Tema 5: Equilibrio General

1. Introducción

El concepto de *equilibrio* surge por la necesidad de analizar situaciones en que distintos agentes económicos interactúan entre si. El concepto de equilibrio intenta predecir cuál es el resultado de esa interacción. Se entiende por equilibrio, tanto en economía como en otras materias, como la física, una situación en la que, una vez alcanzada, no hay tendencia a que cambie. En economía, equilibrio es una situación en la que todos los agentes tienen incentivos a hacer lo que están haciendo, lo que implica que no tienen incentivos a cambiar o desviarse de su comportamiento. Dicho de otra manera, todos los agentes hacen lo que quieren y, por tanto, no hay ninguna fuerza que haga que las cosas cambien, de ahí el equilibrio. Vamos a aplicar este concepto al modelo más simple en economía: el modelo de oferta y demanda de un mercado competitivo. En este contexto, hay equilibrio cuando la oferta es igual a la demanda, y la cantidad que los consumidores compran y los productores venden coinciden, respectivamente, con sus demandas y ofertas individuales al precio de equilibrio. Esto implica que cada consumidor está comprando la cantidad que quiere comprar (su demanda del bien al precio de equilibrio) y cada productor está vendiendo la cantidad que quiere vender (su oferta al precio de equilibrio); por tanto, todo el mundo hace lo que quiere y no hay ningún incentivo a que los agentes cambien su comportamiento. Este concepto general de equilibrio se puede aplicar a casi cualquier modelo económico donde vaios agentes económicos interactúan entre sí. Así, en el equilibrio de Nash, cada agente (jugador) elige la estrategia que maximiza sus pagos dadas las estrategias de los otros agentes y, por tanto, no tiene incentivos a desviarse porque está obteniendo lo máximo que puede obtener dado el comportamiento de los otros agentes.

El tipo de modelo que vamos a estudiar en este tema, y en los que ya hemos estudiado en el tema 4, aparece otro elemento fundamental: el sistema de precios. Éste va a ser un indicador de la escasez relativa de los distintos bienes y factores, y va a proporcionar a los agentes un mecanismo de coordinación. Así, cuando hay mayor escasez de un determinado bien o factor, la manera en que se coordinan los agentes es estableciendo un precio relativo alto, lo que hace que los compradores (demandantes) no quieran comprar mucho de ese bien o factor, y los vendedores (oferentes) tengan incentivos a proporcionar mayores cantidades de ese bien o factor. Coordinar las cantidades que tienen que producir y consumir los distintos agentes en un sistema de planificación central resulta muy complicado, porque se requiere una gran cantidad de información. En el sistema de mercado, la coordinación entre productores y consumidores se hace a través del sistema de precios.

En este tema se va a estudiar el equilibrio general, que se tiene diferenciar de los modelos dados en el tema 4, que son de equilibrio parcial. Pero ¿Cuál es la diferencia?. Par verla vamos a clasificar los modelos en los que existe un sistema de precios se pueden distinguir dos tipos, dependiendo de si todos los precios que aparecen en el modelo son endógenos o no:
- Modelos de *equilibrio parcial*: son modelos donde una serie de precios vienen dados y se consideran como variables exógenas. De hecho, los mercados en los que los precios son variables exógenas ni siquiera aparecen representados en el modelo. De ahí el

nombre de equilibrio parcial; hay equilibrio en una serie de mercados, aquellos donde los precios son variables endógenas, pero en los otros mercados donde los precios son variables exógenas, el equilibrio no se recoge en el modelo.
- Modelos de *equilibrio general*: son modelos donde todos los precios son endógenos y vienen determinados en cada uno de los mercados. Se llaman modelos de equilibrio general porque para que haya equilibrio, tienen que estar en equilibrio todos los mercados simultáneamente.

La utilización de modelos de equilibrio general o parcial depende en gran medida del tipo de fenómeno económico que queramos tratar. Según el tema y el enfoque que le demos al análisis de un problema económico, puede ser más adecuado un modelo de equilibrio general o parcial. El equilibrio parcial es adecuado para examinar cuestiones económicas donde las interacciones de distintos mercados no son muy relevantes para entender ese problema económico en cuestión. Si, por ejemplo, queremos estudiar la fijación de precios y cantidades en un mercado de un bien concreto bajo situación de oligopolio, el equilibrio parcial seguramente es el tipo de modelo más adecuado para hacerlo. Sin embargo, si la interacción entre los distintos mercados es un elemento importante del problema a tratar, lo más conveniente suele ser utilizar modelos de equilibrio general.

El equilibrio general no solo es una parte fundamental de la Microeconomía, sino que, además, se aplica en muchos otros campos de la economía. Si se quiere tener una visión general de la interacción de los mercados de la economía, lo ideal es utilizar modelos de equilibrio general. No es de extrañar, por tanto, que la mayoría de los modelos macroeconómicos de los últimos 25 años sean de equilibrio general. Pero, además de la Macroeconomía, los modelos de equilibrio general se usan en los más diversas ramas de la economía: Comercio Internacional, Hacienda Pública, Economía de los Recursos Naturales, Economía del Turismo, etc. Una de las tendencias de las últimas décadas es la utilización de modelos de equilibrio general cuantitativos, donde los parámetros del modelo se calculan numéricamente a través de regularidades empíricas o estimaciones. Estos modelos nos permiten dar predicciones cuantitativas sobre los efectos de determinados cambios de variables exógenas o analizar los efectos cuantitativos de determinadas políticas económicas. Evidentemente, para poder utilizar estos modelos cuantitativos es necesario poder calcular el equilibrio, uno de los aspectos en los que se hace hincapié en este tema.

En estos apuntes se empieza presentando un modelo de equilibrio general y definiendo lo que es el *equilibrio Walrasiano*. En el equilibrio Walrasiano todos los agentes maximizan sus funciones objetivo, es decir, los consumidores maximizan su utilidad y las empresas maximizan sus beneficios y, además, todos los mercados, tanto de bienes como de factores, están en equilibrio simultáneamente (es decir, la demanda de cada bien o factor se iguala a su oferta). Por tanto, el equilibrio Walrasiano es similar a otros conceptos de equilibrio en economía: si los agentes están maximizando sus funciones objetivo, no pueden mejorar desviándose de su comportamiento y, por tanto, no tienen ningún incentivo a cambiar. En otras palabras, los agentes están haciendo "lo que quieren", es decir, tienen incentivos a hacer los que están haciendo. Los agentes en el equilibrio Walrasiano compran y venden bienes o factores. Más concretamente, los consumidores o economías domésticas compran bienes y venden factores productivos, mientras que las empresas venden bienes y compran factores productivos.

Uno de los supuestos básicos del equilibrio Walrasiano es que los agentes son *competitivos*, es decir, son agentes que no tienen poder de mercado suficiente para modificar los precios de mercado, siendo, por tanto, *precio-aceptantes*, esto es, consideran los precios como dados y no como una variable de elección. Los modelos con agentes competitivos son muy populares en economía porque tienen una gran virtud: la simplicidad. Esto hace que este tipo de modelos sean casi siempre la mejor manera de empezar a analizar un problema económico, constituyendo, de este modo, el modelo de referencia ("benchmark model"). Una vez que se entiende cómo funciona el modelo competitivo, suele hacerse modificaciones de éste si el problema económico que se está tratando requiere de modelos más complejos, pero siempre se utiliza como modelo de referencia el competitivo. Además, suelen compararse los resultados de los modelos más complejos con los del modelo de referencia.

En estos apuntes se analizan algunas propiedades del equilibrio Walrasiano. Así, se empieza por la *eficiencia productiva*, que significa que para aumentar la producción de un bien es necesario reducir la producción de otro. Al conjunto de las combinaciones de bienes eficientes desde el punto de vista productivo se denomina *frontera de posibilidades de producción*. Si estamos en una combinación productiva en la frontera de posibilidades de producción, entonces, se puede definir *coste de oportunidad* de un bien en términos de otro, o *relación marginal de transformación* de un bien por otro, a la cantidad adicional del segundo bien que se podría producir si se dejara de producir una unidad del primer bien. La maximización de los beneficios de las empresas implica que el equilibrio Walrasiano es eficiente desde un punto de vista productivo, pero, además, los precios relativos son iguales al coste de oportunidad o relación marginal de transformación de los bienes, lo que significa que los precios del equilibrio Walrasiano reflejan correctamente la escasez de los bienes en la economía. Ésta, como veremos más adelante, es una propiedad importante del equilibrio Walrasiano.

La propiedad más importante que vamos a analizar en este tema es, sin duda, la *eficiencia en sentido de Pareto*. Se dice que una situación es eficiente en sentido de Pareto si no podemos mejorar a un agente sin empeorar a otro. La eficiencia Paretiana es un criterio más fuerte que la eficiencia productiva, ya que bajo el axioma de insaciabilidad de las preferencias, la eficiencia Paretiana implica la eficiencia productiva, pero la eficiencia productiva no implica la eficiencia Paretiana. De este modo, si no se da la eficiencia productiva, podemos aumentar la producción de un bien sin reducir la de otro, lo que implica que podemos dar esa cantidad adicional de producción de ese bien a un agente mejorándolo sin empeorar a nadie. Por tanto, si no se da la eficiencia productiva, seguro que tampoco se da la eficiencia en sentido de Pareto. Ahora bien, puede darse la eficiencia productiva sin que se dé la eficiencia de Pareto, bien porque no se elige la combinación productiva eficiente o porque no se distribuyen eficientemente los bienes entre los agentes económicos.

