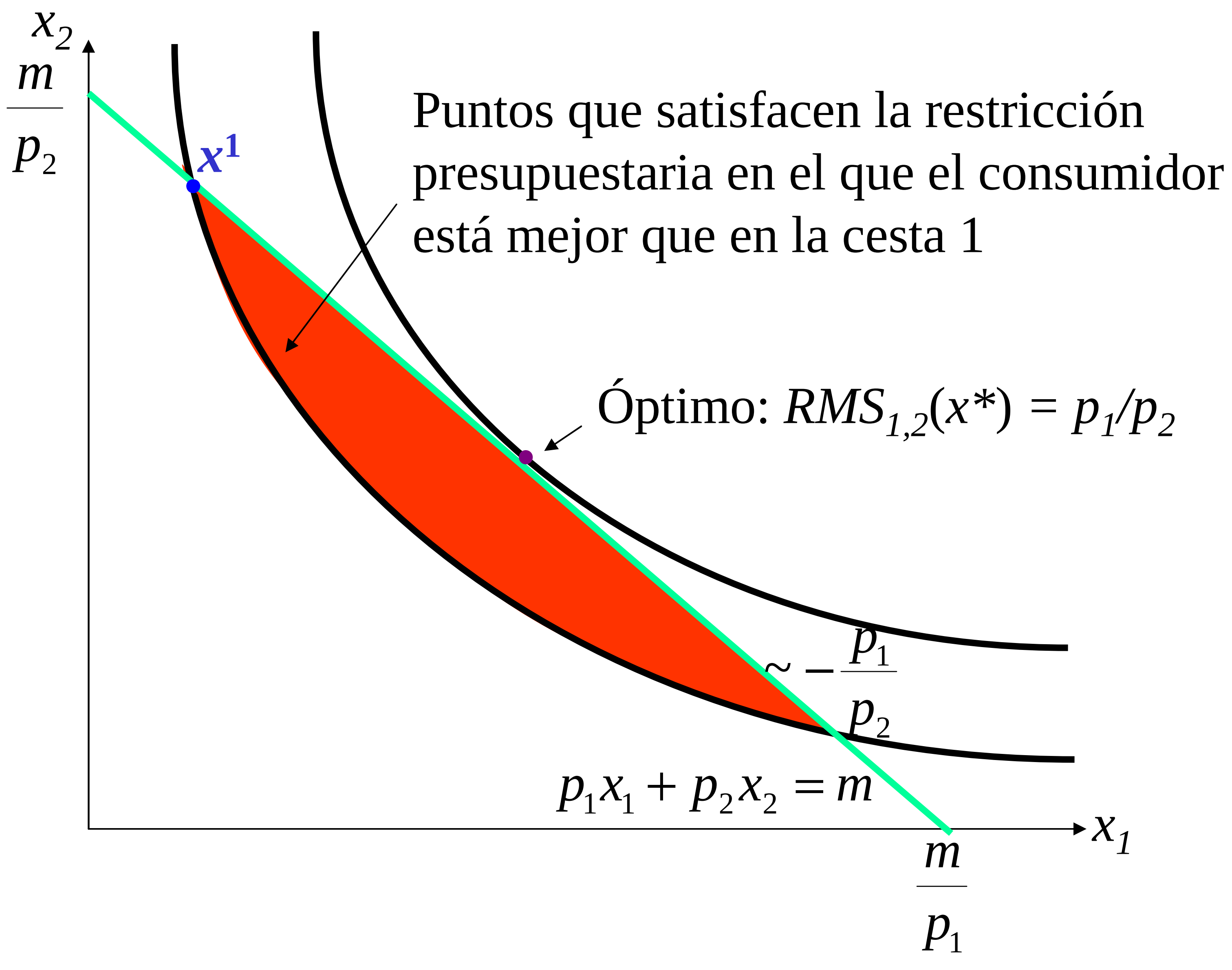
Elección del Consumidor



Elección del Consumidor



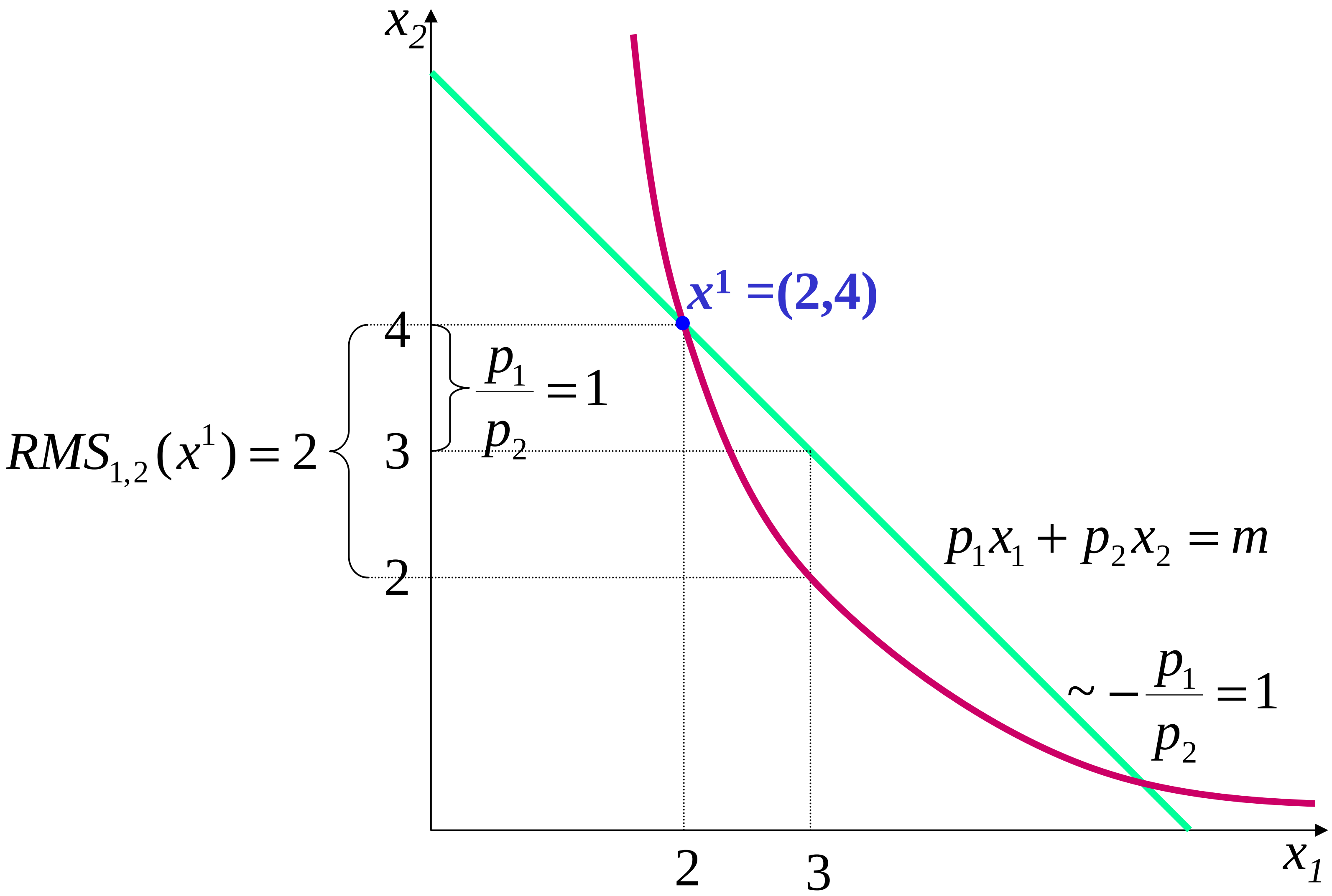
Elección del Consumidor



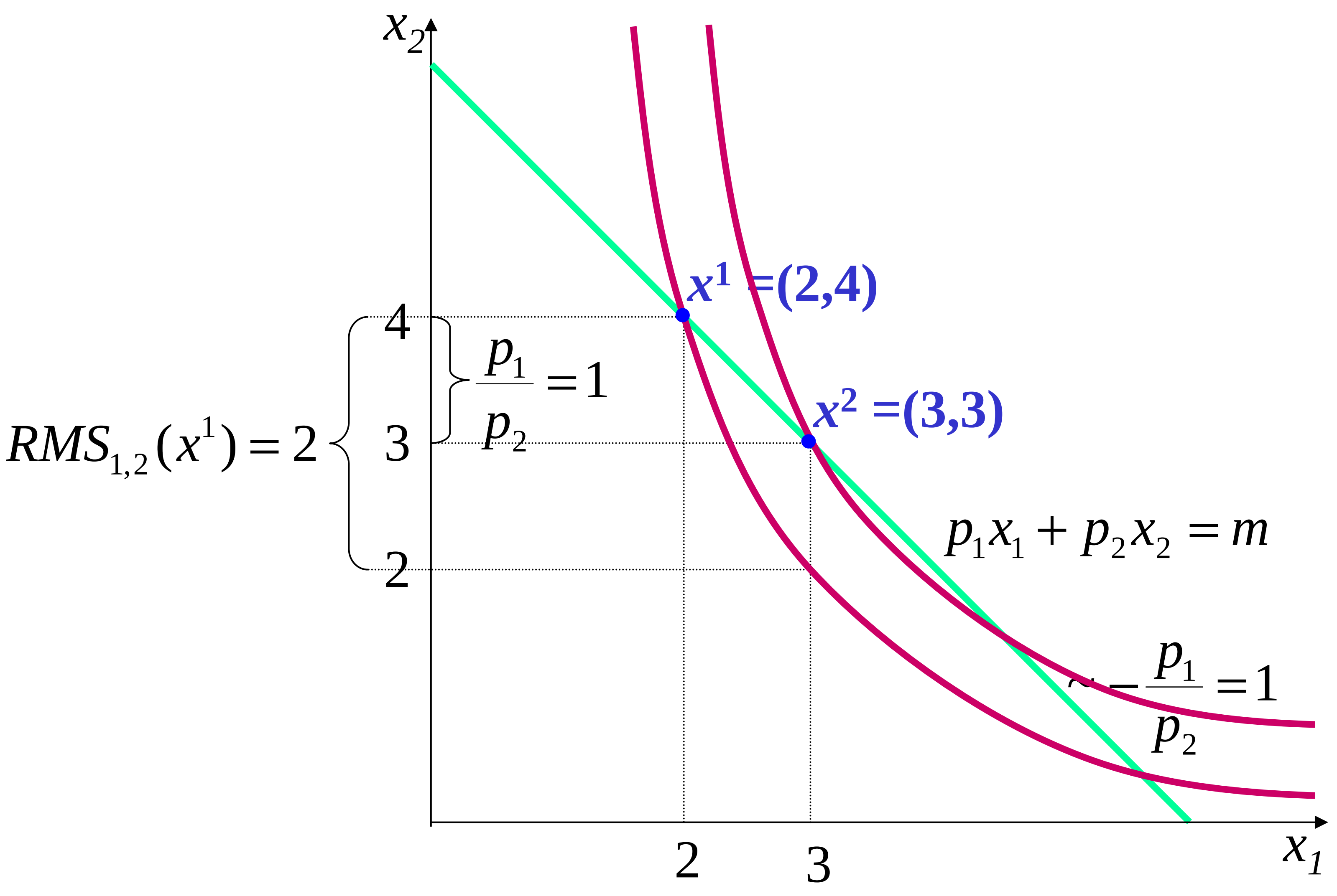
- Si la RMS es mayor que el precio relativo se puede renunciar a una cantidad de bien 2 para comprar una unidad de bien 1 menor que la que dejaría indiferente al consumidor. Por tanto comprando una unidad adicional de bien uno, el consumidor sale ganando.

- Si la RMS es menor que el precio relativo se puede aumentar la compra de bien 2 renunciando a una unidad de bien 1 en una cuantía mayor de la cantidad que dejaría indiferente al consumidor. Por tanto comprando una unidad adicional de bien uno, el consumidor sale ganando.

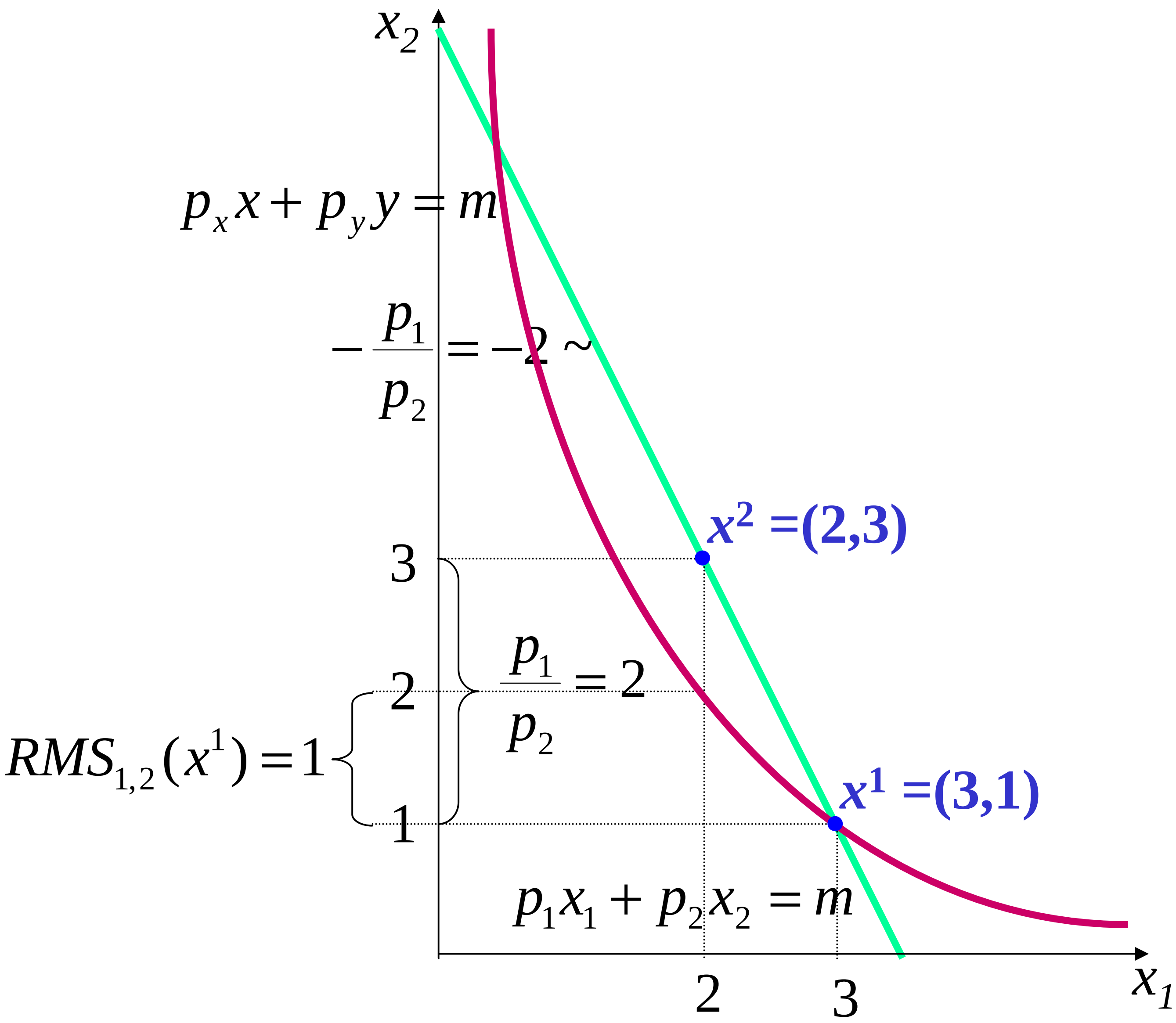
Si la RMS es mayor que el precio relativo, aumentando en una unidad la compra del bien 1 se aumenta la utilidad



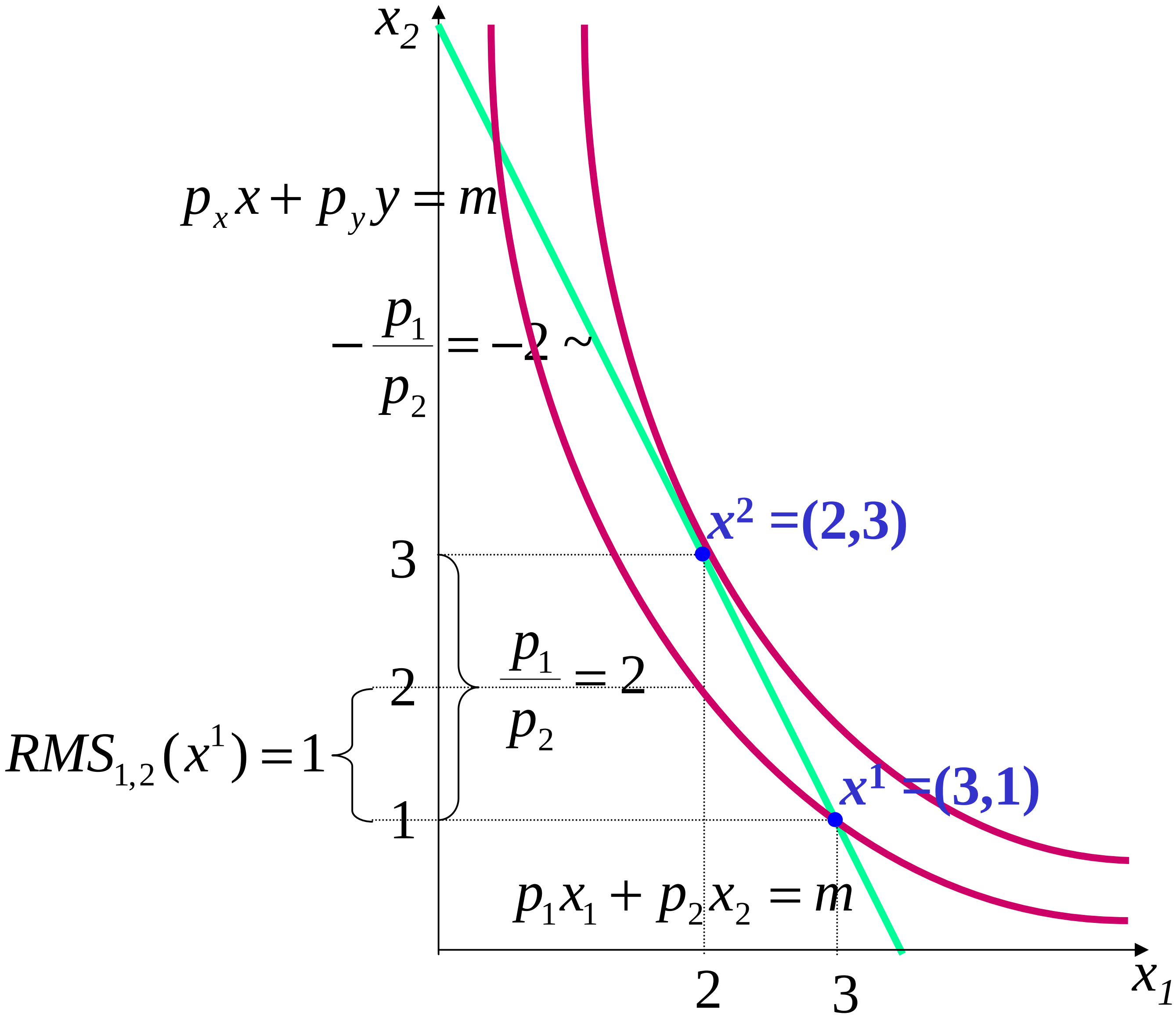
Si la RMS es mayor que el precio relativo, aumentando en una unidad la compra del bien 1 se aumenta la utilidad



