Universidad de La Laguna
Departamento de Análisis Económico

OWC Economía para Matemáticos
Tema 3: Teoría de la Empresa

1. Considere la función de producción:

$$y=\left[\frac{-4+\sqrt{16+4z_1^{\alpha}z_2^{1-\alpha}}}{2}\right]^{\frac{3}{2}} \qquad \alpha\in(0,1)$$

Note que esta función de producción se puede rescribir de la siguiente manera implícita:

$$z_1^{\alpha}z_2^{1-\alpha}=4y^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{4}{3}}$$

a) Calcule la función de costes y las demandas condicionadas de factores (Recomendación: es más fácil hacerlo usando la función de producción de forma implícita). Represente gráficamente los costes medios y marginales.

b) Calcule la función de oferta de producto y las demandas de factores. (Recomendación: para calcular la oferta de producto haga la maximización de beneficios desde el punto de vista de los costes, precio igual a coste marginal. Una vez obtenida la oferta, substitúyala en la demanda condicionada de factores para obtener la demanda de factores)

2. Demuestre que:

a) Si una función de producción presenta rendimientos constantes a escala entonces su función de costes cumple la siguiente propiedad: $\forall\lambda>1 \quad c(w,\lambda y)=\lambda c(w,y)$. Además los costes medios son constantes.

b) Si una función de producción presenta rendimientos decrecientes a escala entonces su función de costes cumple la siguiente propiedad: $\forall\lambda>1 \quad c(w,\lambda y)>\lambda c(w,y)$. Además los costes medios son estrictamente crecientes con respecto al nivel de producción.

c) Si una función de producción presenta rendimientos crecientes a escala entonces su función de costes cumple la siguiente propiedad: $\forall\lambda>1 \quad c(w,\lambda y)<\lambda c(w,y)$. Además los costes medios son estrictamente decrecientes con respecto al nivel de producción.

d) Si una función de producción presenta rendimientos constantes o crecientes a escala, si el problema de maximización de beneficios tiene solución entonces los beneficios son cero.

e) Si una función de producción presenta rendimientos crecientes a escala, si el problema de maximización de beneficios tiene solución entonces el nivel de producción óptima es cero.

f) Si una función de producción presenta rendimientos constantes a escala entonces si

$$(y^*,z^*)\in \begin{array}{l}\arg\max\limits_{y,z} \quad py-wz\\ s.a: \quad y\le f(z)\end{array} \Rightarrow \forall\lambda>0 \quad (\lambda y^*,\lambda z^*)\in \begin{array}{l}\arg\max\limits_{y,z} \quad py-wz\\ s.a: \quad y\le f(z)\end{array}$$

g) Si una función de producción presenta rendimientos constantes a escala entonces si

$$\exists y^*>0/ \quad (y^*,z^*)\in \begin{array}{l}\arg\max\limits_{y,z} \quad py-wz\\ s.a: \quad y\le f(z)\end{array} \Rightarrow p=c(w,1)\ y\ z^*=z(w,1)y^*$$

donde $z(w,y)$ es la demanda condicionada de factores.

h) Si una función de producción presenta rendimientos constantes a escala entonces el problema de maximización del beneficio tiene solución si y sólo si $p\le c(w,1)$

i) Si una función de producción presenta rendimientos constantes, entonces la correspondencia de oferta y de demanda de factores de la empresa para combinaciones de precio del bien y precios de factores que cumplan la condición del apartado anterior sería de la siguiente forma:

$$y(p,w)=\begin{cases}0 & si \quad p<c(w,1)\\ \left[0,+\infty\right) & si \quad p=c(w,1)\end{cases}$$

$$z(p,w)=\begin{cases}0 & si \quad p<c(w,1)\\ \left\{z\in\Re_{+}^{m} \,/\, \exists y\geq 0 \text{ tal que } \ z=z(w,1)y\right\} & si \quad p=c(w,1)\end{cases}$$

donde $z(w,y)$ es la demanda condicionada de factores.