Un resultado muy importante del tema es el *Primer Teorema del Bienestar*, según el cual el equilibrio Walrasiano es eficiente en sentido de Pareto. Este resultado es fundamental, no porque no haya situaciones en las que no se dé la eficiencia paretiana, sino porque hace que el modelo competitivo sea el modelo de referencia donde se cumple la eficiencia paretiana y, a partir de ahí, podemos modificar este modelo básico para identificar, de forma precisa, las causas que generan ineficiencia en la economía y las posibles soluciones a la misma. Esto lo analizaremos en el epígrafe 1.8, cuando tratemos el problema de los efectos externos y de los bienes públicos (los llamados fallos de mercado). La "inversa" del Primer Teorema del Bienestar también se cumple y se le conoce como Segundo Teorema del Bienestar. Éste señala que cualquier asignación de recursos eficiente en sentido de Pareto, la podemos implementar como un equilibrio Walrasiano si distribuimos los derechos de propiedad sobre los factores y las empresas de la manera adecuada.

2. Equilibrio General: Conceptos Básicos y Teoremas del Bienestar

En estas notas de equilibrio general con producción vamos a adoptar un enfoque que no es ni el más general ni el más elegante, pero que tiene la ventaja de ser bastante intuitivo. Uno de los supuestos que vamos a usar por motivos didácticos, pero que no es necesario, es que las empresas sólo producen un bien y que no usan bienes intermedios.

Considere una economía con:

- *n* bienes $x_i \quad i \in \{1,2,...,n\}$
- *m* factores $z_k \quad k \in \{1,2,...,m\}$
- *H* economías domésticas con función de utilidad $u^h(x^h)$, donde $x^h = (x_1^h, x_2^h,..., x_n^h) \in \Re_+^n$ es el vector de bienes consumidos por la economía doméstica *h*.
- J_i empresas del sector *i* que producen el bien *i* de acuerdo con la función de producción $f^{ji}(z^{ji})$, donde z^{ji} es el vector de factores que utiliza la empresa *j* del sector *i*: $z^{ji} = (z_1^{ji}, z_2^{ji},..., z_m^{ji}) \in \Re_+^m$. La producción de la empresa j de sector i se denota por y^{ji}.
- Cada economía doméstica posee un vector de factores $e^h = (e_1^h, e_2^h,..., e_m^h) \in \Re_+^m$ y la fracción θ^{hji} de los beneficios de la empresa *j* del sector *i*, que se denotan por $\pi^{ji} = p_i y^{ji} - wz^{ji}$. Obviamente las participaciones en los beneficios cada empresa tiene que sumar uno: $\sum_{h=1}^{H} \theta^{hji} = 1$.
- $p = (p_1, p_2,..., p_n) \in \Re_+^n$ es vector de precios de los bienes, siendo p_i el precio del bien *i*.
- $w = (w_1, w_2,..., w_m) \in \Re_+^m$ el vector de precios de los factores, siendo w_k el precio del factor *k*.
- $e = (e_1, e_2,..., e_m) = \left(\sum_{h=1}^{H} e_1^h, \sum_{h=1}^{H} e_2^h,..., \sum_{h=1}^{H} e_m^h \right) = \sum_{h=1}^{H} e^h$ es el vector de dotaciones de factores de la economía.
- $y = (y_1, y_2,..., y_n) = \left(\sum_{j=1}^{J_1} y^{j1}, \sum_{j=1}^{J_2} y^{j2},,..., \sum_{j=1}^{J_n} y^{jn}, \right)$ es el vector de producciones de la economía.
- $x = (x_1, x_2,..., x_n) = \left(\sum_{h=1}^{H} x_1^h, \sum_{h=1}^{H} x_2^h,..., \sum_{h=1}^{H} x_n^h \right) = \sum_{h=1}^{H} x^h$ es el vector de consumos agregados de la economía.

Resumiendo, la notación que vamos a usar sigue las mismas líneas que en equilibrio general con intercambio puro:

- Los superíndices indican agente, bien sean consumidores (superíndice h) o empresas (superíndice ji). Cuando una variable no tiene superíndice es porque no es una variable de un agente individual, puede ser un precio (de un bien p o de un factor w) o una variable agregada.
- Los subíndices nos indican o el bien (subíndice i) o el factor (subíndice k) al que nos referimos. Cuando una variable no tiene subíndice normalmente es porque es un vector, por ejemplo p es el vector de precios. La excepción a esta última regla son los beneficios (π^{ji}) y las participaciones en los beneficios (θ^{hji}) que son números reales (no son vectores) pero no tienen subíndices.

Supuesto 1.1: $u^h\left(x^h\right)$ es una función continua y creciente (en todos sus argumentos) en $\Re^n_+$. Además es estrictamente creciente en todos sus argumentos y estrictamente cuasicóncava en $\Re^n_{++}$.

Las razones por las que introducimos estos supuestos son las mismas que en el caso de intercambio puro:

- Continuidad: es imprescindible para garantizar que el problema de maximización de utilidad de las economías domésticas tenga solución.
- Estricta cuasiconcavidad: este supuesto nos sirve para que la solución del problema de maximización de la utilidad sea única y podamos trabajar con funciones de demanda (no con correspondencias de demanda).
- Monotonicidad (la utilidad es creciente): este supuesto garantiza que todos los precios de los bienes son positivos. Aunque en realidad es un supuesto prescindible, simplifica bastante el análisis.

Supuesto 1.2: $f^{ji}(z^{ji})$ es una función continua, creciente (en todos sus argumentos) y cóncava en $\Re^n_+$, y $f^{ji}(0)=0$. Además es estrictamente creciente en todos sus argumentos y estrictamente cuasicóncava en $\Re^n_{++}$. Además del vector de dotaciones de factores es estrictamente positivo $e \gg 0$.

Las razones por las que introducimos estos supuestos son las siguientes:

- La concavidad junto con el supuesto de que para producir algo se necesitan cantidades positivas de factores ($f^{ji}(0)=0$) implica que no pueden haber rendimientos crecientes a escala:

$$\forall\lambda>1 \quad \lambda f^{ji}(z^{ji}) = \lambda f^{ji}\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda z^{ji}) + \left(1-\frac{1}{\lambda}\right)0\right) \geq \lambda\left(\frac{1}{\lambda} f^{ji}\left(\lambda z^{ji}\right) + \left(1-\frac{1}{\lambda}\right) f^{ji}(0)\right)$$

$$= \lambda\frac{1}{\lambda} f^{ji}\left(\lambda z^{ji}\right) = f^{ji}\left(\lambda z^{ji}\right)$$

Por tanto la continuidad, junto con la concavidad, son condiciones suficientes para que dada un vector de precios de factores w exista un precio p para el que la maximización de beneficios tenga solución. En cualquier caso, estas condiciones son las que garantizan que la función (o correspondencia) de exceso de demanda se comporte lo suficientemente "bien" como para que exista equilibrio (ver apéndice).

- Estrictamente creciente: este supuesto significa que el producto marginal de los factores es siempre positivo en $\Re^n_{++}$. Esto hace que el precio de equilibrio de los factores no pueda ser cero. Este supuesto tiene mucha lógica económica: si usamos más factores producimos más. En realidad es un supuesto prescindible.
- Estricta cuasiconcavidad: es también un supuesto de simplificación, nos garantiza que al menos el problema de minimización de costes tenga solución única (este supuesto también es prescindible).
- El vector de dotaciones de bienes de la economía es estrictamente mayor que cero ($e \gg 0$): si no puede ser que alguno de los bienes no se pueda producir (por ejemplo si se tiene una función de producción Cobb-Douglas).

Asignación: es un vector que especifica la cantidad de bien consumido por cada economía doméstica, la cantidad de bien producido por cada empresa y la cantidad de factor utilizado por cada empresa: $\left(\left(x^h\right)_{h=1}^{H}, \left(\left(y^{ji}, z^{ji}\right)_{j=1}^{J_i} \right)_{i=1}^{n} \right) \in \Re^A_+$, donde

$$A \equiv \underbrace{H}_{\text{número de consumidores}} \times \underbrace{n}_{\substack{\text{número de bienes}\\ \text{comprados por}\\ \text{cada consumidor}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} J_i}_{\substack{\text{número de}\\ \text{empresas}}} \times (\underbrace{1}_{\substack{\text{número de bienes}\\ \text{producidos por}\\ \text{cada empresa}}} + \underbrace{m}_{\substack{\text{número de factores}\\ \text{contratados}\\ \text{por cada empresa}}}).$$

Es decir, una asignación nos detalla todas las variables de decisión de los distintos agentes. Esto significa que nos especifica las cestas de consumo de las economías domésticas (que es la variable sobre la que deciden los consumidores) y la producción y la cantidad de factores que utilizan las empresas (que son las variables que eligen las empresas).