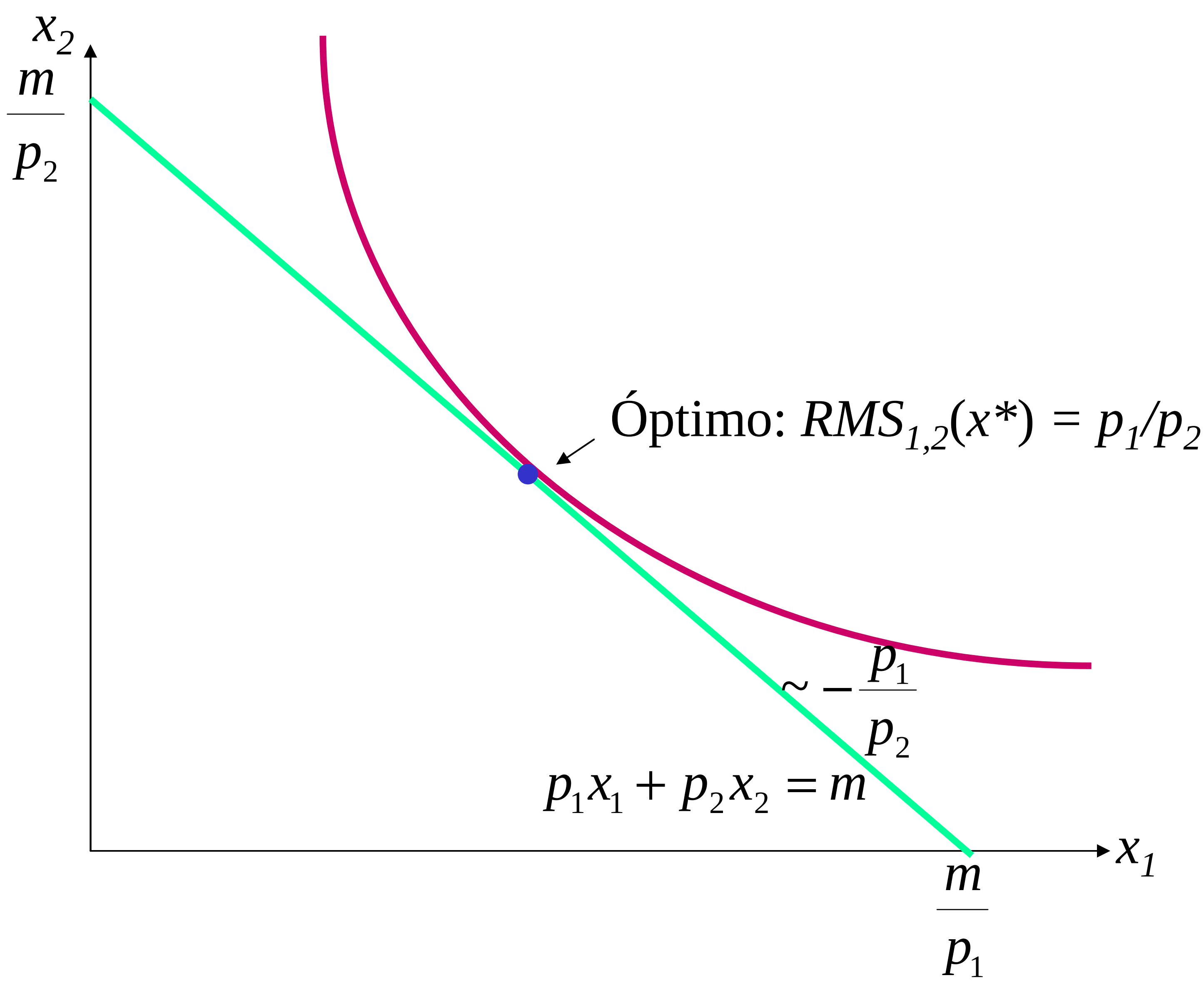
Si la RMS es menor que el precio relativo, disminuyendo en una unidad la compra del bien 1 se aumenta la utilidad



Si la RMS es menor que el precio relativo, disminuyendo en una unidad la compra del bien 1 se aumenta la utilidad



En el punto óptimo la RMS se tiene que igualar al precio relativo



Los consumidores maximizan su utilidad cuando la relación marginal de substitución coincide con el precio relativo de los bienes:

$$RMS_{1,2}(x) = \frac{p_1}{p_2}$$

En dicho punto la curva de indiferencia es tangente a la recta balance. Esto implica que para alcanzar un nivel de utilidad mayor se tendría que optar por un punto que no cumpla la restricción presupuestaria, que no es factible

Lagrangiano

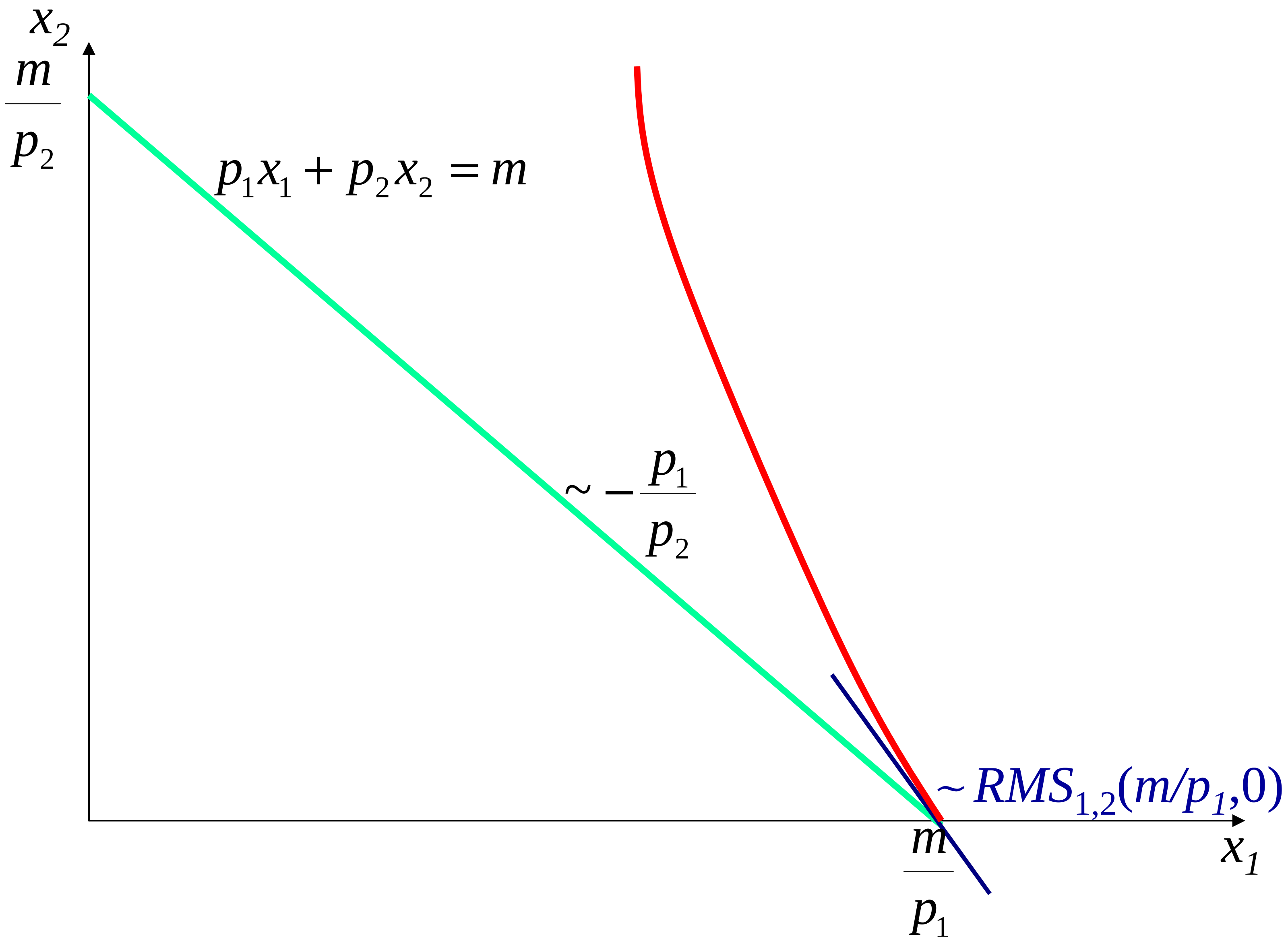
$$L = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda[m - p_1x_1 - p_2x_2 - \ldots - p_nx_n] +$$
$$\mu_1x_1 + \mu_2x_2 + \ldots + \mu_v x_n$$

Condiciones de primer orden para solución esquina ($x_i>0$, $x_j=0$):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0 \Rightarrow \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = \lambda p_i \\ \frac{\partial L}{\partial x_j} &= \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} - \lambda p_j + \mu_j = 0 \Rightarrow \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = \lambda p_j - \mu_j \leq \lambda p_j \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow RMS_{i,j}(x) = \frac{\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_j}} \geq \frac{p_i}{p_j}$$

Solución Esquina



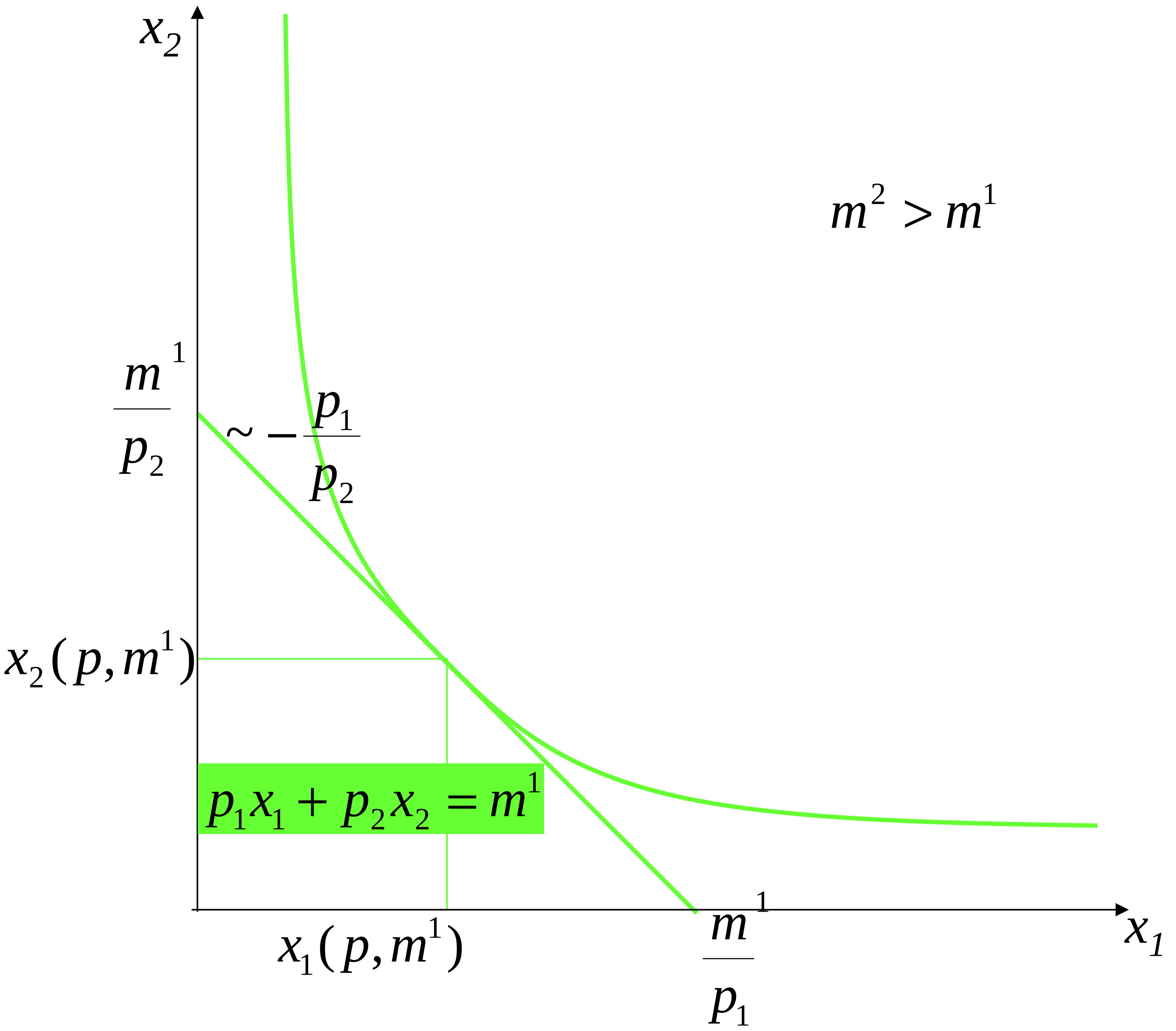
Función indirecta de utilidad: Determina el máximo nivel de utilidad que se alcanza dados un vector de precios y una renta:

$$\begin{aligned} V(p,m) = \quad & \max_{x} \quad u(x) \\ & s.a \quad px \leq m \\ & \qquad\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

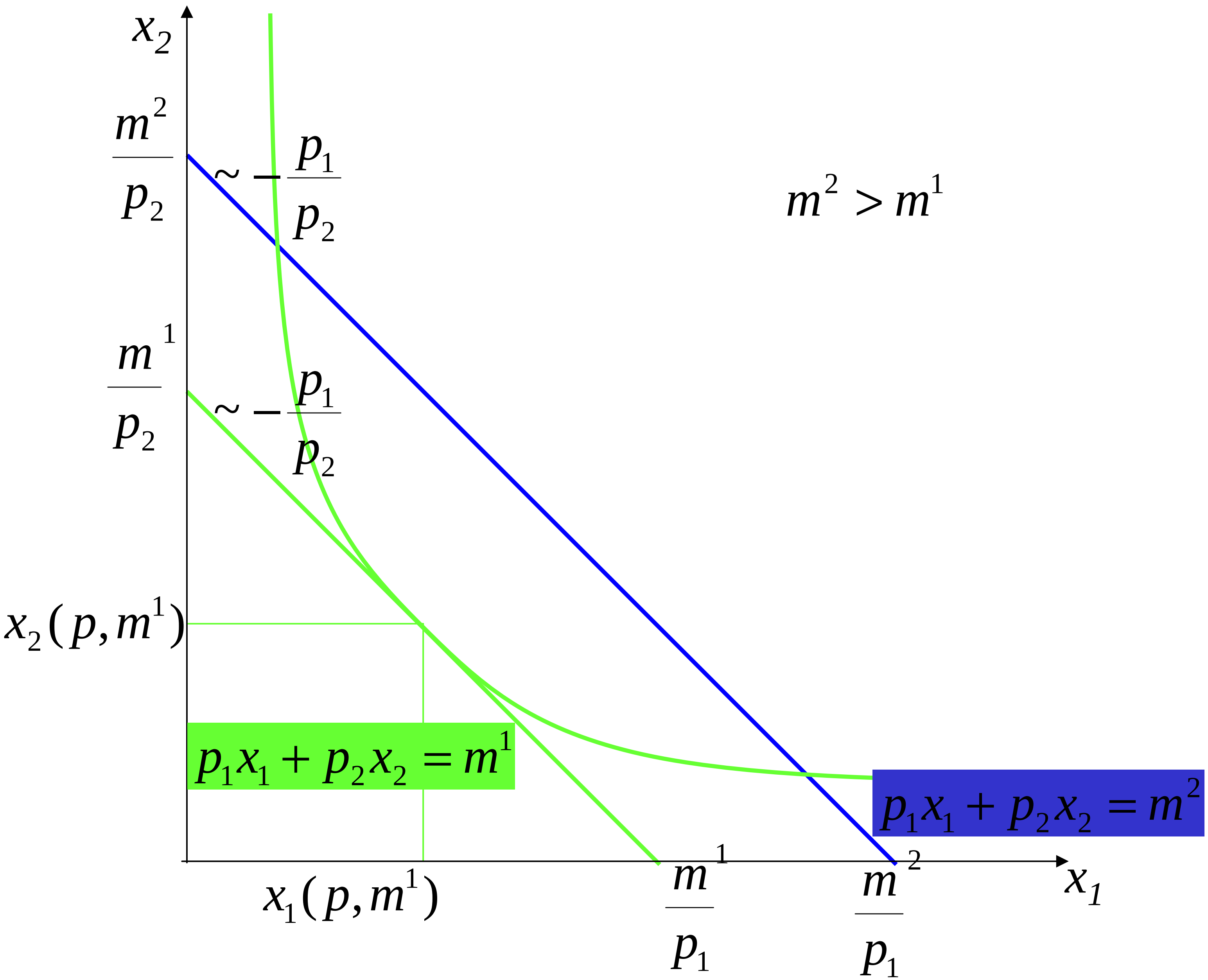
Demanda Marshaliana u observada (o simplemente demanda) individual: es la cesta de consumo preferida por una economía doméstica de entre las que satisfacen la restricción presupuestaria:

$$\begin{aligned} x(p,m) = \quad & \arg\max_{x} \quad u(x) \\ & s.a \quad px \leq m \\ & \qquad\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