Asignación factible: es una asignación en que la cantidad que se consume de cada bien es menor o igual que la suma de lo producido por las empresas de ese bien, en que la cantidad producida por cada empresa es la que le permite su tecnología (es menor o igual de lo que determina su función de producción) y en el que la cantidad de factores utilizada por las empresas es menor o igual a la cantidad dotación de ese factor en la economía. Es decir, $\left(\left(x^h\right)_{h=1}^{H}, \left(\left(y^{ji}, z^{ji}\right)_{j=1}^{J_i} \right)_{i=1}^{n} \right) \in \Re^A_+$ es factible si y sólo si se cumplen las siguientes restricciones (denominadas restricciones de factibilidad):

- Se consume menos o igual a lo que se produce: $\forall i \quad \sum_{h=1}^{H} x_i^h \le \sum_{j=1}^{J_i} y^{ji}$.
- Cada empresa produce de acuerdo con su tecnología: $\forall j\ \forall i \quad y^{ji} \le f^{ji}(z^{ji})$.
- No se usan más factores que los existentes en la economía: $\forall k \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{J_i} z_k^{ji} \le e_k$.

En definitiva, una asignación factible es una asignación que sea posible dadas las dotaciones de factores de la economía y las tecnología existente (las funciones de producción).

Conjunto factible: conjunto de asignaciones factibles:

$$F(e)=$$
$$\left\{\left(\left(x^h\right)_{h=1}^H,\left(\left(y^{ji},z^{ji}\right)_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^n\right)\in\Re_+^A \,/\, \sum_{h=1}^H x_i^h\le\sum_{j=1}^{J_i}y^{ji},\quad y^{ji}\le f^{ji}(z^{ji}),\quad \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{J_i}z_k^{ji}\le e_k\right\}$$

Asignación superior en sentido de Pareto a otra asignación: Una asignación factible $\left(\left(\tilde{x}^h\right)_{h=1}^H,\left(\left(\tilde{y}^{ji},\tilde{z}^{ji}\right)_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^n\right)\in F(e)$ se dice que es **superior en el sentido de Pareto** a otra asignación factible $\left(\left(\hat{x}^h\right)_{h=1}^H,\left(\left(\hat{y}^{ji},\hat{z}^{ji}\right)_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^n\right)\in F(e)$, si en la primera asignación ninguna economía doméstica está peor que en la segunda asignación y al menos una economía domestica esta (estrictamente) mejor. Es decir, $\forall h \quad u^h(\tilde{x}^h)\ge u^h(\hat{x}^h)$ y $\exists h^* \quad u^{h^*}(\tilde{x}^{h^*})>u^{h^*}(\hat{x}^{h^*})$.

Asignación ineficiente en sentido de Pareto a otra asignación: Una asignación factible $\left(\left(\hat{x}^h\right)_{h=1}^H,\left(\left(\hat{y}^{ji},\hat{z}^{ji}\right)_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^n\right)\in F(e)$ se dice que es ineficiente en sentido de Pareto si existe otra asignación factible $\left(\left(\tilde{x}^h\right)_{h=1}^H,\left(\left(\tilde{y}^{ji},\tilde{z}^{ji}\right)_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^n\right)\in F(e)$ que sea superior en el sentido de Pareto a la primera. Es decir, una asignación factible es ineficiente en sentido de Pareto si podemos mejorar a al menos un consumidor sin empeorar a nadie.

Asignación eficiente en el sentido de Pareto: Una asignación factible $\left(\left(x^h\right)_{h=1}^H,\left(\left(y^{ji},z^{ji}\right)_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^n\right)\in F(e)$ se dice que es eficiente en el sentido de Pareto si no existe ninguna asignación factible superior en el sentido de Pareto a dicha asignación. Es decir, una asignación es eficiente en sentido de Pareto si no podemos mejorar a un consumidor sin empeorar a otro.

Vector de producciones agregada: vector $y\in\Re_+^n$ que especifica la cantidad de cada uno de los bienes que se producen en la economía por todas las empresas: $y=(y_1,y_2,...,y_n)=\left(\sum_{j=1}^{J_1}y^{j1},\sum_{j=1}^{J_2}y^{j2},...,\sum_{j=1}^{J_n}y^{jn}\right)$

Conjunto de posibilidades de producción: conjunto de todas las posibles vectores de producciones agregadas que se pueden producir en una economía dada su tecnología y sus recursos:

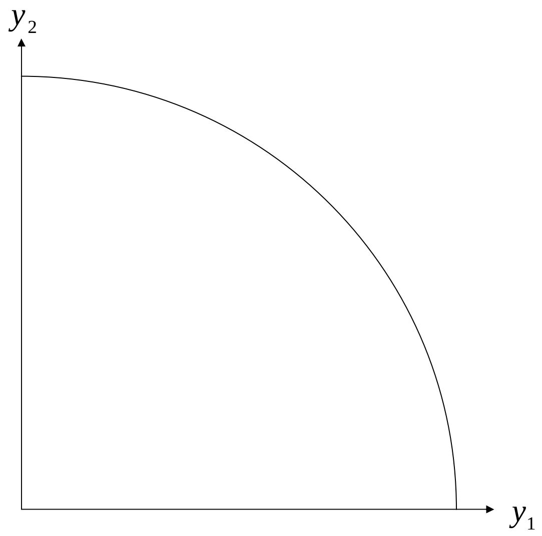
$$CPP(e)=\left\{y\in\Re_+^n \,/\, y_i\le\sum_{j=1}^{J_i}f^{ji}(z^{ji})\text{ y } e_k\ge\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{J_i}z_k^{ji}\right\}$$

Eficiencia productiva: Se dice que un vector de bienes $\hat{y}\in CPP$ es eficiente desde el punto vista productivo si no existe $\tilde{y}\in CPP$ tal que $\forall i \quad \tilde{y}_i\ge\hat{y}_i$ y $\exists i^* \quad \tilde{y}_{i^*}>\hat{y}_{i^*}$. Es decir, una combinación de producción de bienes factible y es eficiente desde el punto vista productivo, si no podemos aumentar la producción de un bien sin reducir la producción de otro.

Si una combinación de bienes perteneciente al *CPP* no es eficiente desde el punto de vista productivo, se dice que es **ineficiente desde el punto de vista productivo**. Es decir, una combinación de producción de bienes factible y es ineficiente desde el punto vista productivo si podemos aumentar la producción de un bien sin reducir la producción de ningún otro.

Dada la monotonía de las preferencias, la eficiencia Paretiana implica la eficiencia productiva, pero no a la inversa. Si estamos produciendo un vector de bienes $\hat{y} \in CPP$ que es ineficiente desde el punto de vista productivo, habrá otra combinación de bienes $\tilde{y} \in CPP$ en que se produzca los mismo o más de todos los bienes $\forall i \quad \tilde{y}_i \geq \hat{y}_i$ y además habrá al menos un bien en que se produzca más $\exists i^* \quad \tilde{y}_{i^*} > \hat{y}_{i^*}$. Si tenemos una asignación tal que se este produciendo ese vector de bienes $\hat{y} \in CPP$ ineficiente desde el punto de vista productivo, siempre podremos mejorar a un consumidor produciendo el vector $\tilde{y}$ y dándole la cantidad adicional de producción del bien i^* a dicho consumidor y dejando a todos los otros consumidores con las mismas combinaciones de consumo que tenían. Por tanto, una asignación en que se produzca una combinación de bienes ineficiente desde el punto de vista productivo nunca podrá ser eficiente en el sentido de Pareto. Sin embargo la inversa de esta afirmación no es cierta: puede haber combinaciones eficientes desde el punto de vista productivo que no maximicen la utilidad de los consumidores y que por tanto no sean eficientes en sentido de Pareto.

Frontera de Posibilidades de producción: $FPP(e)$ conjunto de vectores de bienes pertenecientes al conjunto de posibilidades de producción que son eficientes desde el punto de vista productivo.



Definición: Un **equilibrio Walrasiano** es una asignación $\left(\left(x^h\right)_{h=1}^{H},\left(\left(y^{ji},z^{ji}\right)_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^{n}\right)$, llamada **asignación de equilibrio,** y un vector de precios (p,w), llamado **vector de precios de equilibrio**, tal que:

- Las economías domésticas maximizan su utilidad:

$$x^h \in \arg\max_{x^h} \quad u^h(x^h)$$
$$s.a. \quad px^h \leq we^h + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\theta^{hji}\pi^{ji}$$

- Las empresas maximizan beneficios:

$$(y^{ji},z^{ji}) \in \quad \arg\max_{y^{ji},z^{ji}} p_i y^{ji} - wz^{ji}$$
$$s.a. \quad f^{ji}(z^{ji}) \geq y^{ji}$$

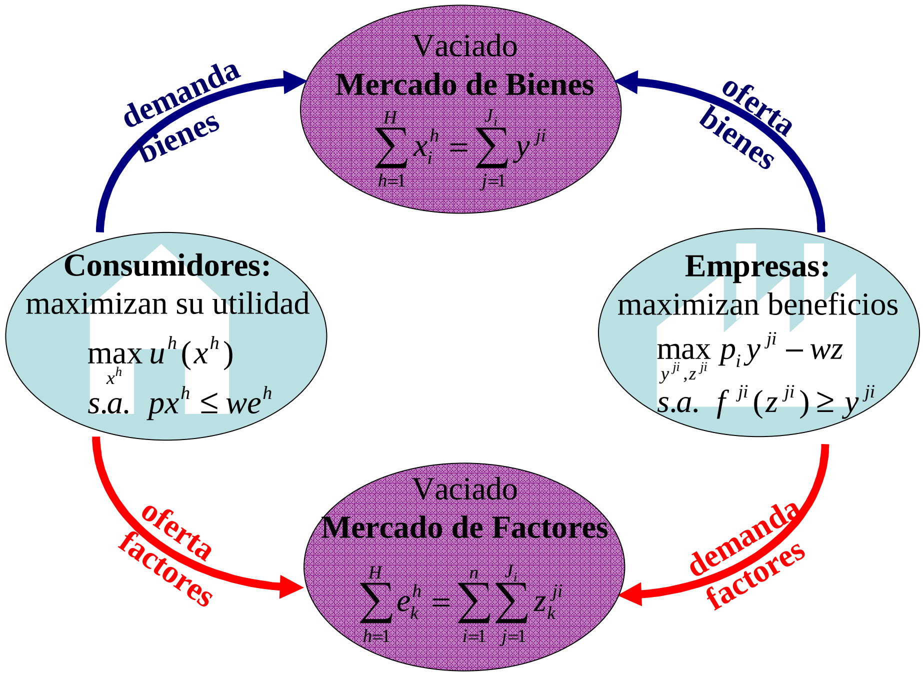
- Los mercados de bienes se vacían:

$$\sum_{h=1}^{H} x_i^h = \sum_{j=1}^{J_i} y^{ji} \quad \forall i \in \{1,2,\dots,n\}$$

- Los mercados de factores se vacían:

$$\sum_{h=1}^{H} e_k^h = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i} z_k^{ji} \quad \forall k \in \{1,2,\dots,m\}$$

Es decir, en el equilibrio Walrasiano todos los agentes maximizan sus funciones objetivo (los consumidores su utilidad y las empresas sus beneficios) y los mercados (tanto de bienes como de factores) se vacían. Como todos los conceptos de equilibrio en Economía, una situación es de equilibrio cuando todos los agentes tienen incentivos a hacer lo que están haciendo.



En el gráfico anterior vemos que en equilibrio los consumidores compran bienes, por tanto representan la demanda en el mercado de bienes, y al ser los propietarios de los factores, son los que ofertan factores en el mercado de factores. Mientras que las empresas juegan el papel opuesto en los mercados: venden bienes en el mercado de bienes, por tanto representan la oferta en dicho mercado, y contratan factores en el mercado de factores, por tanto representan la oferta en dicho mercado.

Existencia: La demostración de existencia de equilibrio Walrasiano es muy parecida a la que vimos para economías de intercambio puro. Básicamente consiste en demostrar que las funciones de exceso de demanda son continuas, definir los precios en un conjunto compacto, definir una función en ese conjunto compacto tal que cuando el exceso de demanda es cero se obtiene un punto fijo, y aplicar el Teorema del Punto Fijo de Brower. El lector interesado puede encontrar esta demostración en el Apéndice.

Normalización de los precios: Note que si $\left\{\left((x^h)_{h=1}^H, \left((y^{ji}, z^{ji})_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^n\right), (p, w)\right\}$ es un equilibrio Walrasiano, entonces $\forall\lambda>0$ $\left\{\left((x^h)_{h=1}^H, \left((y^{ji}, z^{ji})_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^n\right), (\lambda p, \lambda w)\right\}$ es también un equilibrio Walrasiano. Esto es debido a la homogeneidad de grado cero de las demandas de bienes por parte de los consumidores y de la oferta de bienes y demanda de factores por parte de las empresas:

$$\begin{array}{ll} \arg\max\limits_{x^h} \ u^h(x^h) & = \arg\max\limits_{x^h} \ u^h(x^h) \\ s.a. \ \ px^h \le we^h + \sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^m \theta^{hji} \underbrace{\left[p_i y^{ji} - wz^{ji}\right]}_{\pi^{ji}} & s.a. \ \ \lambda px^h \le \lambda we^h + \sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^m \theta^{hji}\left[\lambda p_i y^{ji} - \lambda wz^{ji}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \arg\max\limits_{y^{ji},z^{ji}} p_i y^{ji} - wz^{ji} & = \arg\max\limits_{y^{ji},z^{ji}} \lambda p_i y^{ji} - \lambda wz^{ji} \\ s.a. \ f^{ji}(z^{ji}) \ge y^{ji} & s.a. \ f^{ji}(z^{ji}) \ge y^{ji} \end{array}$$

La razón por la que ocurre esto es que en equilibrio general lo único que es relevante son los precios relativos y obviamente los precios relativos no cambian si se multiplican los precios por una constante positiva:

$$\frac{p_i}{p_j} = \frac{\lambda p_i}{\lambda p_j}$$

Por tanto, siempre se puede normalizar los precios, es decir, poner alguna condición en el vector de precios de equilibrio para que este vector sea el único que satisfaga esa condición. Por ejemplo, se puede igualar el precio de un bien o de un factor a la unidad, se puede igualar un índice de precios a una constante (un índice de precios es una función creciente y homogénea de grado uno en los precios), etc.

Una de las normalizaciones más usadas es igualar el precio de un bien o un factor a la unidad. En este caso se dice que el bien cuyo precio se ha igualado a uno es el “numerario” y el vector de precios que nos queda es el vector de precios relativos de todos los demás bienes o factores con respecto al numerario. O lo que es lo mismo, los precios de todos los bienes estarían en términos del numerario. Por ejemplo, si normalizamos el precio del bien uno a la unidad y denotamos el vector de precios resultante por $(\tilde{p}, \tilde{w})$, entonces el precio del bien i $\tilde{p}_i$ es la cantidad de bien uno que se podría obtener con una unidad del bien i. Con el precio de los factores ocurre exactamente los mismo: $\tilde{w}_k$ es la cantidad que se podría comprar de bien uno con lo que se obtiene por una unidad de factor *k*. Esta es la razón por la que el bien uno se le denominaría numerario.

Ley de Walras: Se desprende de la restricción presupuestaria de los consumidores que se sigue cumpliendo la ley de Walras. Es decir, el valor de los excesos de demanda de todos los mercados tienen que ser cero:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \underbrace{\left(\sum_{h=1}^{H} x_i^h - \sum_{j=1}^{J_i} y^{ji} \right)}_{\substack{\text{Exceso de demanda en} \\ \text{el mercado del bien i}}} + \sum_{k=1}^{m} w_k \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{J_i} z_k^{ji} - \sum_{h=1}^{H} e_k^h \right)}_{\substack{\text{Exceso de demanda en} \\ \text{el mercado del factor k}}} = 0$$

Esto implica que si todos los mercados menos uno están en equilibrio (hay n+m-1 mercados en equilibrio), entonces el mercado restante también está en equilibrio.
Vamos a demostrar la ley de Walras. Dada la monotonicidad de las preferencias la restricción presupuestaria siempre se cumple con igualdad:

$$px^h = we^h + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \theta^{hji} \underbrace{\left[p_i y^{ji} - wz^{ji} \right]}_{\pi^{ji}} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^h = \sum_{k=1}^{m} w_k e_k^h + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \theta^{hji} \underbrace{\left[p_i y^{ji} - wz^{ji} \right]}_{\pi^{ji}}$$

Sumando todos las restricciones presupuestarias de todos los consumidores:

$$\sum_{h=1}^{H} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^h = \sum_{h=1}^{H} \sum_{k=1}^{m} w_k e_k^h + \sum_{h=1}^{H} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{J_i} \theta^{hji} \left(p_i y^{ji} - wz^{ji} \right)$$

Usando el hecho de que las participaciones de los consumidores en cada empresa tiene que sumar uno se obtiene la ley de Walras:

$$\sum_{h=1}^{H} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^h = \sum_{h=1}^{H} \sum_{k=1}^{m} w_k e_k^h + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{J_i} \left(p_i y^{ji} - wz^{ji} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \left(\sum_{h=1}^{H} x_i^h \right) = \sum_{k=1}^{m} w_k \left(\sum_{h=1}^{H} e_k^h \right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{J_i} \left(p_i y^{ji} - \sum_{k=1}^{m} w_k z_k^{ji} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \underbrace{\left(\sum_{h=1}^{H} x_i^h - \sum_{j=1}^{J_i} y^{ji} \right)}_{\substack{\text{Exceso de demanda en} \\ \text{el mercado del bien i}}} + \sum_{k=1}^{m} w_k \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{J_i} z_k^{ji} - \sum_{h=1}^{H} e_k^h \right)}_{\substack{\text{Exceso de demanda en} \\ \text{el mercado del factor k}}} = 0$$

La maximización del valor de la producción de la economía (el PIB):

Proposición 1: Sea $\left\{ \left(\left(\hat{x}^h \right)_{h=1}^{H}, \left(\left(\hat{y}^{ji}, \hat{z}^{ji} \right)_{j=1}^{J_i} \right)_{i=1}^{n} \right), (\hat{p}, \hat{w}) \right\}$ un equilibrio Walrasiano, entonces $\hat{y} \in \arg\max_{y \in CPP} \hat{p}\, y$, donde $\hat{y}_i = \sum_{j=1}^{J_i} \hat{y}^{ji}$.