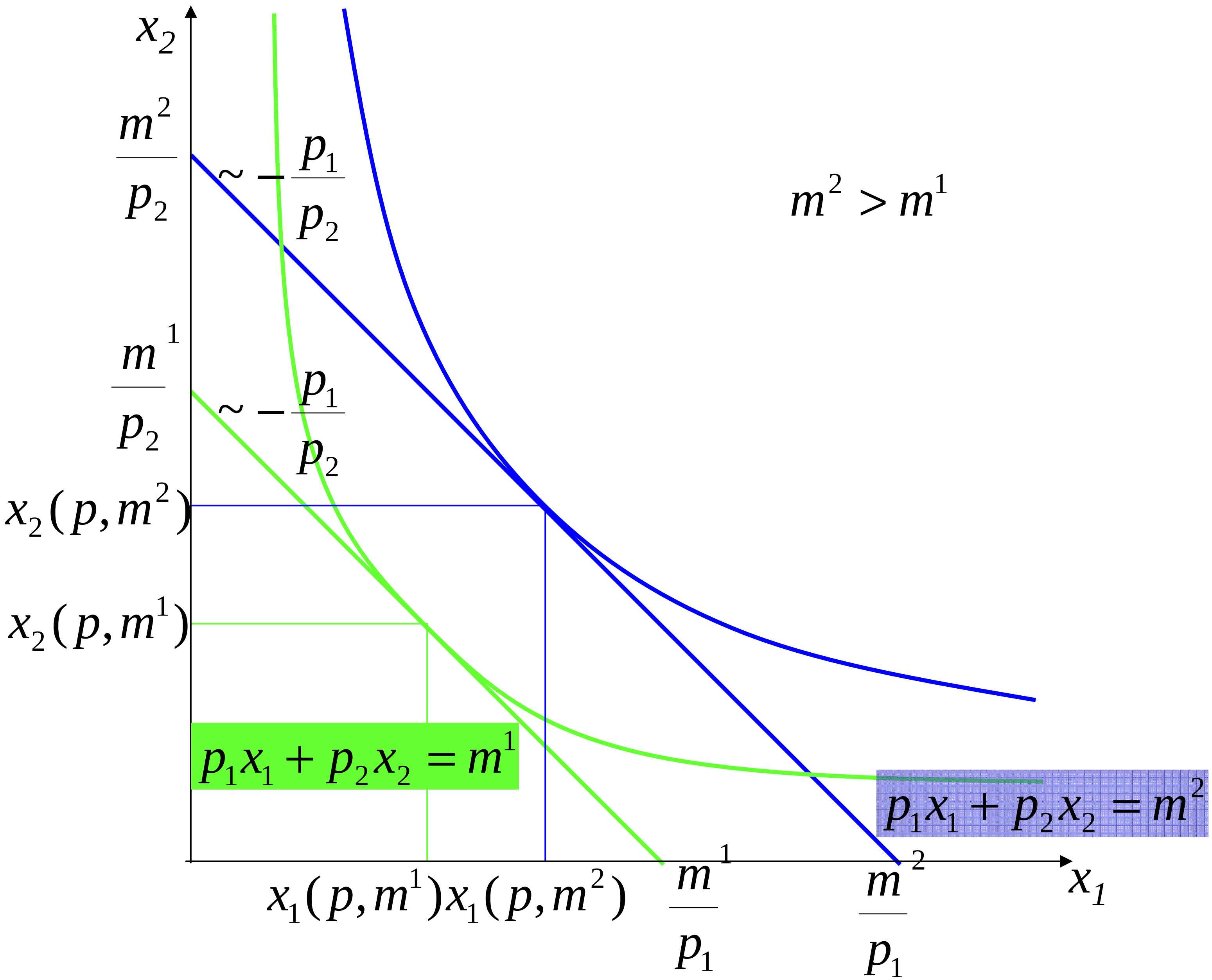
Efecto del aumento de renta (bienes normales)



Efecto del aumento de renta (bienes normales)



Efecto del aumento de renta (bienes normales)



<u>Bienes normales</u>: bienes que al aumentar (disminuir) la renta aumenta (disminuye) su demanda:

$$\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m} > 0$$

<u>Bienes inferiores</u>: bienes que al aumentar (disminuir) la renta disminuye (aumenta) su demanda.

$$\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m} < 0$$

Un bien nunca puede ser inferior para todos los niveles de renta.

Todos los bienes no pueden ser inferiores simultáneamente:

$$p_1 x_1(p,m) + p_2 x_2(p,m) + \ldots + p_n x_n(p,m) = m$$

$$p_1 \frac{\partial x_1(p,m)}{\partial m} + p_2 \frac{\partial x_2(p,m)}{\partial m} + \ldots + p_n \frac{\partial x_n(p,m)}{\partial m} = 1$$

Elasticidad demanda renta: se define como la variación porcentual de la cantidad demandada de un bien por un consumidor ante la variación de su renta dividido por la variación porcentual de la renta:

$$\varepsilon_{i,m}(p,m) = \frac{\text{Variacion porcentual cantidad demandada de i}}{\text{Variacion porcentual renta}} =$$

$$\frac{\Delta x_i / x_i}{\Delta m / m} = \frac{\Delta x_i}{\Delta m}\frac{m}{x_i} \approx \frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m}\frac{m}{x_i} < 0$$

La elasticidad renta mide si la cantidad demandada reacciona mucho o poco ante variaciones de la renta.

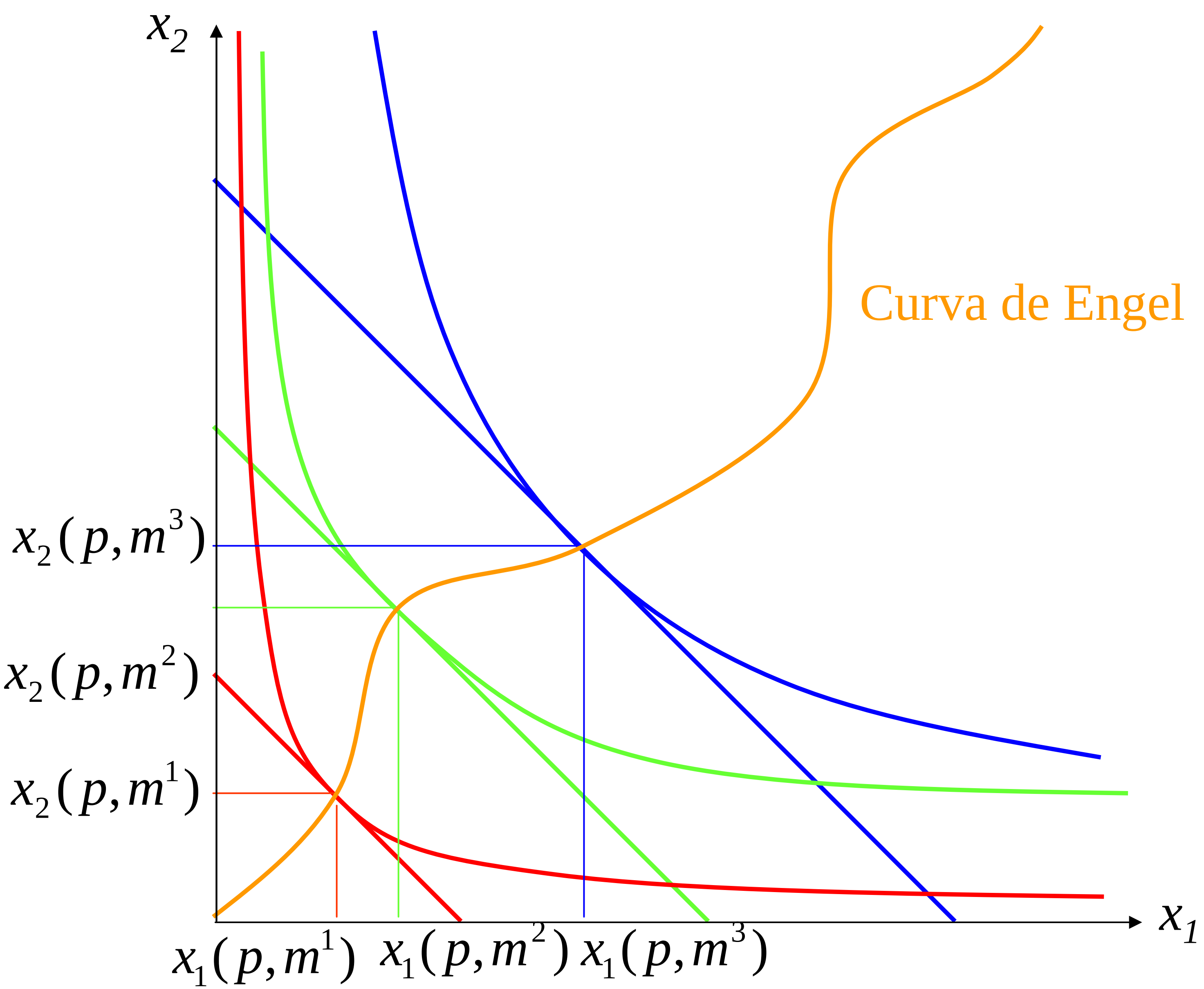
Si por ejemplo la elasticidad renta de un bien es 3, esto significa que cuando la renta aumenta un 1% la demanda de ese bien aumenta un 3%.

La elasticidad renta de un bien normal es positiva, mientras que la de un bien inferior es negativa.

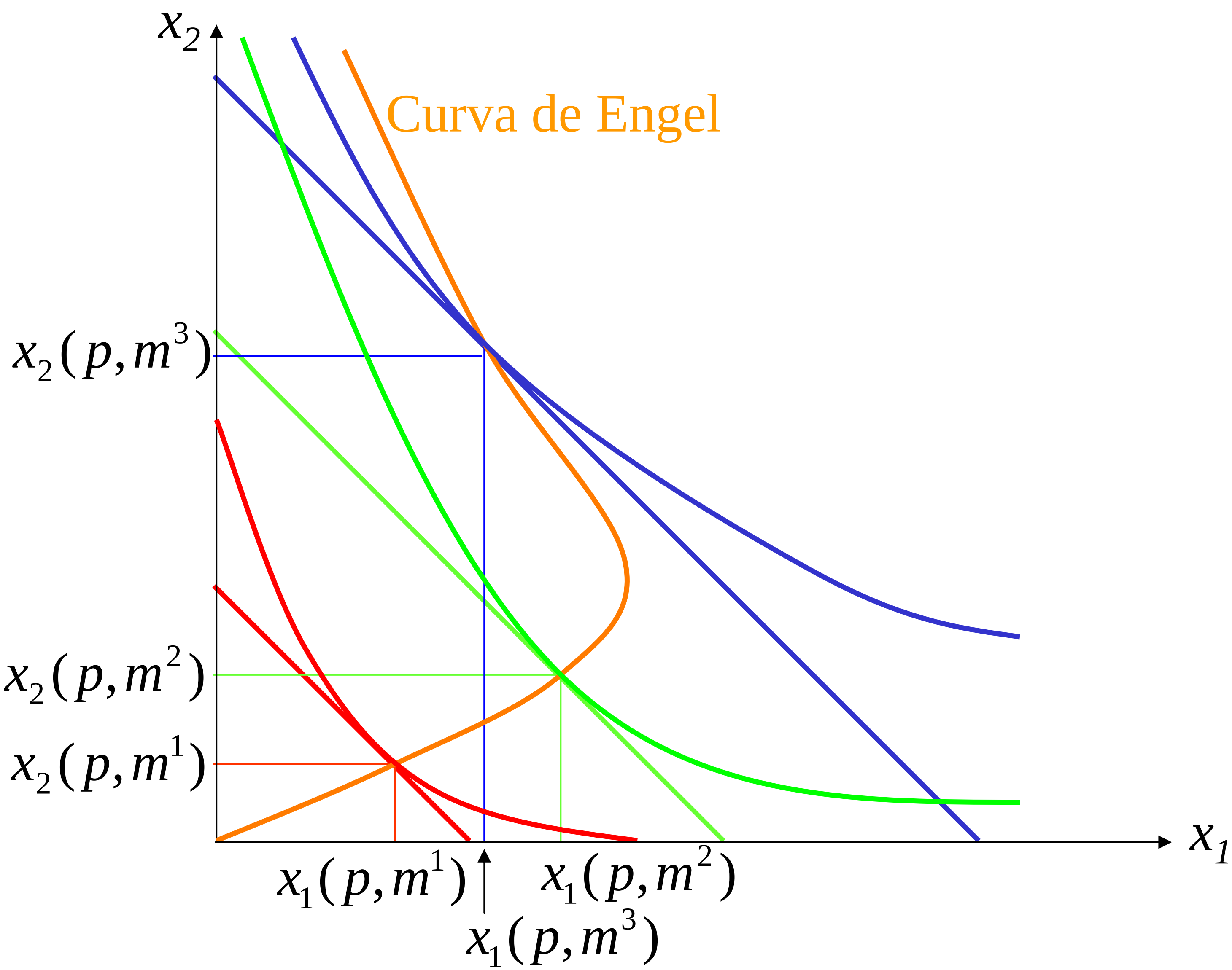
Curva de Engel: Dados unos precios relativos, la curva de Engel nos dice la combinaciones óptimas de bienes para esos precios relativos y distintos niveles de renta.

La curva de Engel tendrá pendiente positiva si ambos bienes son normales y negativa si uno de los bienes es inferior.

Efecto del aumento de renta (bienes normales)



El bien 1 es un bien inferior a partir de un nivel de renta



Cono: El conjunto $A \subset \Re^n$ se dice que es un **cono** si y sólo si $\forall x \in A, \forall \lambda \in \Re_{++}$ $\lambda x \in A$. A nivel gráfico esto es lo mismo que decir que un conjunto es un cono si cogemos cualquier elemento de este conjunto y trazamos una línea que pasa por ese punto y por el origen, todos los puntos de esa línea pertenece a dicho conjunto.

Sea $S \subset \Re^n$ es un cono. Una función $f : S \to \Re$ se dice que es **homogénea de grado h** si $\forall x \in S, \forall \lambda \in \Re_{++}$, $f(\lambda x) = \lambda^h f(x)$.

Las derivadas de la funciones homogéneas de grado h son homogéneas de grado h-1:

$$f(\lambda x) = \lambda^h f(x)$$

$$\lambda \frac{\partial f(\lambda x)}{\partial x_i} = \lambda^h \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial f(\lambda x)}{\partial x_i} = \lambda^{h-1} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

Sea $S \subset \Re^n$ es un cono. Una función $f : S \to \Re$ se dice que es **homotética** si es una transformación monótona de una función homogénea de grado uno, es decir, si existen dos funciones $h : S \to \Re$, $g : \Re \to \Re$ tales que $h(.)$ es homogénea de grado uno y $g(.)$ es estrictamente creciente y $f(x) = g(h(x))$.

El cociente de derivadas de la funciones homotéticas cuando está bien definido es homogéneas de grado 0:

$$\frac{\frac{\partial f(\lambda x)}{\partial x_i}}{\frac{\partial f(\lambda x)}{\partial x_j}} = \frac{\frac{\partial g(h(\lambda x))}{\partial h}\frac{\partial h(\lambda x)}{\partial x_i}}{\frac{\partial g(h(\lambda x))}{\partial h}\frac{\partial h(\lambda x)}{\partial x_j}} = \frac{\frac{\partial h(x)}{\partial x_i}}{\frac{\partial h(x)}{\partial x_j}} = \frac{\frac{\partial g(h(x))}{\partial h}\frac{\partial h(x)}{\partial x_i}}{\frac{\partial g(h(x))}{\partial h}\frac{\partial h(x)}{\partial x_j}} =$$

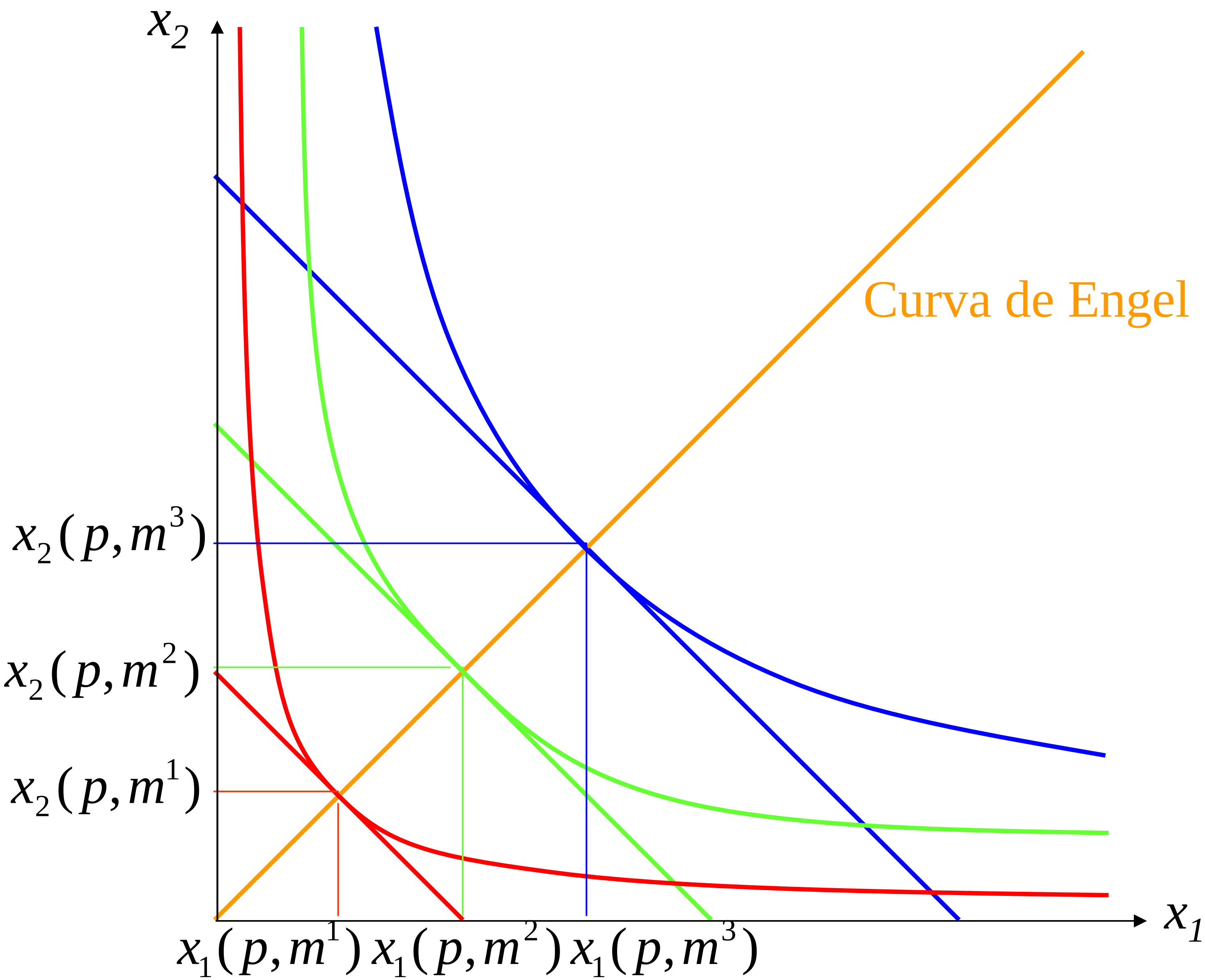
$$= \frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}}$$

Preferencias Homotética: cuando la RMS no cambia al duplicarse la cantidad de bienes:

$$RMS(x) = RMS(\lambda x) \quad \forall \lambda > 0$$

Esto implica que la curva de Engel es una linea recta que parte del origen.