Demostración:
Sea $\tilde{y} \in CPP$, entonces por definición de CPP existe $\left\{ \left\{ \tilde{z}^{ji} \right\}_{j=1}^{J_i} \right\}_{i=1}^{n}$ tal que $\hat{y}_i = \sum_{j=1}^{J_i} f^{ji}(\tilde{z}^{ji})$ y $e_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{J_i} \tilde{z}_k^{ji}$. Dado que en el equilibrio Walrasiano se maximizan los beneficios:

$$\hat{p}_i \hat{y}^{ji} - \hat{w}\hat{z}^{ji} \geq \hat{p}_i \tilde{y}^{ji} - \hat{w}\tilde{z}^{ji}$$

Agregando dentro de cada sector:

$$\hat{p}_i \sum_{j=1}^{J_i} \hat{y}^{ji} - \hat{w} \sum_{j=1}^{J_i} \hat{z}^{ji} \geq \hat{p}_i \sum_{j=1}^{J_i} \tilde{y}^{ji} - \hat{w} \sum_{j=1}^{J_i} \tilde{z}^{ji} \Leftrightarrow$$

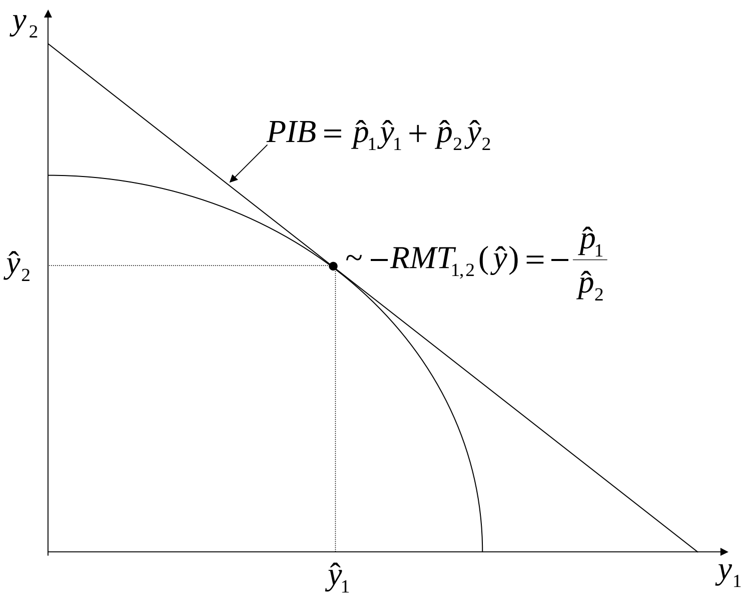
$$\hat{p}_i \hat{y}_i - \hat{w} \sum_{j=1}^{J_i} \hat{z}^{ji} \geq \hat{p}_i \tilde{y}_i - \hat{w} \sum_{j=1}^{J_i} \tilde{z}^{ji}$$

Agregando en todos los sectores:

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{p}_i \hat{y}_i - \hat{w} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{J_i} \hat{z}^{ji} \geq \sum_{i=1}^{n} \hat{p}_i \tilde{y}_i - \hat{w} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{J_i} \tilde{z}^{ji} \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}\hat{y} - \hat{w}e \geq \hat{p}\tilde{y} - \hat{w}e \Leftrightarrow \hat{p}\hat{y} \geq \hat{p}\tilde{y}$$

Q.E.D.



Esta proposición nos dice que en el equilibrio se maximiza el valor de la producción "agregada" de la economía (es decir, el PIB).

Corolario: Sea $\left\{\left(\left(\hat{x}^h\right)_{h=1}^{H}, \left(\left(\hat{y}^{ji}, \hat{z}^{ji}\right)_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^{n}\right), \left(\hat{p}, \hat{w}\right)\right\}$ un equilibrio Walrasiano y sea $\hat{y}$ el vector de producciones agregadas asociado a dicho equilibrio, entonces $\hat{y}$ es eficiente desde el punto de vista productivo (está en la FPP).

Demostración: (por contradicción)

Note primero que dada la estricta monotonicidad de las preferencias, el vector de precios tiene que ser estrictamente positivo $\hat{p} \gg 0$, de otra manera el problema de maximización de la utilidad no tiene solución.

Suponga que $\hat{y}$ no es eficiente desde el punto de vista productivo, entonces $\exists \tilde{y} \in CPP(e) / \forall i \quad \tilde{y}_i \geq \hat{y}_i, \quad \exists i^* \quad \tilde{y}_{i^*} > \hat{y}_{i^*} \Rightarrow \hat{p}\tilde{y} > \hat{p}\hat{y}$, lo cual es una contradicción con la proposición 1. $\Rightarrow\Leftarrow$ *Q.E.D.*

Proposición (1er Teorema del Bienestar): toda asignación de equilibrio es eficiente en el sentido de Pareto.

Demostración: (por contradicción)

Sea $\left\{\left(\left(\hat{x}^h\right)_{h=1}^H,\left(\left(\hat{y}^{ji},\hat{z}^{ji}\right)_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^n\right),(\hat{p},\hat{w})\right\}$ un equilibrio Walrasiano, y considere que existe una asignación factible $\left(\left(\tilde{x}^h\right)_{h=1}^H,\left(\left(\tilde{y}^{ji},\tilde{z}^{ji}\right)_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^n\right)\in F(e)$ tal que $u^h(\tilde{x}^h)\geq u^h(\hat{x}^h)\forall h\in\{1,2,...,H\}$ y $\exists h* \, u^{h*}(\tilde{x}^{h*})>u^h(\hat{x}^{h*})$. Dado que en equilibrio los consumidores están maximizando su utilidad y que las preferencias son monótonas:

$$\left.\begin{array}{ll}\forall h\in\{1,2,...,H\} & \hat{p}\tilde{x}^h\geq\hat{p}\hat{x}^h\\ \exists h* & \hat{p}\tilde{x}^{h*}>\hat{p}\hat{x}^{h*}\end{array}\right\}\Rightarrow\sum_{h=1}^H\hat{p}\tilde{x}^h>\sum_{h=1}^H\hat{p}\hat{x}^h\Leftrightarrow$$

$$\hat{p}\sum_{h=1}^H\tilde{x}^h>\hat{p}\sum_{h=1}^H\hat{x}^h\Leftrightarrow\hat{p}\tilde{x}>\hat{p}\hat{x}$$

Note que dada la monotonicidad de las preferencias, la restricción presupuestara se cumple con igualdad en el equilibrio:

$$\forall h\quad \hat{p}\hat{x}^h=\hat{w}e^h+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{J_i}\theta^{hji}\hat{\pi}^{ji}$$

Sumando las restricciones presupuestarias llegamos a la conclusión que el valor del consumo en equilibrio se iguala al valor de la producción:

$$\hat{p}\hat{x}=\hat{p}\sum_{h=1}^H\hat{x}^h=\sum_{h=1}^H\hat{p}\hat{x}^h=\hat{p}\sum_{h=1}^H\hat{x}^h=\sum_{h=1}^H\hat{w}e^h+\sum_{h=1}^H\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{J_i}\theta^{hji}\hat{\pi}^{ji}=\hat{w}\sum_{h=1}^He^h+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{J_i}\left(\hat{p}\hat{y}^{ji}-\hat{w}\hat{z}^{ji}\right)=$$

$$we+\sum_{i=1}^n\left(\hat{p}\hat{y}_i-\hat{w}\hat{z}_i\right)=\hat{w}e+\hat{p}\hat{y}-\hat{w}\sum_{i=1}^n\hat{z}_i=\hat{w}e+\hat{p}\hat{y}-\hat{w}e=\hat{p}\hat{y}$$

donde en la penúltima igualdad hemos usado la condición de vaciado de mercado de factores.

$$\hat{p}\tilde{y}\geq\hat{p}\tilde{x}>\hat{p}\hat{x}=\hat{p}\hat{y}$$

Contradicción con Proposición 1. $\Rightarrow\Leftarrow$ *Q.E.D.*

3. Equilibrio General: Enfoque Diferencial

En esta sección vamos a suponer que tanto las funciones de utilidad como las funciones de producción son diferenciables de segundo orden. Este supuesto nos permitirá caracterizar el equilibrio Walrasiano a través de las condiciones de primer orden. Además Adoptaremos el siguiente supuesto que implica que la soluciones de la maximización de la utilidad y la minimización del coste son soluciones interiores. Este supuesto simplifica bastante el análisis ya que nos permite desechar las soluciones esquina, pero no es imprescindible.

Supuesto 3.1: $\forall h, i, i^* \quad i \neq i^* \quad \forall x^h_{-i^*} » 0 \quad \lim_{x^h_{i^*} \to 0} RMS^h_{i^*,i}(x^h_{i^*}, x^h_{-i^*}) = +\infty$, donde $x^h_{-i} \in \Re^{n-1}_+$ es el vector de consumo de la economía doméstica *h* de todos los bienes excepto del bien *i*. Además, $\forall j, k, k^* \quad k \neq k^* \quad \forall z^j_{-k^*} » 0 \quad \lim_{z^j_{k^*} \to 0} RMST^j_{k^*,k}(z^j_{k^*}, z^j_{-k^*}) = +\infty$, donde $z^j_{-k} \in \Re^{m-1}_+$ es el vector de factores utilizados por la empresa *j* de todos los factores excepto del factor *k.*

Gráficamente este supuesto significa que las curvas de indiferencia y las curvas isocuantas tienen una asíntota vertical y otra horizontal en los respectivos ejes vertical y horizontal.

Aunque el supuesto 3.1 no garantiza que todas las empresas produzcan cantidades positivas, en esta sección nos concentraremos en este caso.

3.1 Frontera de Posibilidades de Producción y Relación Marginal de Transformación

Como ya hemos indicado anteriormente el conjunto de posibilidades de producción es el conjunto de todos los posibles vectores de producciones agregadas que se pueden producir en una economía dada su tecnología y sus recursos:

$$CPP(e) = \left\{ y \in \Re^n_+ \,/\, y_i \leq \sum_{j=1}^{J_i} f^{ji}(z^{ji}) \text{ y } e_k \geq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{J_i} z^{ji}_k \right\}$$

Mientras que la Frontera de Posibilidades de producción $FPP(e)$ es el conjunto de vectores de bienes pertenecientes al conjunto de posibilidades de producción que son eficientes desde el punto de vista productivo, es decir, que no existe otro vector de producciones agregadas en el CPP, tal que se produzca más o igual de todos los bienes, y se produzca una cantidad estrictamente mayor de alguno de ellos. Por tanto si un vector de producciones agregadas $\hat{y}$ pertenece a la FPP, tendrá que satisfacer la siguiente ecuación:

$$
\begin{aligned}
(\hat{y},\hat{z}) = \arg\max_{y,z} \quad & y_1 \\
& y_i \geq \hat{y}_i \qquad i \in \{2,3,\ldots,n\} \\
& y_i \leq \sum_{j=1}^{J_i} y^{ji} \qquad i \in \{1,2,\ldots,n\} \\
& y^{ji} \leq f^{ji}(z^{ji}) \quad i \in \{1,2,\ldots,n\} \quad j \in \{1,2,\ldots,J_i\} \\
& e_k \geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i} z_k^{ji} \quad k \in \{1,2,\ldots,m\}
\end{aligned}
$$

Este problema de maximización se puede resumir de la siguiente forma (eliminando las producciones):

$$
\begin{aligned}
\hat{z} \in \arg\max_{z} \quad & \sum_{j=1}^{J_1} f^{j1}(z^{j1}) \\
& \sum_{j=1}^{J_i} f^{ji}(z^{ji}) \geq \hat{y}_i \quad i \in \{2,3,\ldots,n\} \\
& e_k \geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i} z_k^{ji} \qquad k \in \{1,2,\ldots,m\}
\end{aligned}
$$

donde $(\hat{y}_1,\hat{y}_2,\ldots,\hat{y}_n) = \left(\sum_{j=1}^{J_1} f^{j1}(\hat{z}^{j1}), \sum_{j=2}^{J_2} f^{j2}(\hat{z}^{j2}),\ldots,\sum_{j=1}^{J_n} f^{jn}(\hat{z}^{jn})\right)$ sería el punto de la FPP asociado a la anterior asignación de factores. El Lagrangiano asociado a este problema de maximización sería:

$$
\sum_{j=1}^{J_1} f^{j1}(z^{j1}) + \sum_{i=2}^{n}\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{J_i} f^{ji}(z^{ji}) - \hat{y}_i\right) + \sum_{k=1}^{m}\omega_k\left(e_k - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i} z_k^{ji}\right) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i}\mu_k^{ji} z_k^{ji}
$$

Suponiendo que la solución de este problema sea interior ($z_k^{ji} > 0, \mu_k^{ji} = 0$), las condiciones de primer orden serían:

$$
\lambda_i \frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}} = \omega_k
$$

donde $\lambda_1 = 1$. Esta condición de primer orden implica las siguientes condiciones de **eficiencia productiva**:

- **Eficiencia en la combinación factorial entre empresas:**

$$
\left.\begin{array}{l}
\lambda_i \dfrac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_{\tilde{k}}^{ji}} = \omega_{\tilde{k}} \\[2ex]
\lambda_i \dfrac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}} = \omega_k
\end{array}\right\} \Rightarrow RMST_{\tilde{k},k}^{ji}(z^{ji}) = \frac{\dfrac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_{\tilde{k}}^{ji}}}{\dfrac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}}} = \frac{\omega_{\tilde{k}}}{\omega_k} = RMST_{\tilde{k},k}^{\breve{j}\breve{i}}(z^{\breve{j}\breve{i}}) \qquad \text{(FPP.1)}
$$

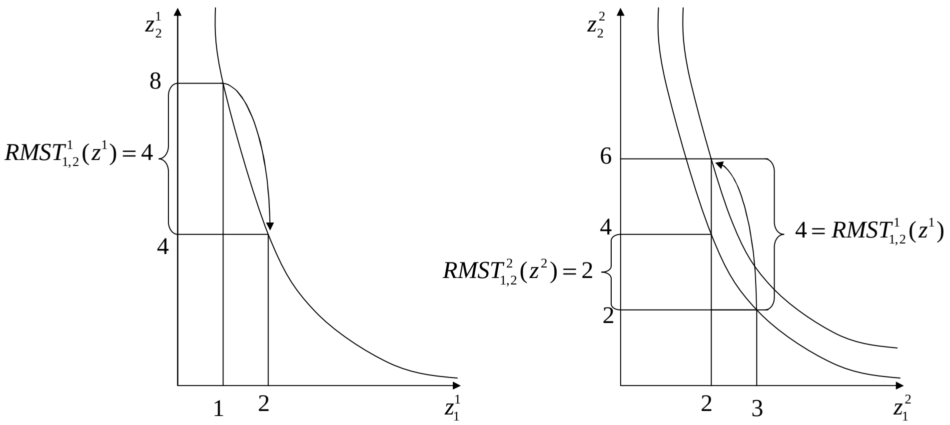
Es decir, la relación marginal de substitución técnica entre dos factores, se iguala a su precio sombra relativo. Además la relación marginal de substitución técnica entre dos factores se iguala entre todas las empresas de todos los sectores. Esta condición de igualación de las relaciones marginales de substitución técnica de todas las empresas de todos los sectores de la economía la denominaremos **condición de eficiencia de la combinación factorial entre empresas:**

$$
\forall \tilde{k}, k \in \{1,2,\ldots,m\} \quad \forall i, \breve{i} \in \{1,2,\ldots,n\} \quad \forall ji \in J_i \quad \forall \breve{j}\breve{i} \in J_{\breve{i}} \quad RMST_{\tilde{k},k}^{ji}(z^{ji}) = RMST_{\tilde{k},k}^{\breve{j}\breve{i}}(z^{\breve{j}\breve{i}})
$$

Si la asignación de factores entre las distintas empresas no cumple esta condición entonces se pueden reasignar los factores para que se produzca más o igual de todos los bienes y estrictamente más de al menos un bien. Para ver esto consideremos que por ejemplo $RMST^{ji}_{\tilde{k},k}(z^{ji}) > RMST^{\breve{j}\breve{i}}_{\tilde{k},k}(z^{\breve{j}\breve{i}})$. Si quitamos una unidad del factor *k* a la empresa $\breve{j}\breve{i}$ y se lo damos a la empresa ji y quitamos $RMST^{ji}_{\tilde{k},k}(z^{ji})$ unidades del factor $\tilde{k}$ a la empresa ji y se lo damos a la empresa $\breve{j}\breve{i}$, por definición de RMST la producción de la empresa ji seguirá siendo la misma. La producción de la empresa $\breve{j}\breve{i}$ será mayor porque si a la empresa $\breve{j}\breve{i}$ le quitamos un unidad de bien k y le damos $RMST^{\breve{j}\breve{i}}_{\tilde{k},k}(z^{\breve{j}\breve{i}})$ unidades de bien $\tilde{k}$ su producción seguirá siendo igual, pero como le estamos dando una cantidad de factores ($RMST^{ji}_{\tilde{k},k}(z^{ji})$) mayor que su relación marginal de substitución técnica ($RMST^{\breve{j}\breve{i}}_{\tilde{k},k}(z^{\breve{j}\breve{i}})$) la producción de la empresa $\breve{j}\breve{i}$ aumentará. Por tanto si $RMST^{ji}_{\tilde{k},k}(z^{ji}) \neq RMST^{\breve{j}\breve{i}}_{\tilde{k},k}(z^{\breve{j}\breve{i}})$, siempre podemos reasignar los factores para que la producción de cada una de las empresas (ji y $\breve{j}\breve{i}$) sea igual a mayor que antes y al menos una de las empresas esté produciendo más.