Efecto del aumento de la renta:
Preferencias Homotéticas



Función de gasto: mínimo nivel de gasto necesario para alcanzar un nivel de utilidad:

$$
\begin{aligned}
e(p,u) = \quad & \min_{x} && px \\
& s.a && u(x) \geq u \\
& && x \geq 0
\end{aligned}
$$

Demanda Hicksiana o compensada: es la cesta de consumo que minimizaría el gasto necesario para alcanzar un cierto nivel de utilidad:

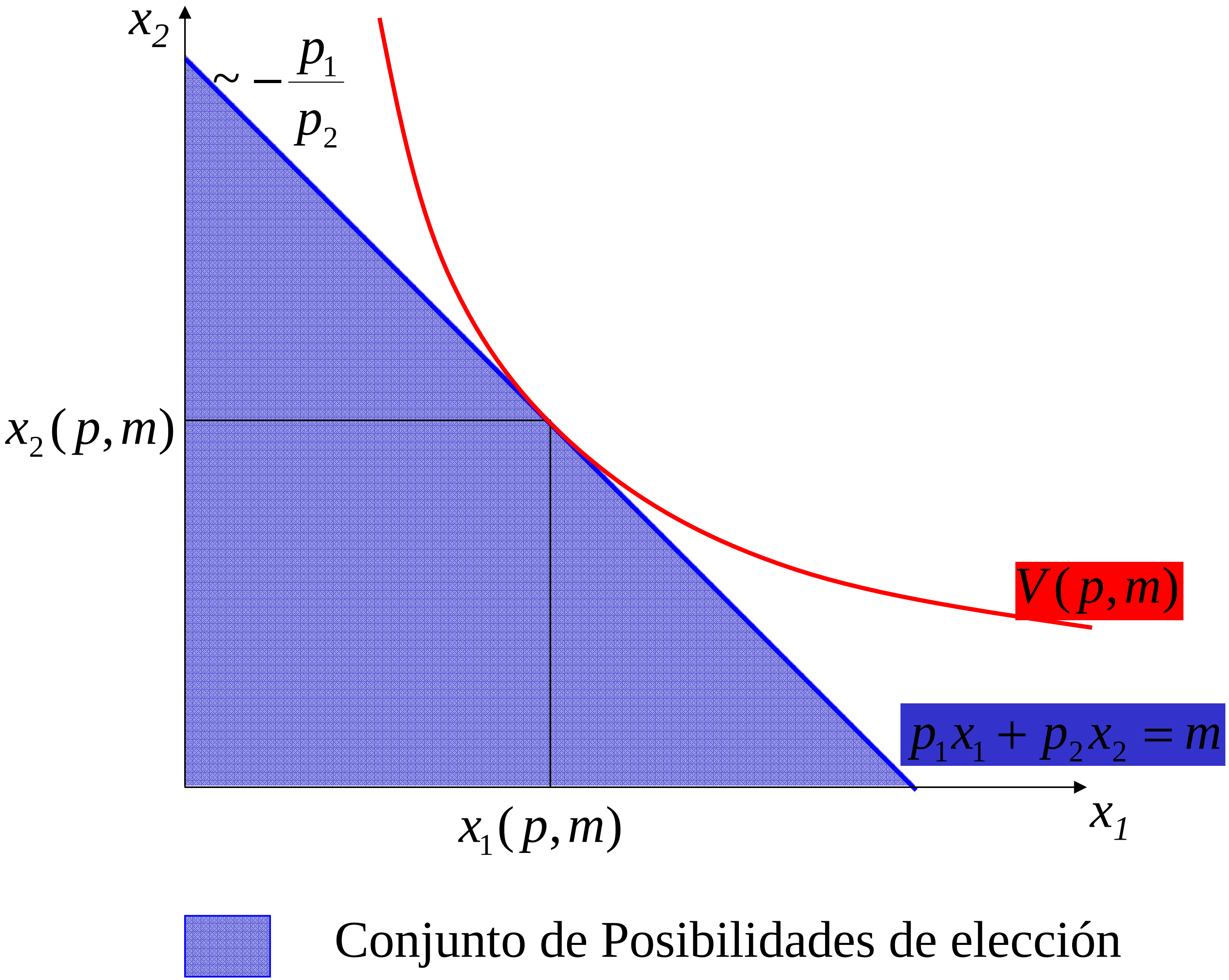
$$
\begin{aligned}
h(p,u) = \quad & \arg\min_{x} && px \\
& s.a && u(x) \geq u \\
& && x \geq 0
\end{aligned}
$$

Note que el problema de minimización del gasto se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & px \\ s.a: \quad & u(x) \geq u \\ & px^{*} \geq px \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

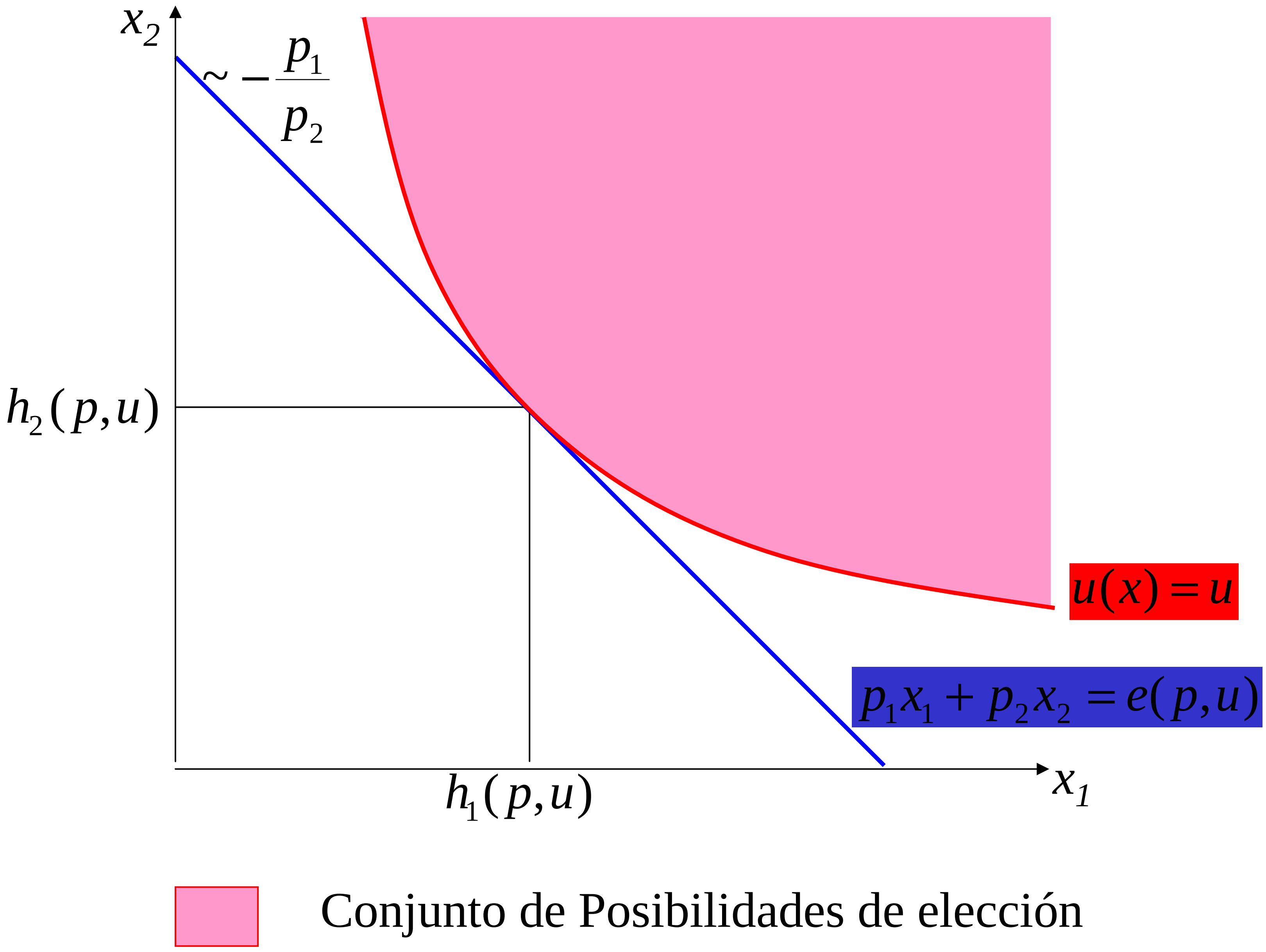
donde x^{*} es tal que $u(x^{*}) \geq u$. Por tanto el problema de minimización del gasto se define en un conjunto compacto. Esto implica, según el Teorema de Weierstrass, que este problema de optimización tiene solución.

Demanda Marshaliana



Conjunto de Posibilidades de elección

Demanda Hicksiana



Conjunto de Posibilidades de elección

Es fácil de demostrar las siguientes identidades (se propone al lector las demostraciones):

$$e(p,v(p,m)) = m$$

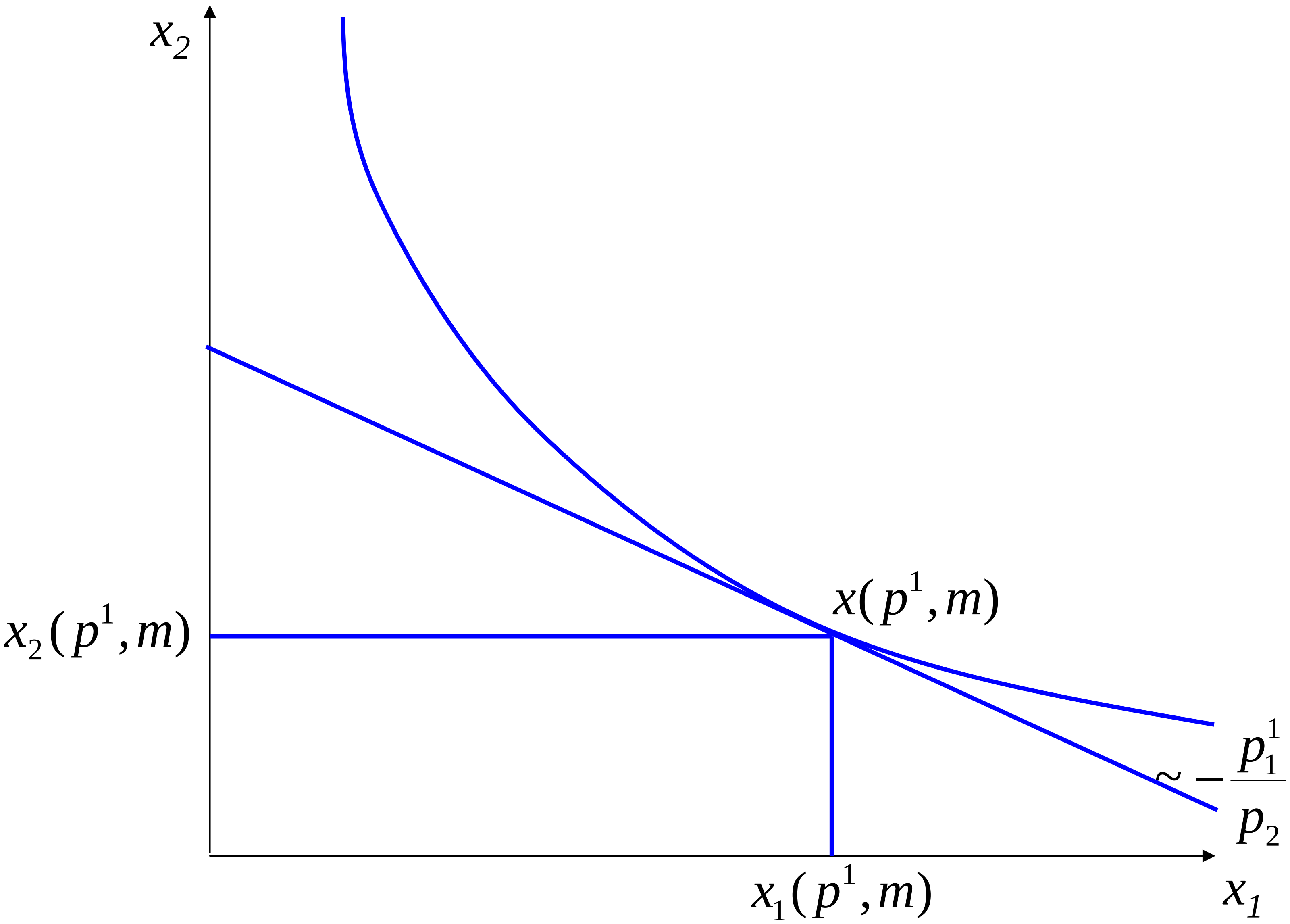
$$V(p,e(p,u)) = u$$

$$h(p,v(p,m)) = x(p,m)$$

$$x(p,e(p,u)) = h(p,u)$$

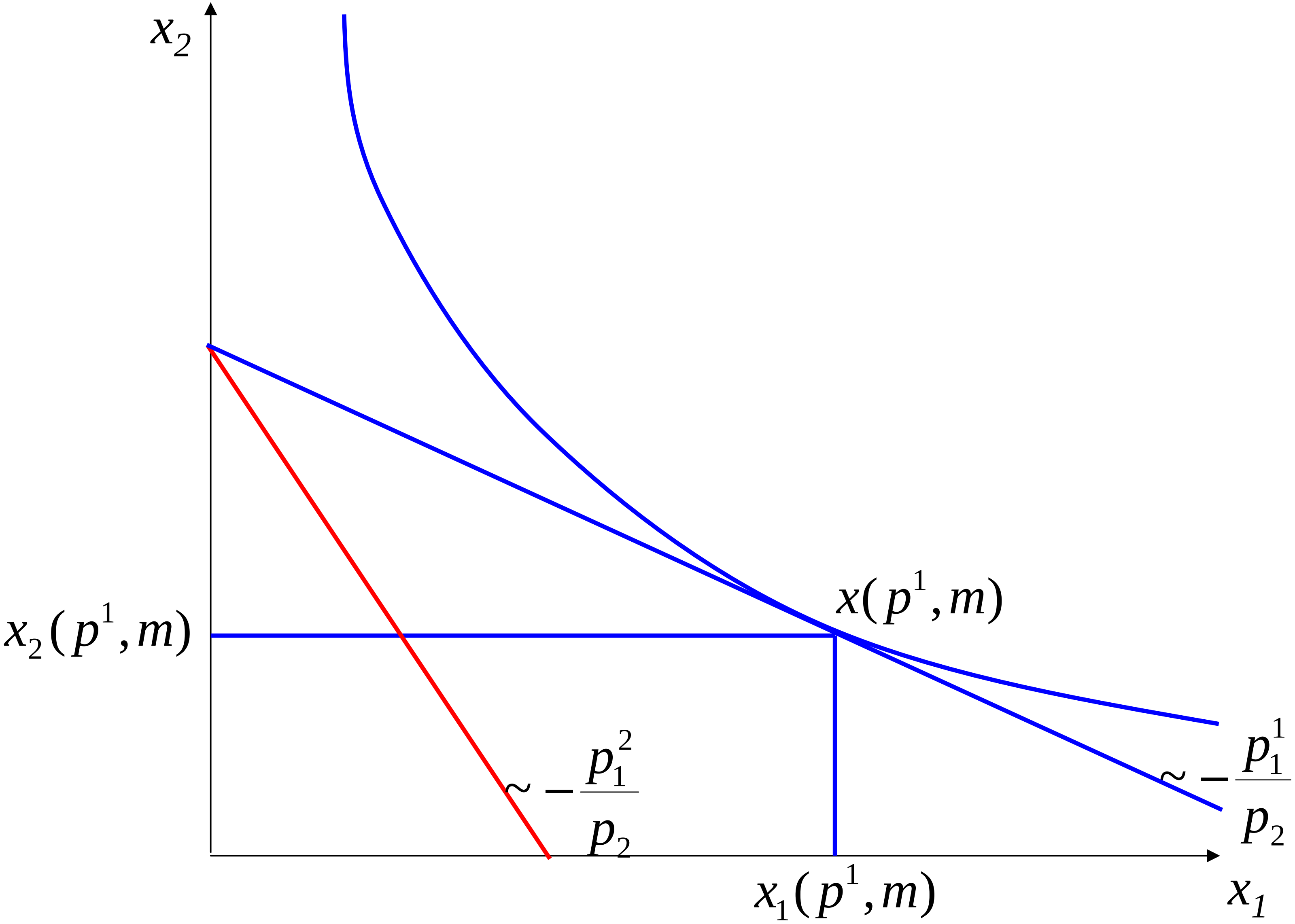
Efecto del aumento del precio del bien 1