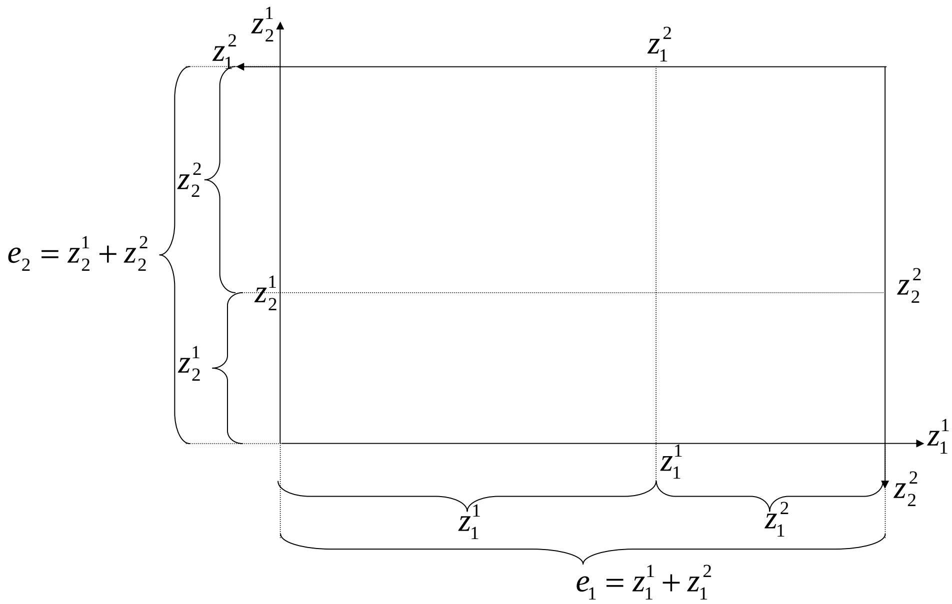
En el ejemplo del gráfico tenemos que la RMST entre el factor uno y dos de la empresa uno es 5 mientras que el de la empresa dos es 2 (es menor). Esto ofrece la posibilidad de reasignar los recursos de tal manera que se pueda aumentar la producción de una empresa sin reducir la de la otra. Si le quitamos una unidad de factor uno a la empresa dos y se los damos a la empresa uno, y le quitamos 4 unidades de factor uno a la empresa uno y se lo damos a la empresa dos, se desprende de la definición de RMST que la producción de la empresa uno no varía. Sin embargo a la empresa dos le estamos quitando 1 unidad del factor uno pero le estamos dando 4 unidades del facto dos, para que la producción de la empresa dos siguiera siendo la misma después de quitarle una unidad del factor uno sólo necesitaríamos 2 unidades del factor dos (la RMST de la empresa dos). Esto significa que con esta reasignación de factores hemos aumentado la producción de la empresa dos sin reducir la producción de la empresa uno. Por tanto la asignación original de factores (en que $RMST^{1}_{1,2}(z^{1}) > RMST^{2}_{1,2}(z^{2})$) no era eficiente desde un punto de vista productivo. Es decir, no estábamos en la FPP sino en el interior del conjunto de posibilidades de producción.

Reasignación de factores para el caso en que $RMST^1_{1,2}(z^1) > RMST^2_{1,2}(z^2)$

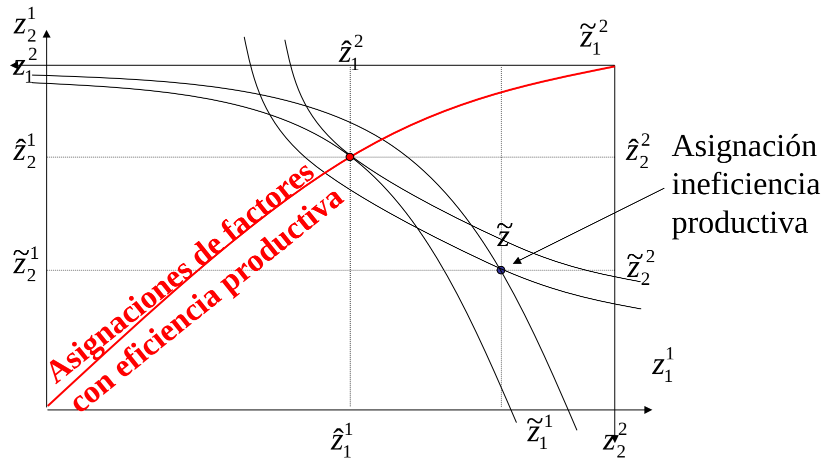


Cuando tenemos dos factores, dos bienes y una empresa por cada bien, esta situación se puede representar en la **caja de Edgeworth de factores productivos** (no de bienes).

Caja de Edgeworth de Factores



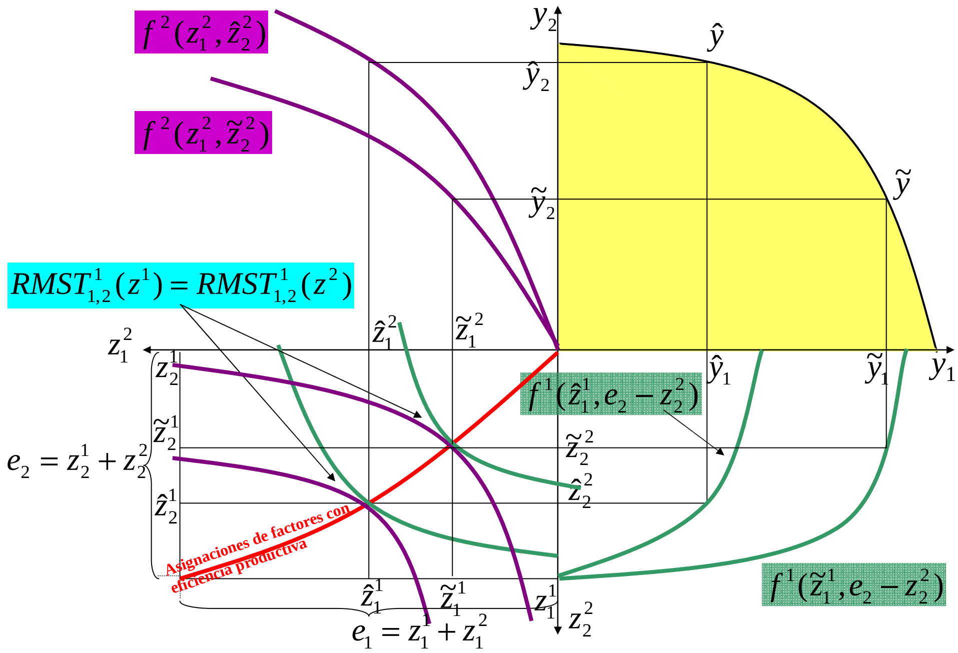
Asignaciones de factores con eficiencia productiva



En el siguiente gráfico se representa el conjunto de posibilidades de producción de una economía con dos factores, dos bienes y dos empresas.

Frontera de Posibilidades de Producción 2× 2× 2

(2 bienes, 2 factores, 2 empresas)



- **Eficiencia en la distribución de tamaños de las empresas dentro de un mismo sector:**

La anterior condición de eficiencia, la igualación de las RMSTs entre las empresas, se tenía que dar independientemente del sector en que estuvieran las empresas. La siguiente condición se aplica sólo para las empresas del mismo sector, e intuitivamente significa que dentro del mismo sector se tiene que dar más recursos a las empresas más productivas.

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_i \dfrac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}} = \omega_k \\ \lambda_i \dfrac{\partial f^{\tilde{j}i}(z^{\tilde{j}i})}{\partial z_k^{\tilde{j}i}} = \omega_k \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}} = \frac{\partial f^{\tilde{j}i}(z^{\tilde{j}i})}{\partial z_k^{\tilde{j}i}}$$

Por tanto:

$$\forall k \in \{1,2,\ldots,m\} \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\} \quad \forall ji, \tilde{j}i \in J_i \quad \frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}} = \frac{\partial f^{\tilde{j}i}(z^{\tilde{j}i})}{\partial z_k^{\tilde{j}i}} \qquad \text{(FPP.2)}$$

Esta condición nos dice que los productos marginales de las empresas del mismo sector (que producen el mismo bien) se tienen que igualar.
Para comprender el significado de esta condición considere que el factor *k* tiene una productividad marginal mayor en la empresa j que en la empresa $\tilde{j}$, ambas productoras del bien i: $\frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}} > \frac{\partial f^{\tilde{j}i}(z^{\tilde{j}i})}{\partial z_k^{\tilde{j}i}}$. Si le quitamos una unidad de factor *k* a la empresa $\tilde{j}$ y se la damos a la empresa *j*, el aumento de la producción de la empresa j será igual a $\frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}}$ unidades del bien *i*, mientras que la reducción de la producción de la empresa $\tilde{j}$ será de $\frac{\partial f^{\tilde{j}i}(z^{\tilde{j}i})}{\partial z_k^{\tilde{j}i}}$. Por tanto con esta reasignación de recursos se consigue un aumento de la producción del bien *i* de $\frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}} - \frac{\partial f^{\tilde{j}i}(z^{\tilde{j}i})}{\partial z_k^{\tilde{j}i}} > 0$ unidades.

Por ejemplo, si la productividad marginal del factor *k* en la empresa uno, productora del bien uno, es de 10 unidades y el producto marginal del factor *k* en la empresa dos, también productora del bien 1, es de 4 unidades. Quitando una unidad de factor k a la empresa dos y dándosela a la una, reducimos la producción de la empresa dos en 4 unidades pero aumentamos la producción de la empresa uno en 10 unidades. Por tanto, el aumento neto de la producción del bien uno es igual a 6 unidades.