$$p_1^2 > p_1^1, \quad p_2^2 = p_2^1 = p_2$$



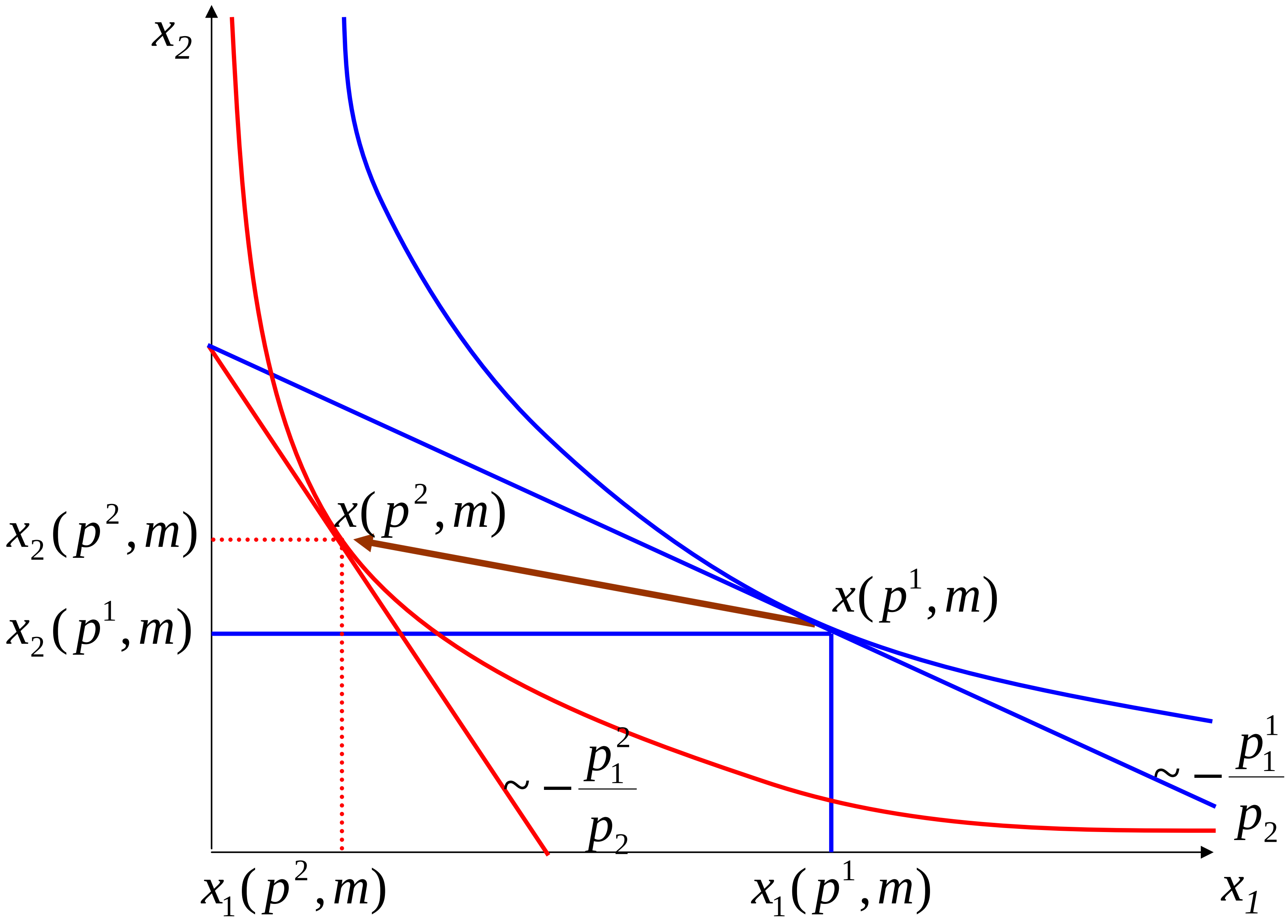
Efecto del aumento del precio del bien 1

$$p_1^2 > p_1^1, \quad p_2^2 = p_2^1 = p_2$$



Efecto del aumento del precio del bien 1

$$p_1^2 > p_1^1, \quad p_2^2 = p_2^1 = p_2$$



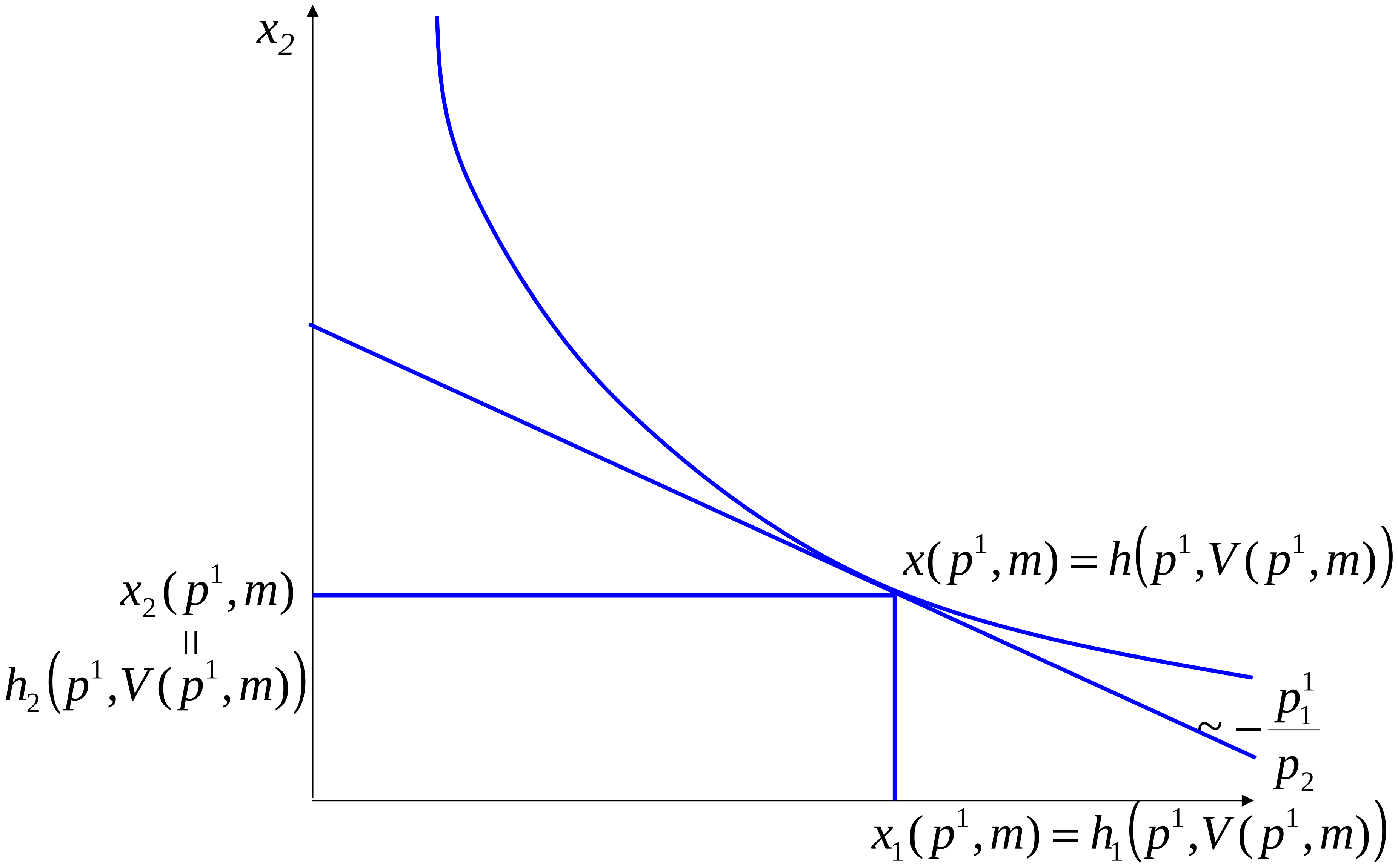
El efecto del aumento de un precio se descompone en dos:

• Efecto substitución: mide lo que variaría la demanda de los bienes si varía el precio pero el consumidor permanece en la misma curva de indiferencia.

•Efecto renta: mide la variación de la demanda como consecuencia de la reducción de renta resultante de pasar de la restricción presupuestaria que con los precios finales le daría la misma utilidad que disfrutaba antes del cambio de precios, a la restricción presupuestaria final.

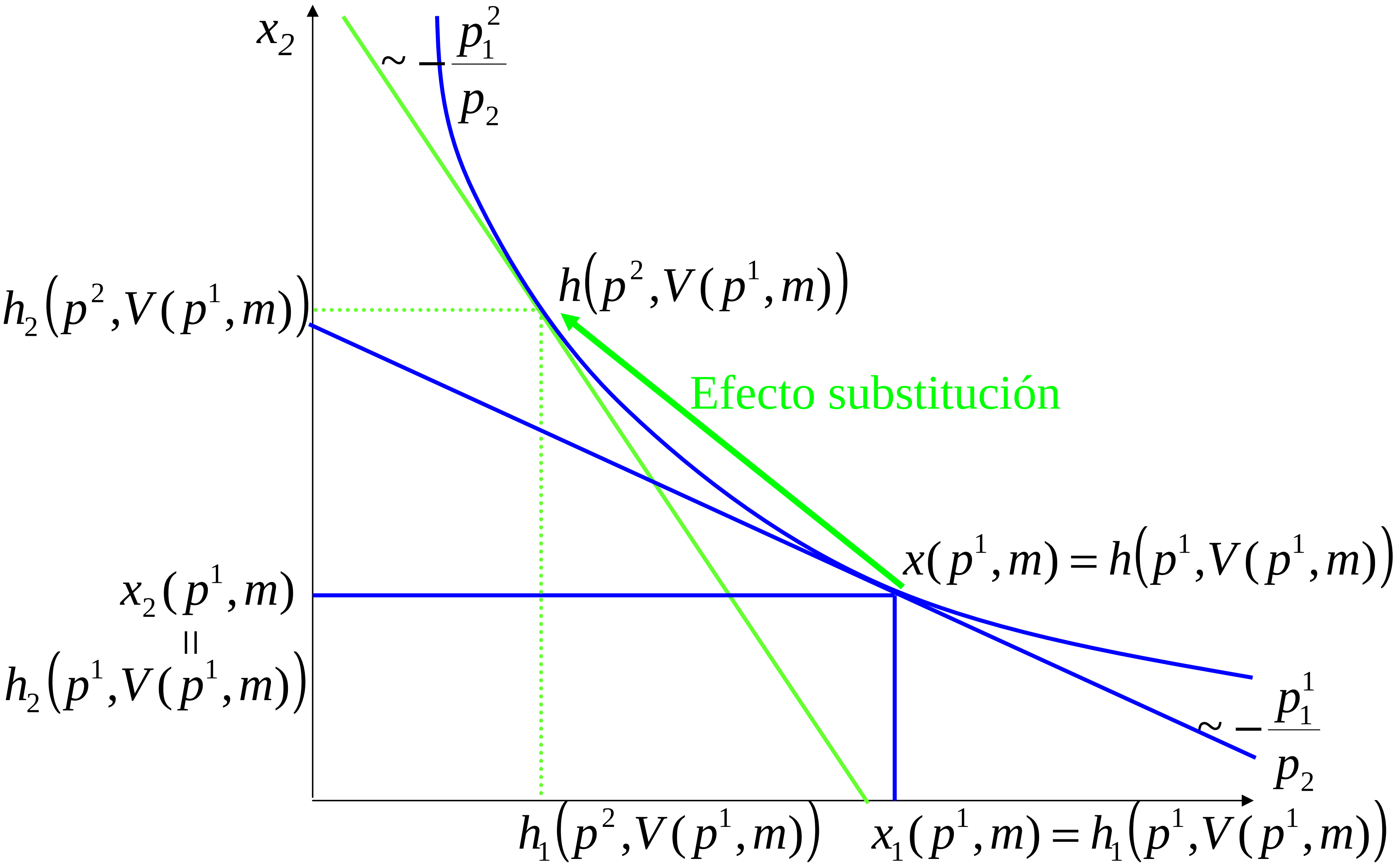
Efecto del aumento del precio del bien 1

$$p_1^2 > p_1^1, \quad p_2^2 = p_2^1 = p_2$$



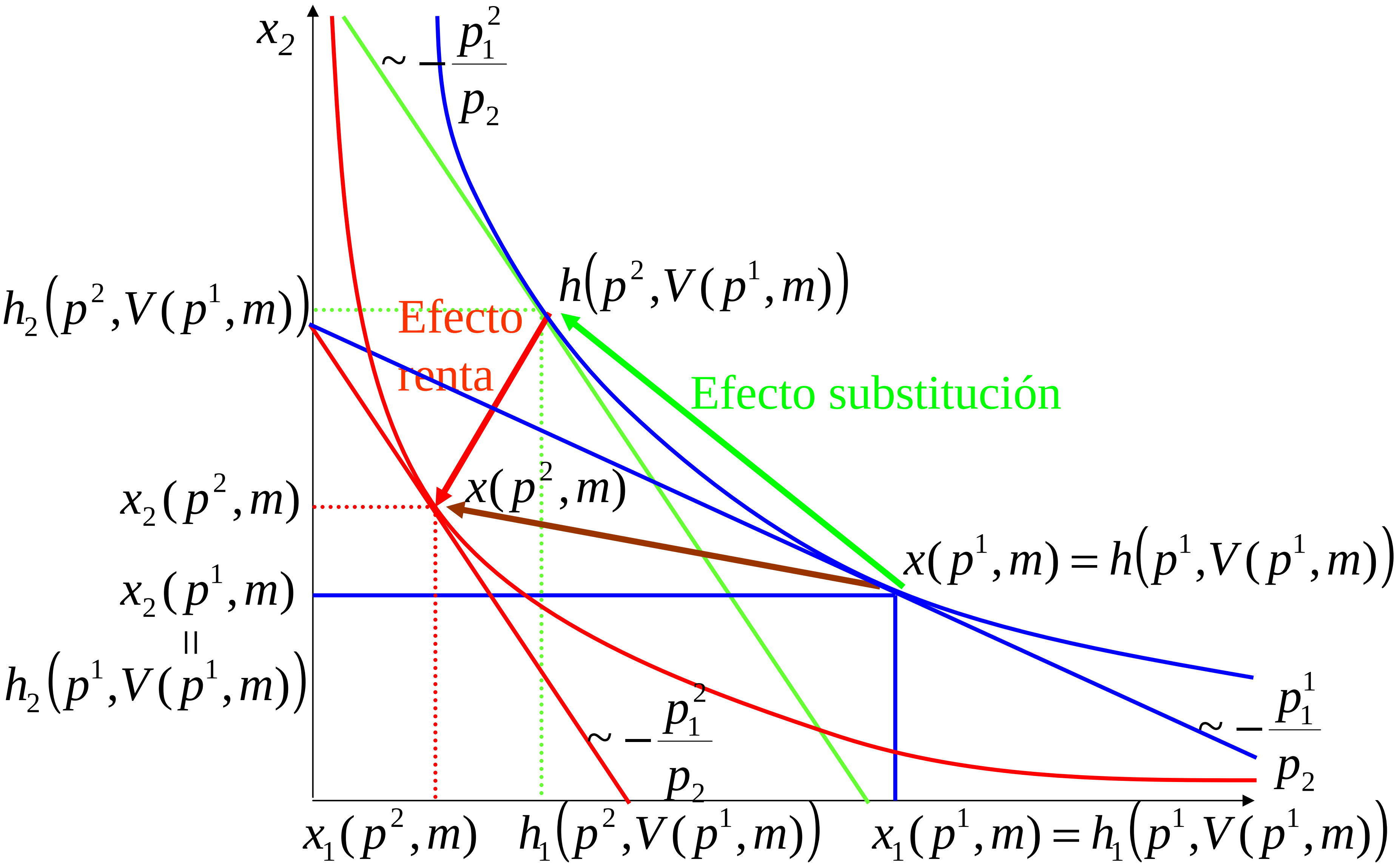
Efecto del aumento del precio del bien 1

$$p_1^2 > p_1^1, \quad p_2^2 = p_2^1 = p_2$$



Efecto del aumento del precio del bien 1

$$p_1^2 > p_1^1, \quad p_2^2 = p_2^1 = p_2$$



Considere el siguiente problema de maximización:

$$\begin{aligned} &\max_{x} f(x,a) \\ &s.a.\ g_i(x,a) \leq 0 \quad i = 1,..,k \end{aligned} \qquad \text{(PO)}$$

Donde $x \in \Re^n$ es el vector de variables de elección y $a \in \Re^m$ es el vector de parámetros. Sea *x(a)* la elección óptima del anterior problema y *M(a)* el valor máximo que toma *f(x,a)* sujeto a la anteriores restricciones (*M(a)* = *f(x(a),a)*):

$$M(a) = \begin{array}{l} \max_{x} f(x,a) \\ s.a.\ g_i(x,a) \leq 0 \end{array} \qquad x(a) = \begin{array}{l} Arg \max_{x} f(x,a) \\ s.a.\ g_i(x,a) \leq 0 \end{array}$$

Teorema del Máximo: Si $f(x,a)$ y $g_i(x,a)$ son funciones continuas y las restricciones $g_i(x,a) \leq 0$ definen un conjunto compacto (cerrado y acotado) entonces M(a) es continua y si la solución del problema (PO) es única, entonces la función *x(a)* es continua.

Note que para que *x*(a) sea una función, la solución de (PO) tiene que ser única, si no sería una correspondencia (para cada valor a del espacio de parámetros le correspondería un conjunto del espacio de variables de elección, no un punto).

Definamos la función Lagrangiana:

$$L(x,a) = f(x,a) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x,a)$$

Sabemos que una condición necesaria para que esta $x(a)$ sea una solución óptima es:

$$\frac{\partial L(x(a),a)}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{(CPO)}$$

Teorema de La Envolvente:

$$\frac{\partial M(a)}{\partial a_j} = \frac{\partial L(x(a),a)}{\partial a_j} = \frac{\partial f(x(a),a)}{\partial a_j} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial g_i(x(a),a)}{\partial a_j}$$

Demostración

$$\frac{\partial M(a)}{\partial a_j} = \frac{\partial L(x(a),a)}{\partial a_j} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L(x(a),a)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(a)}{\partial a_j} = \frac{\partial L(x(a),a)}{\partial a_j}$$

donde se ha usado las condiciones de primer orden (CPO).

Lema de Shephard: $\dfrac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = h_i(p,u)$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
e(p,u) = \quad & \min_{x} \quad px \\
& s.a \quad u(x) \geq u \\
& \qquad\;\; x \geq 0
\end{aligned}
$$

Lagrangiano

$$e(p,u) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n - \lambda\left[u(x_1, x_2, \ldots, x_n) - u\right]$$
$$-\left[\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_v x_n\right]$$

Usando el Teorema de la Envolvente:

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = x_i^* = h_i(p,u)$$

Ecuación de Slutsky:

$$h_i(p,u) = x_i(p,e(p,u))$$

$$\frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(p,e(p,u))}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p,e(p,u))}{\partial m}\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_j}$$

$$\frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(p,e(p,u))}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p,e(p,u))}{\partial m} h_j(p,u)$$

$$\frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(p,e(p,u))}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p,e(p,u))}{\partial m} x_j(p,e(p,u))$$

Cambio de variable $e(p,u) = m, V(p,m) = u$:

$$\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j} = \underbrace{\frac{\partial h_i(p,V(p,m))}{\partial p_j}}_{\text{Efecto Substitución}} - \underbrace{\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m} x_j(p,m)}_{\text{Efecto Renta}}$$

Ley de la Demanda: Si la demanda de un bien normal es positiva entonces disminuye con su precio:

$$\frac{\partial x_i(p,u)}{\partial p_i} < 0$$

Demostración:

Dada la ecuación de Slutsky lo único que hay que demostrar es que la demanda hicksiana de un bien es decreciente en su propio precio $\frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_i} \leq 0$. Para ello considere dos vectores de precios p^1, p^2 tales que $p_i^2 > p_i^1$ y $\forall j \neq i \quad p_j^2 = p_j^1$.

$$p^2 h(p^2,u) = p^1 h(p^2,u) + \left(p_i^2 - p_i^1\right) h_i(p^2,u) \leq$$
$$p^1 h(p^1,u) + \left(p_i^2 - p_i^1\right) h_i(p^1,u) \Rightarrow$$
$$\left(p_i^2 - p_i^1\right)\left[h_i(p^2,u) - h_i(p^1,u)\right] \leq p^1 h(p^1,u) - p^1 h(p^2,u) \leq 0$$

Elasticidad demanda precio: se define como la variación porcentual de la cantidad demandada de un bien por un consumidor ante la variación de su precio dividido por la variación porcentual de su precio:

$$\varepsilon_{i,p}^{d}(p,m)=\frac{\text{Variacion porcentual cantidad demandada de i}}{\text{Variacion porcentual del precio de i}}=$$

$$\frac{\Delta x_i / x_i}{\Delta p_i / p_i}=\frac{\Delta x_i}{\Delta p_i}\frac{p_i}{x_i}\approx\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_i}\frac{p_i}{x_i}<0$$

La elasticidad precio demanda mide si la cantidad demandada reacciona mucho o poco ante variaciones de su precio.

Si la elasticidad demanda precio en un punto es -3, significa que si aumenta un 1% el precio de un bien, entonces la demanda disminuye un 3%.

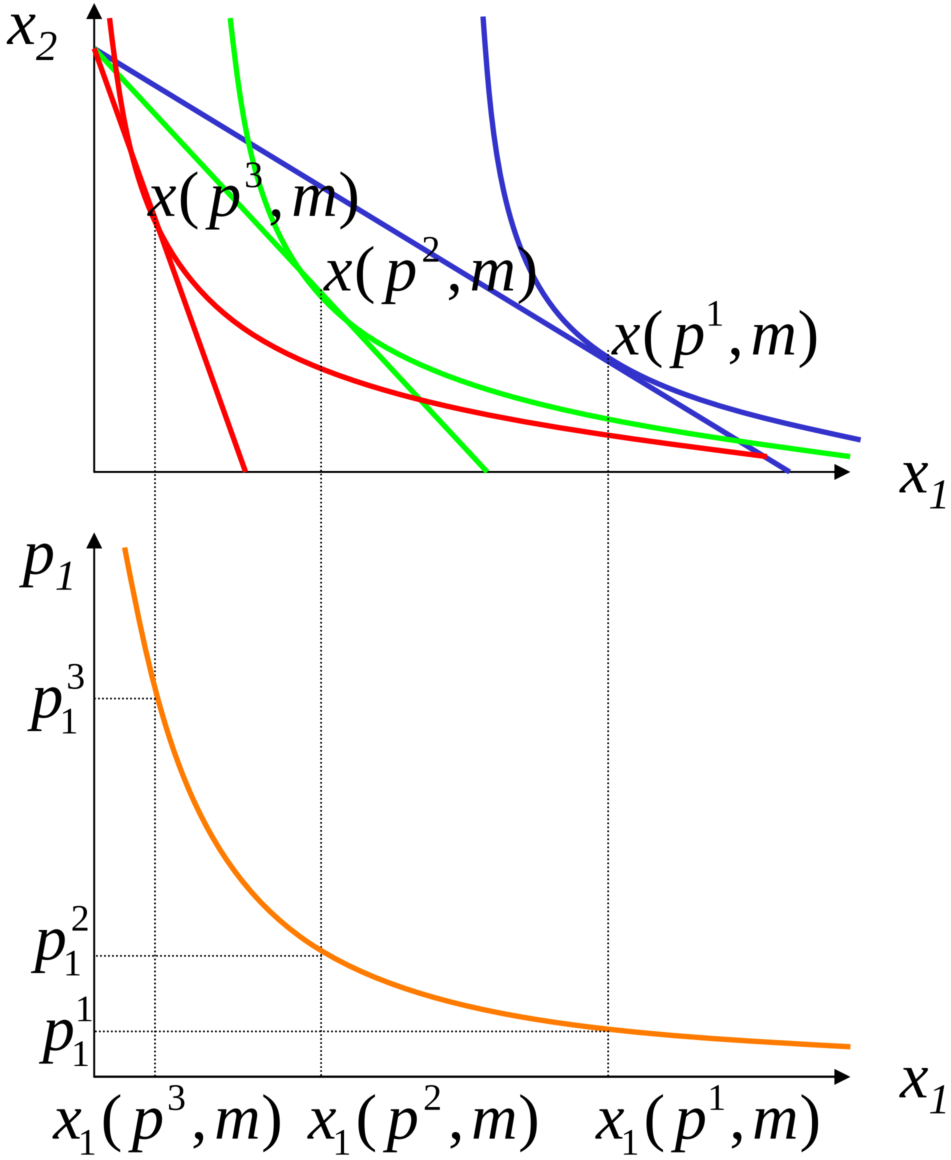
La elasticidad de la demanda depende de si el bien es de primera necesidad o no, si el bien tiene bienes substitutivos, del periodo de tiempo que se esté considerando, etc.

Se dice que la demanda en un punto es **elástica** si al variar el precio, la cantidad varía en una proporción mayor, es decir $\varepsilon_{i,p}^{d}(p,m) < -1 \Leftrightarrow \left|\varepsilon_{i,p}^{d}(p,m)\right| > 1$.

Se dice que la demanda en un punto es **inelástica** si al variar el precio, la cantidad varía en una proporción menor, es decir $\varepsilon_{i,p}^{d}(p,m) > -1 \Leftrightarrow \left|\varepsilon_{i,p}^{d}(p,m)\right| < 1$.

Se dice que la demanda en un punto tiene **elasticidad unitaria** si al variar el precio, la cantidad varía en la misma proporción: $\varepsilon_{i,p}^{d}(p,m) = -1 \Leftrightarrow \left|\varepsilon_{i,p}^{d}(p,m)\right| = 1$.

Curva de demanda: relaciona la demanda de un bien con su precio, considerando el precio de lo demás bienes y la renta fijos.



Bienes Substitutivos Brutos: cuando al aumentar el precio de uno de ellos aumenta la demanda del otro:

$$\frac{\partial x_i(p,u)}{\partial p_j} > 0; \frac{\partial x_j(p,u)}{\partial p_i} > 0$$

Bienes Complementario Brutos: cuando al aumentar el precio de uno de ellos disminuye la demanda del otro:

$$\frac{\partial x_i(p,u)}{\partial p_j} < 0; \frac{\partial x_j(p,u)}{\partial p_i} < 0$$

Bienes no relacionados: cuando el aumento o disminución del precio de uno de ellos no afecta a la demanda del otro:

$$\frac{\partial x_i(p,u)}{\partial p_j} = 0; \frac{\partial x_j(p,u)}{\partial p_i} = 0$$

Elasticidad cruzada: se define como la variación porcentual de la cantidad demandada de un bien por un consumidor ante la variación del precio de otro bien dividido por la variación porcentual del precio del otro bien:

$$\varepsilon_{i,j}(p,m) = \frac{\text{Variacion porcentual cantidad demandada de i}}{\text{Variacion porcentual del precio de j}} =$$

$$\frac{\Delta x_i / x_i}{\Delta p_j / p_j} = \frac{\Delta x_i}{\Delta p_j}\frac{p_j}{x_i} \approx \frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j}\frac{p_j}{x_i} < 0$$

Fernando Perera-Tallo

Bien Giffen: Bien inferior cuyo efecto renta es tan fuerte que su demanda depende positivamente de su precio.

Medidas de Bienestar:

Variación Compensatoria $VC\left(p^0, p^1, m\right)$: Es la cuantía que se le debe de pagar (quitar) a un consumidor para que al variar los precios (de p^0 a p^1) disfrute del mismo nivel de utilidad:

$$v(p^0, m) = v\left(p^1, m + VC\left(p^0, p^1, m\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$m + VC\left(p^0, p^1, m\right) = e(p^1, v(p^0, m))$$

$$VC\left(p^0, p^1, m\right) = e(p^1, v(p^0, m)) - m =$$

$$e(p^1, v(p^0, m)) - e(p^0, v(p^0, m))$$

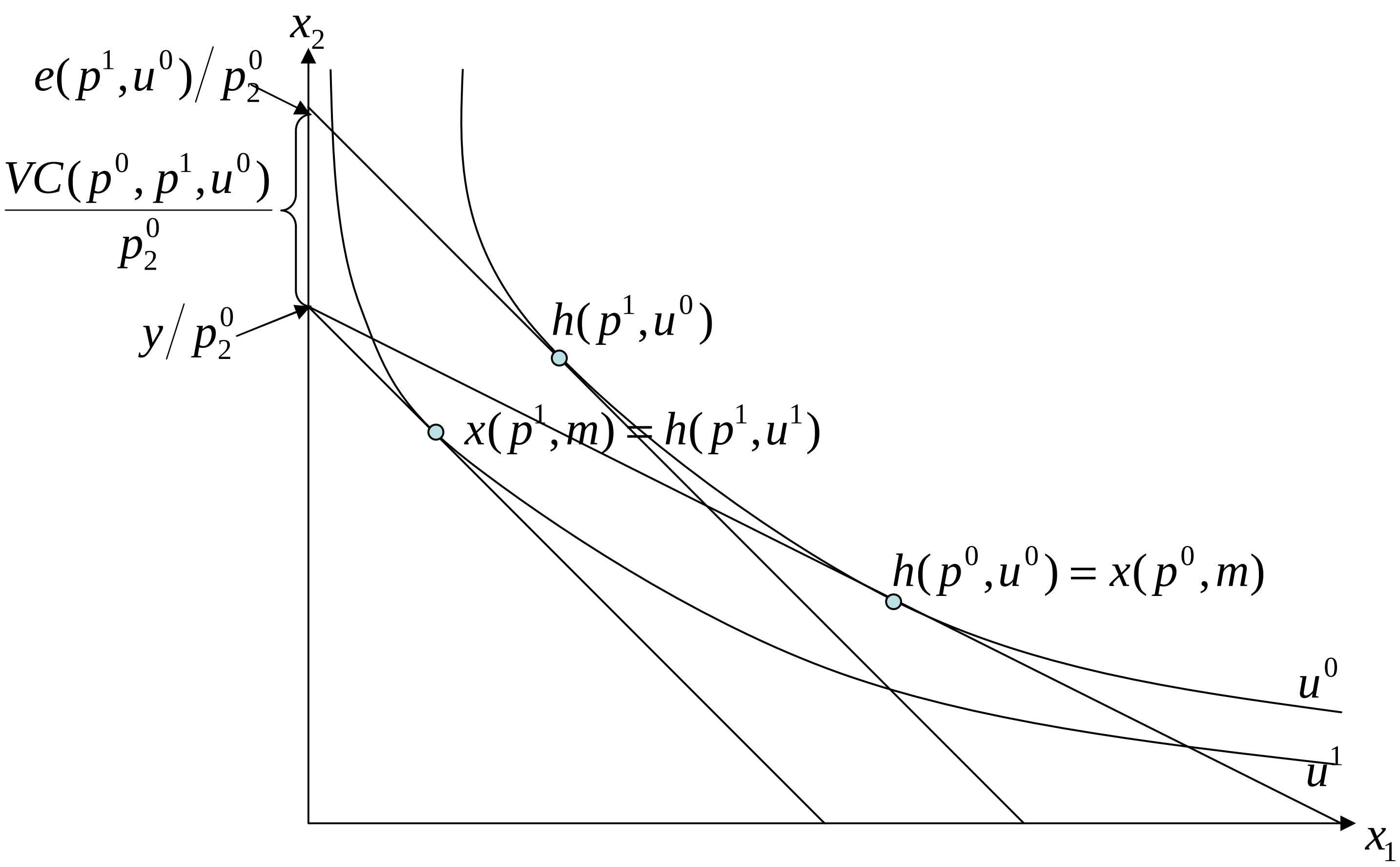
En el caso de que sólo varíe un precio, entonces se deduce del lema de Shephard que la variación equivalente se puede escribir de la siguiente forma:

Si $\forall j \neq i \quad p_j^0 = p_j^1 \Rightarrow$

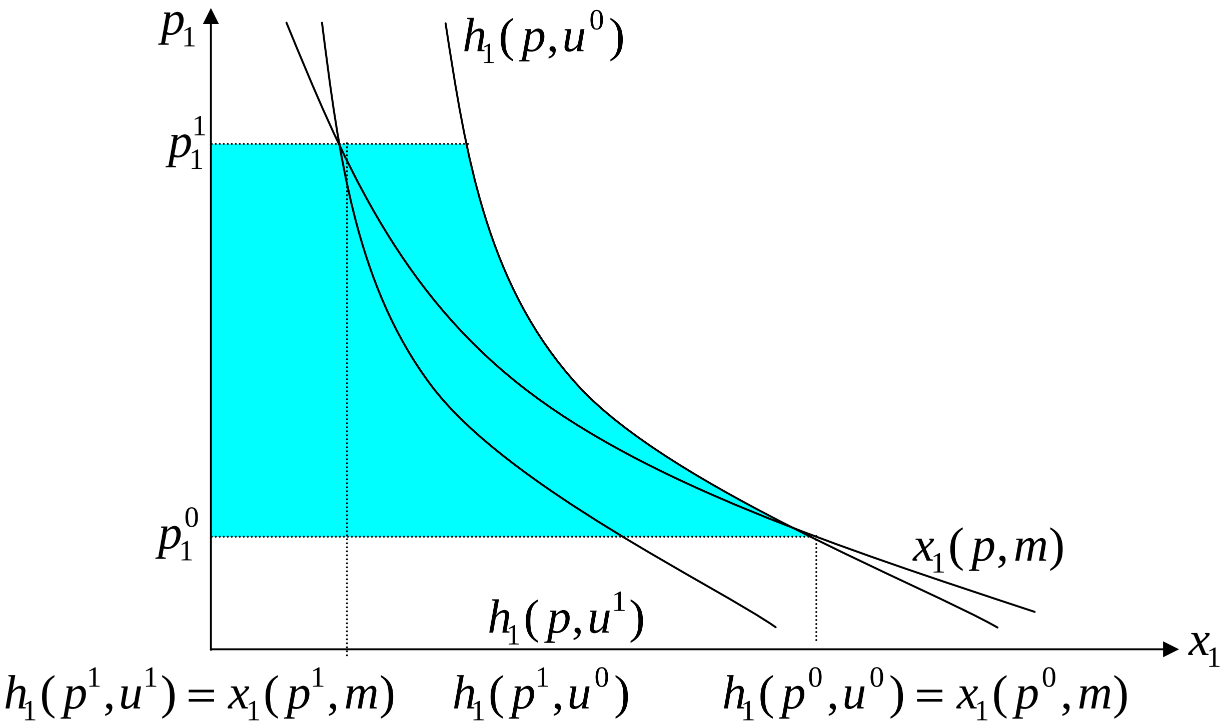
$$VC\left(p^0, p^1, m\right) = e(p^1, u^0) - e(p^1, u^0) =$$

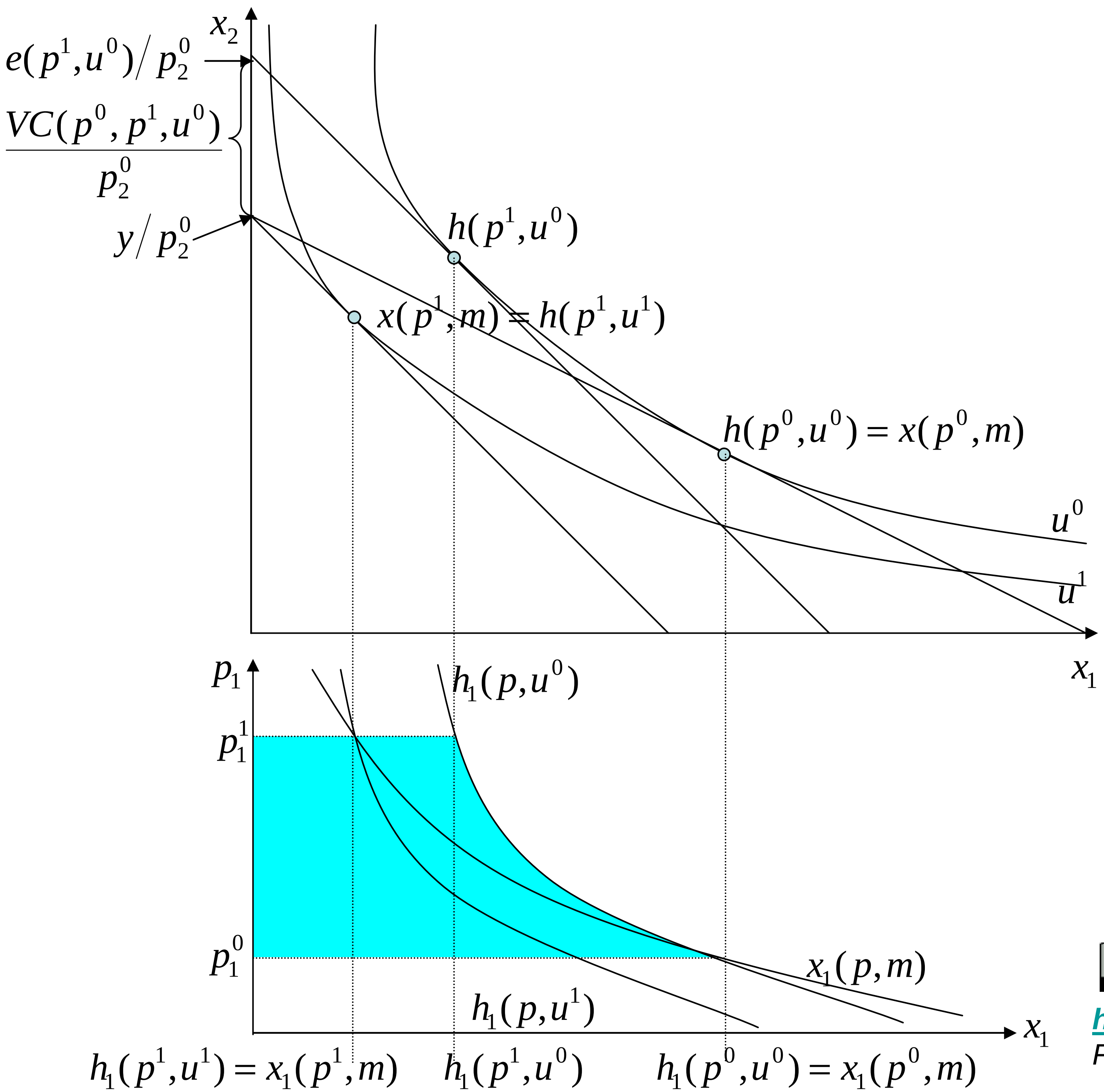
$$\int_{p_i^0}^{p_i^1} \frac{\partial e(p, u^0)}{\partial p_i} dp_i = \int_{p_i^0}^{p_i^1} h_i(p, u^0) dp_i$$

donde $u^0 = v(p^0, m)$.



x_2
$e(p^1,u^0)/p_2^0$
$\frac{VC(p^0,p^1,u^0)}{p_2^0}$
y/p_2^0
$h(p^1,u^0)$
$x(p^1,m)=h(p^1,u^1)$
$h(p^0,u^0)=x(p^0,m)$
u^0
u^1
x_1


p_1
$h_1(p,u^0)$
p_1^1
p_1^0
$x_1(p,m)$
$h_1(p,u^1)$
x_1
$h_1(p^1,u^1)=x_1(p^1,m)$
$h_1(p^1,u^0)$
$h_1(p^0,u^0)=x_1(p^0,m)$



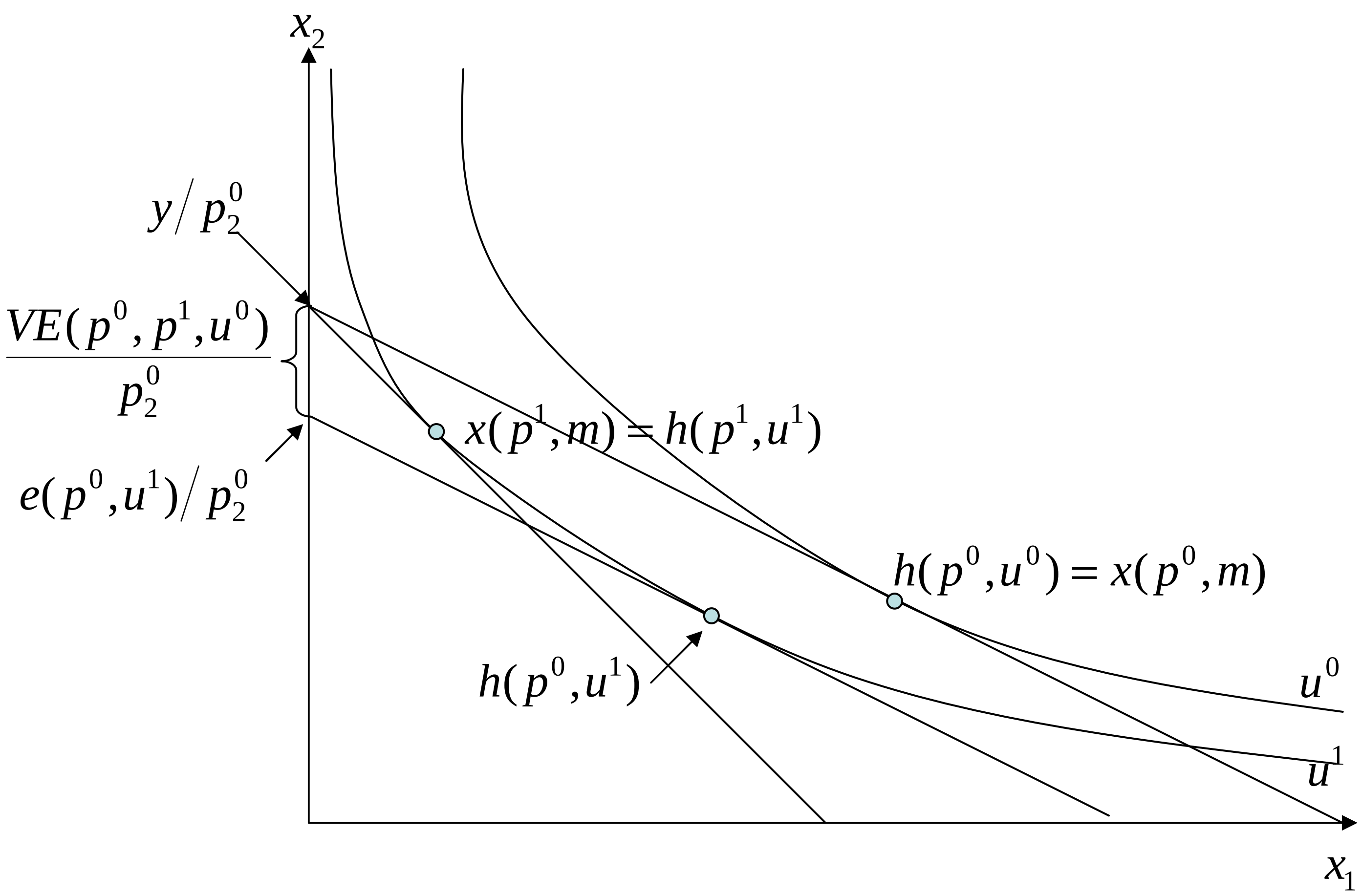
x_2
$e(p^1,u^0)/p_2^0$
$\frac{VC(p^0,p^1,u^0)}{p_2^0}$
y/p_2^0
$h(p^1,u^0)$
$x(p^1,m)=h(p^1,u^1)$
$h(p^0,u^0)=x(p^0,m)$
u^0
u^1
x_1
p_1
$h_1(p,u^0)$
p_1^1
p_1^0
$x_1(p,m)$
$h_1(p,u^1)$
x_1
$h_1(p^1,u^1)=x_1(p^1,m)$
$h_1(p^1,u^0)$
$h_1(p^0,u^0)=x_1(p^0,m)$

Variación Equivalente $VE\left(p^0, p^1, m\right)$: Es la máxima cantidad de dinero que el consumidor estaría dispuesto a pagar para que no varíen los precios (de p^0 a p^1):

$$v(p^1, m) = v\left(p^0, m - VE\left(p^0, p^1, m\right)\right) \Leftrightarrow$$
$$m - VE\left(p^0, p^1, m\right) = e\left(p^0, v(p^1, m)\right) \Leftrightarrow$$

$$VE\left(p^0, p^1, m\right) = m - e(p^0, v(p^1, m)) =$$
$$e(p^1, v(p^1, m)) - e(p^0, v(p^1, m))$$

Fernando Perera-Tallo



x_2
y/p_2^0
$\frac{VE(p^0,p^1,u^0)}{p_2^0}$
$e(p^0,u^1)/p_2^0$
$x(p^1,m)=h(p^1,u^1)$
$h(p^0,u^0)=x(p^0,m)$
$h(p^0,u^1)$
u^0
u^1
x_1

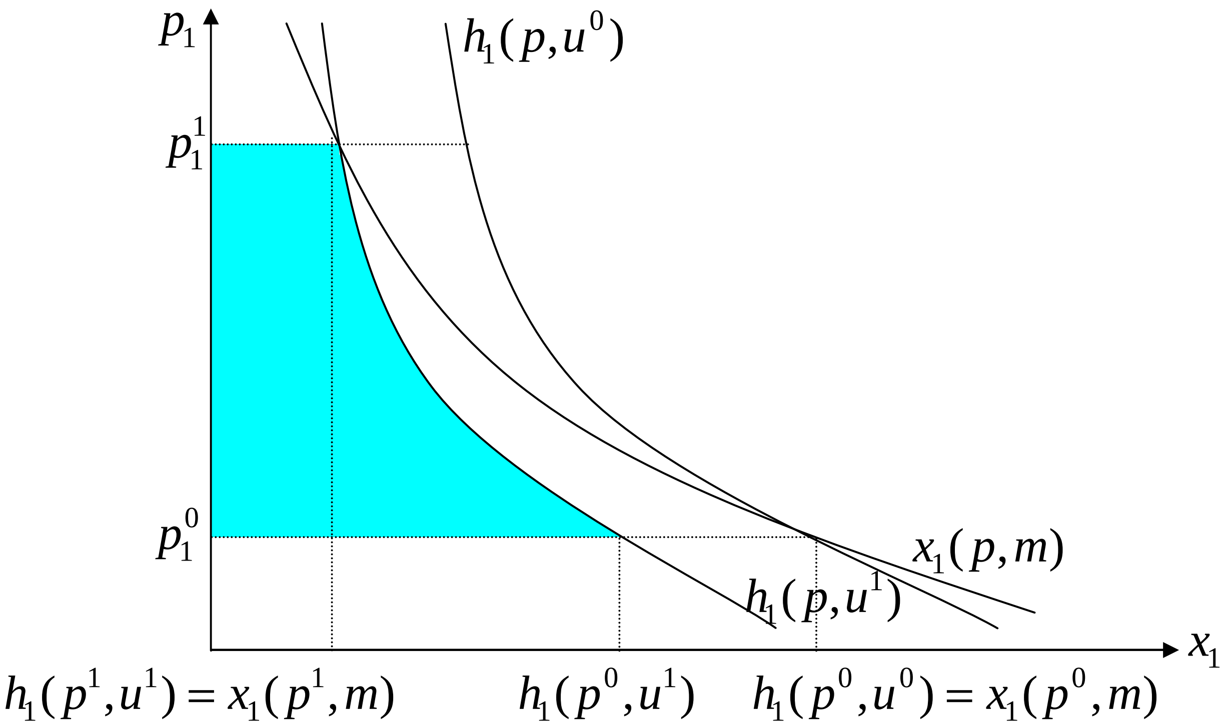
En el caso de que sólo varíe un precio entonces se puede escribir de la siguiente forma:

Si $\forall j \neq i \quad p_j^0 = p_j^1 \Rightarrow$

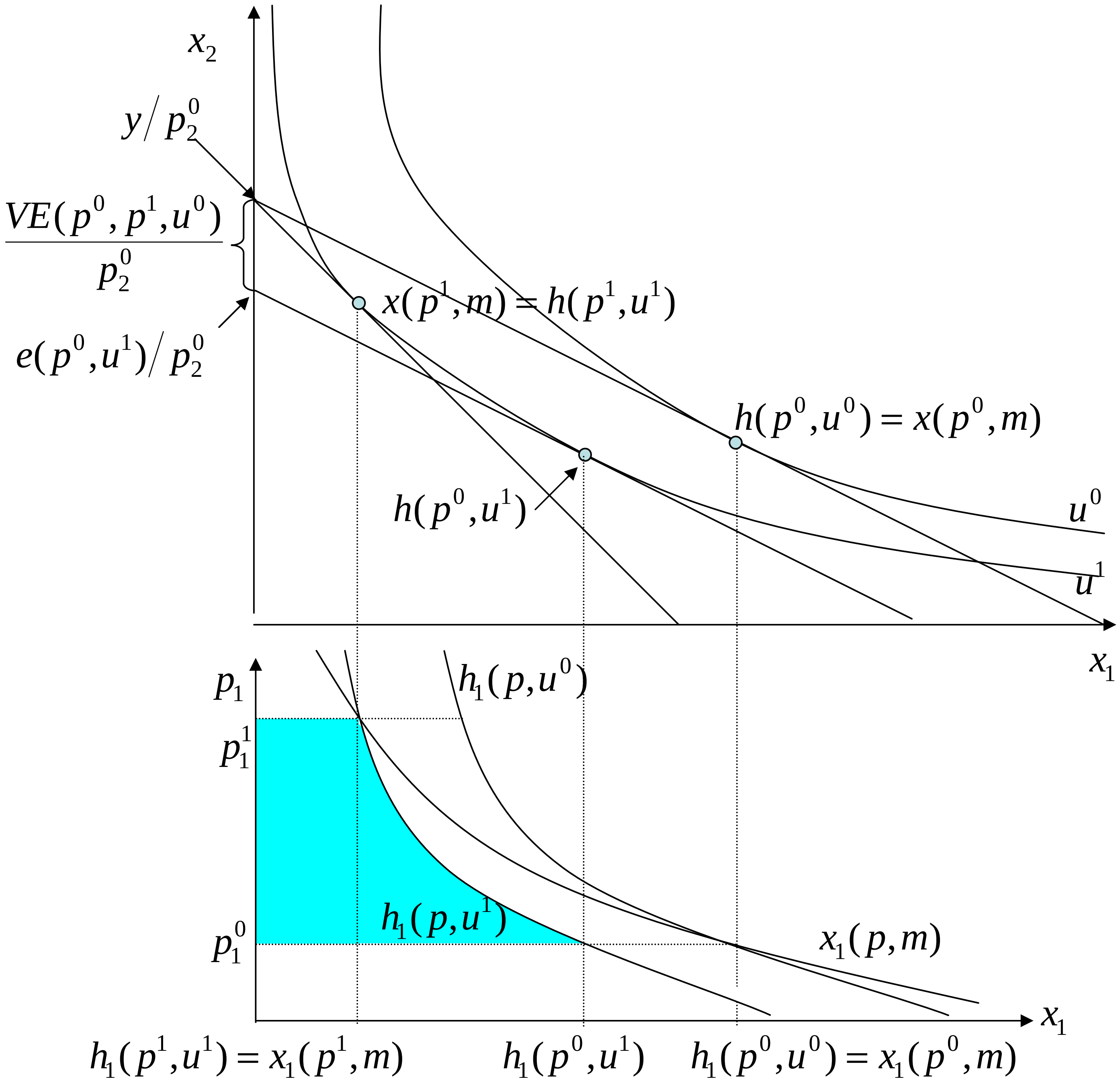
$$VE\left(p^0, p^1, m\right) = e(p^1, u^1) - e(p^0, u^1) =$$

$$\int_{p_i^0}^{p_i^1} \frac{\partial e(p, u^1)}{\partial p_i} dp_i = \int_{p_i^0}^{p_i^1} h(p, u^1) dp_i$$

donde $u^1 = v(p^1, m)$.



Fernando Perera-Tallo



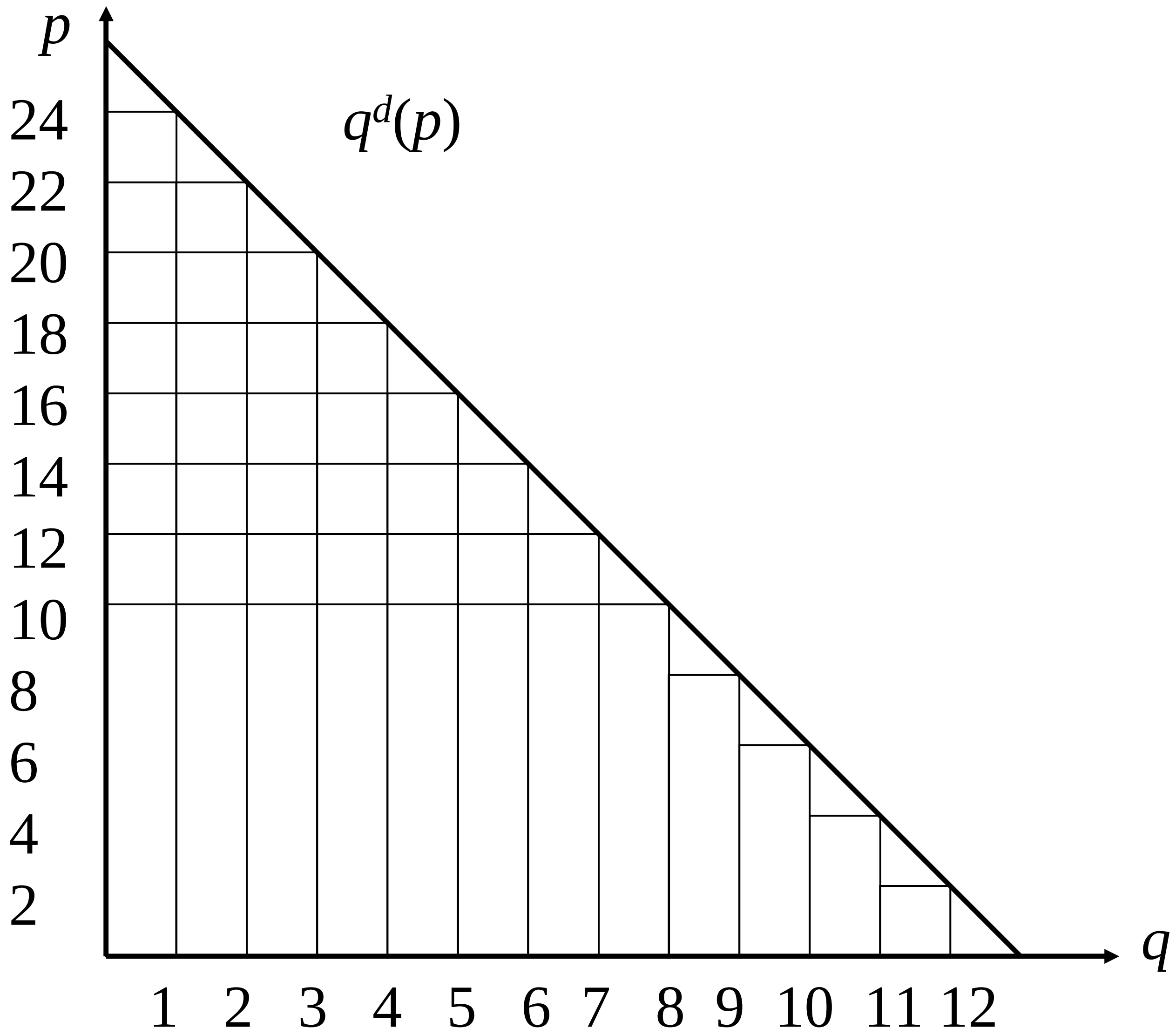
x_2
y/p_2^0
$\frac{VE(p^0,p^1,u^0)}{p_2^0}$
$e(p^0,u^1)/p_2^0$
$x(p^1,m)=h(p^1,u^1)$
$h(p^0,u^0)=x(p^0,m)$
$h(p^0,u^1)$
u^0
u^1
x_1
p_1
$h_1(p,u^0)$
p_1^1
$h_1(p,u^1)$
p_1^0
$x_1(p,m)$
x_1
$h_1(p^1,u^1)=x_1(p^1,m)$
$h_1(p^0,u^1)$
$h_1(p^0,u^0)=x_1(p^0,m)$

Excedente del consumidor para el bien i: Se define como la suma (integral) de la diferencia entre el precio de reserva de cada unidad de bien i y el precio al que se compra dicho bien:

$$EC_i(p,m) = \int_0^{x_i(p,m)} \left[p_i(x_i, p_{-i}, m) - p\right] dx_i$$

donde $p_i(\hat{x}_i, p_{-i}, m) \Leftrightarrow \hat{x}_i = x_i(p_i(\hat{x}_i, m), p_{-i}, m)$ es la demanda inversa del bien i y p_{-i} es el vector de todos los precios distintos de i $p_{-i} = (p_j)_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n}$. Gráficamente el excedente del consumidor es el área que está por debajo de la curva de demanda y por encima de la línea horizontal del precio

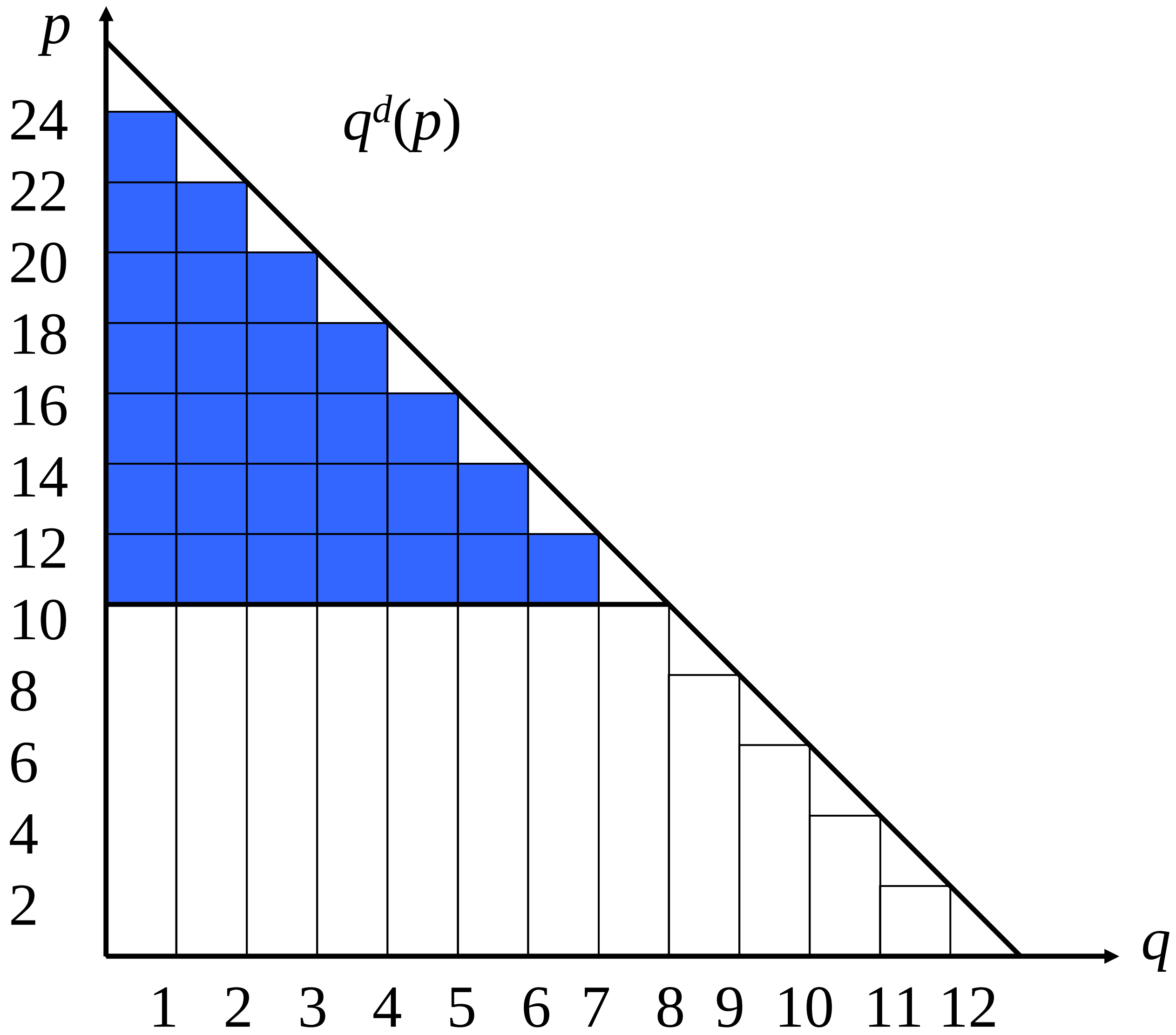
La curva de demanda se puede interpretar como el precio de reserva de los consumidores: el precio máximo que los consumidores están dispuestos a pagar por un bien.



Una medida de bienestar de los consumidores es el **excedente del consumidor**, que se define como la suma de la diferencia entre el precio de reserva del consumidor $p^d(q)$ y el precio que realmente paga p. Por ejemplo, si el precio que pagan los consumidores es igual a p^* y la cantidad total que compran los consumidores es $q^* = q^d(p^*) \Leftrightarrow p^* = p^d(q^*)$. Entonces el excedente del consumidor (EC) vendría dado por la siguiente fórmula:

$$\mathrm{EC} = \left(p^d(1) - p^*\right) + \left(p^d(2) - p^*\right) + \ldots + \left(p^d(q^*) - p^*\right) =$$

$$\sum_{q=1}^{q^*} \left(p^d(q) - p^*\right) \approx \int_0^{q^*} \left(p^d(q) - p^*\right) dq$$

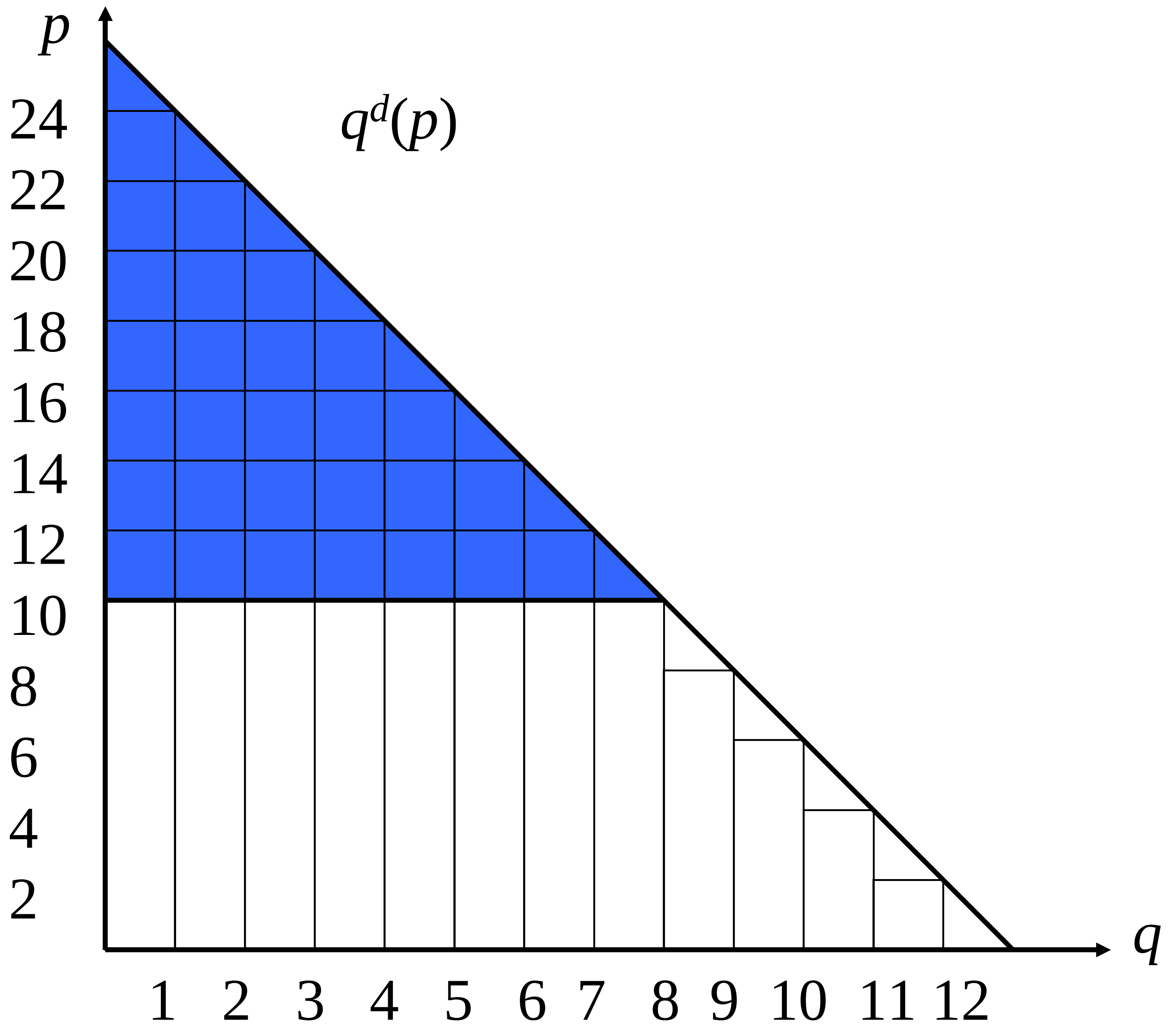


p
q
$q^d(p)$
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

$$EC = (24\text{-}10) + (22\text{-}10) + \ldots + (12\text{-}10) + (10\text{-}10) =$$

$$14 + 12 + 10 + \ldots 2 + 0 = 56 =$$

$$\int_0^8 \left(\underbrace{25 - 2q}_{p^d(q)} - 10 \right) dq = \int_0^8 (15 - 2q)\, dq = \left[15q - q^2 \right]_0^8 = 56$$



p
q
$q^d(p)$
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

La reducción de bienestar de los consumidores debido al aumento de un precio del bien i se puede medir como la reducción en el excedente del consumidor:

$$REC_i(p^0, p^1, m) = EC_i(p^0, m) - EC_i(p^1, m) =$$

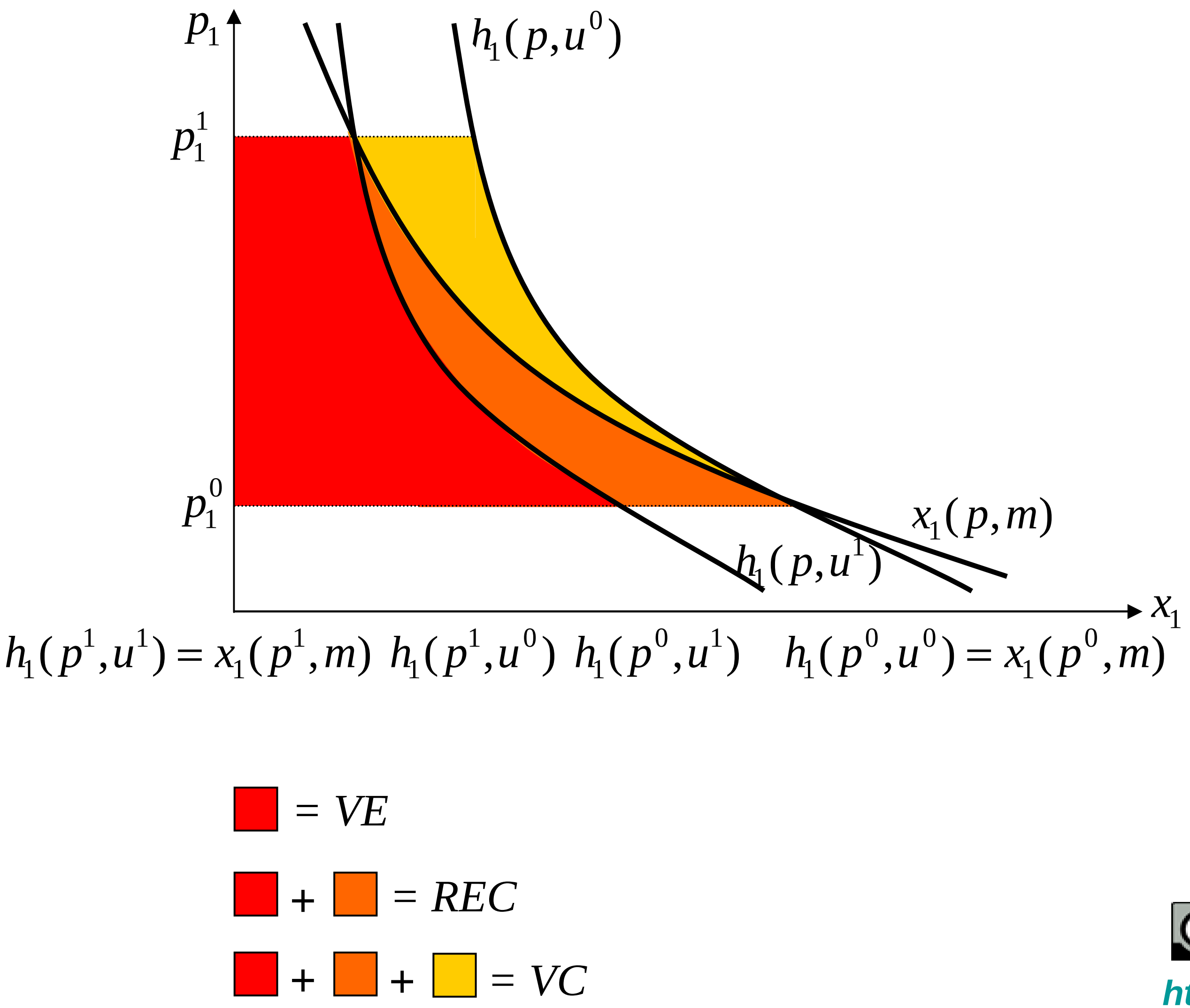
$$\int_{x_i(p^1,m)}^{x_i(p^0,m)} \left[p_i(x_i, p_{-i}, m) - p\right] dx_i$$

donde $\forall j \neq i \quad p_j^0 = p_j^1$.

La reducción del excedente del consumidor se puede escribir como:

$$REC_i(p^0, p^1, m) = \int_{p_i^0}^{p_i^1} x_i(p, m)\,dp_i$$

Cuando el bien es <u>normal</u> la reducción del excedente del consumidor siempre está entre la variación compensatoria y la variación equivalente:


p_1
p_1^1
p_1^0
$h_1(p,u^0)$
$x_1(p,m)$
$h_1(p,u^1)$
x_1
$h_1(p^1,u^1)=x_1(p^1,m)$
$h_1(p^1,u^0)$
$h_1(p^0,u^1)$
$h_1(p^0,u^0)=x_1(p^0,m)$
$= VE$
$+ \quad = REC$
$+ \quad + \quad = VC$