Esta condición de eficiencia en la distribución de tamaños de las empresas dentro de un mismo sector es equivalente a decir que, dado los factores que se dedican a producir en un sector, se maximiza la producción de dicho sector. Para verlo vamos a definir la **función de producción agregada del sector i** $f^i(z^i)$ como la máxima cantidad de producción del sector i cuando la cantidad de factores utilizados por las empresas del sector i están representados por el vector z^i:

$$f^i(z^i) = \max_{z^{i1}, z^{i2}, \ldots, z^{iJ_i}} \sum_{j=1}^{J_i} f^{ji}(z^{ji})$$
$$\text{s.a.:} \quad z_k^i \geq \sum_{j=1}^{J_i} z_k^{ji}$$

Función Lagrangiana:

$$f^i(z^i) = \max_{z^{i1}, z^{i2}, \ldots, z^{iJ_i}} \sum_{j=1}^{J_i} f^{ji}(z^{ji}) + \sum_{k=1}^{m} \omega_k \left[z_k^i - \sum_{j=1}^{J_i} z_k^{ji} \right]$$

Condiciones de primer orden para solución interior:

$$\frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}}=\omega_k$$

De las condiciones de primer orden se desprende que la productividad marginal de cada factor se igual entre todas las empresas del sector:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}}=\omega_k \\ \dfrac{\partial f^{\tilde{j}i}(z^{\tilde{j}i})}{\partial z_k^{\tilde{j}i}}=\omega_k\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}}=\frac{\partial f^{\tilde{j}i}(z^{\tilde{j}i})}{\partial z_k^{\tilde{j}i}}$$

Relación Marginal de Transformación del bien i por bien $\tilde{i}$, o coste de oportunidad del bien i en términos del bien $\tilde{i}$, en un punto de la frontera de posibilidades de producción y ($RMT_{i,\tilde{i}}(y)$): es la cantidad en que se tiene que reducir de bien $\tilde{i}$ para aumentar en una unidad la producción del bien i a lo largo de la FPP, manteniendo la producción de todos los demás bienes (sin ser $\tilde{i}$ e i) constante.

En términos diferenciales la relación marginal de transformación del bien i por bien $\tilde{i}$ es simplemente menos la derivada de la producción del bien $\tilde{i}$ con respecto al bien i a lo largo de la FPP:

$$RMT_{i,\tilde{i}}(y)=-\left.\frac{\partial y_{\tilde{i}}}{\partial y_i}\right|_{FPP}$$

Para calcula $RMT_{i,\tilde{i}}(y)$ vamos a denominar $y_{\tilde{i}}(y_{-\tilde{i}},e)$ a la cantidad máxima de bien $\tilde{i}$ que se puede producir si se produce de los demás bienes el vector $y_{-\tilde{i}}=(y_1,y_2,...,y_{\tilde{i}-1},y_{\tilde{i}+1},...y_n)$, y dado el vector de dotación de factores e:

$$\begin{aligned} y_{\tilde{i}}(y_{-\tilde{i}},e)=\max_{z}\quad & \sum_{j=1}^{J_{\tilde{i}}} f^{j\tilde{i}}(z^{j\tilde{i}}) \\ & \sum_{j=1}^{J_i} f^{ji}(z^{ji})\geq y_i \quad i\in\{1,...,i-1,i+1,...,n\} \\ & e_k\geq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i} z_k^{ji} \qquad k\in\{1,2,...,m\}\end{aligned}$$

Lagrangiano:

$$\sum_{j=1}^{J_{\tilde{i}}} f^{j\tilde{i}}(z^{j\tilde{i}})+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\tilde{i}}}^{n}\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{J_i} f^{ji}(z^{ji})-y_i\right)+\sum_{k=1}^{m}\omega_k\left(e_k-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i} z_k^{ji}\right)$$

Condiciones de primer Orden (solución interior):

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f^{\tilde{j}\tilde{i}}(z^{\tilde{j}\tilde{i}})}{\partial z_k^{\tilde{j}\tilde{i}}}=\omega_k \\ \lambda_i\dfrac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}}=\omega_k\end{array}\right\}\Rightarrow \lambda_i=\frac{\dfrac{\omega_k}{\frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}}}}{\dfrac{\omega_k}{\frac{\partial f^{\tilde{j}\tilde{i}}(z^{\tilde{j}\tilde{i}})}{\partial z_k^{\tilde{j}\tilde{i}}}}}=\frac{\dfrac{\partial f^{\tilde{j}\tilde{i}}(z^{\tilde{j}\tilde{i}})}{\partial z_k^{\tilde{j}\tilde{i}}}}{\dfrac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}}}$$

Aplicando el teorema de la envolvente:

$$y_{\tilde{i}}(y_{-\tilde{i}},e)=\max_{z}\sum_{j=1}^{J_{\tilde{i}}} f^{j\tilde{i}}(z^{j\tilde{i}})+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\tilde{i}}}^{n}\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{J_i} f^{ji}(z^{ji})-y_i\right)\Rightarrow$$

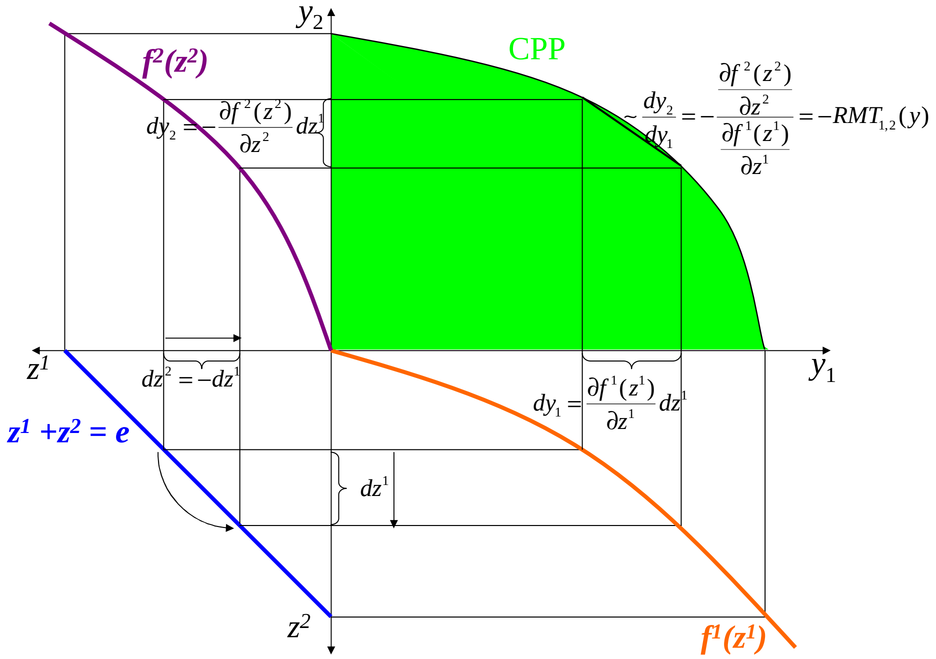
$$\frac{\partial y_{\tilde{i}}(y_{-\tilde{i}},e)}{\partial y_i}=-\lambda_i=\frac{\dfrac{\partial f^{\tilde{j}\tilde{i}}(z^{\tilde{j}\tilde{i}})}{\partial z_k^{\tilde{j}\tilde{i}}}}{\dfrac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}}}$$

Por tanto:

$$RMT_{i,\tilde{i}}(y)=-\left.\frac{\partial y_{\tilde{i}}}{\partial y_i}\right|_{FPP}=\frac{\dfrac{\partial f^{\tilde{j}\tilde{i}}(z^{\tilde{j}\tilde{i}})}{\partial z_k^{\tilde{j}\tilde{i}}}}{\dfrac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}}} \qquad \text{(FPP.3)}$$

En el siguiente gráfico se pone un ejemplo de la *RMT* cuando hay un solo factor productivo, dos bienes (1 y 2) y dos empresas, una por cada bien. Dado que sólo hay dos empresas, vamos a ponerle superíndice uno a la empresa que produce el bien 1 y superíndice 2 a la empresa que produce el bien 2. Si queremos aumentar la producción del bien 1, tenemos que aumentar el número de recursos dedicados a la producción de dicho bien. Ese aumento de los recursos se denota en el gráfico por dz^1. Una de las condiciones de factibilidad nos dice que no podemos usar más recursos de los existentes en la economía *e*, por tanto: $z^1+z^2=e$. Esta restricción de factibilidad implica que lo que el aumento en los recursos dedicamos a la producción del bien uno tiene que ser igual a la reducción en los recursos dedicados a la producción del bien dos. Por tanto, $dz^2=-dz^1$. Esta redistribución de recursos implicará un aumento en la producción del bien uno igual a $dy_1=\frac{\partial f^1(z^1)}{\partial z^1}dz^1$ y una reducción en la producción del bien dos igual a $dy_2=-\frac{\partial f^2(z^2)}{\partial z^2}dz^1$. Por tanto, lo que se ha reducido la producción del bien dos por unidad de aumento bien uno será: $\frac{dy_2}{dy_1}=-\frac{\frac{\partial f^2(z^2)}{\partial z^2}}{\frac{\partial f^1(z^1)}{\partial z^1}}=-RMT_{1,2}(y)$.

RMT con dos bienes, dos empresas y un solo factor



Coste Marginal y Relación Marginal de Transformación:
Considere el problema de minimización de costes de una empresa:

$$c^{ji}(w, y^{ji}) = \min_{z^{ji}} wz^{ji}$$
$$s.a: f^{ji}(z^{ji}) \geq y^{ji}$$

Usando la función Lagrangiana:

$$c^{ji}(w, y^{ji}) = \min_{z^{ji}} wz^{ji} + \lambda\left[y^{ji} - f^{ji}(z^{ji})\right]$$

Las condiciones de primer orden para solución interior son:

$$w_k = \lambda \frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{z_k^{ji}} \Rightarrow \lambda = \frac{w_k}{\frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{z_k^{ji}}}$$

Usando el Teorema de la Envolvente:

$$\frac{\partial c^{ji}(w, y^{ji})}{\partial y^{ji}} = \lambda = \frac{w_k}{\frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{z_k^{ji}}}$$

Usando la anterior ecuación vemos que la relación marginal de transformación entre dos bienes es igual al cociente de los costes marginales de las empresas de esos dos bienes (ver FP2):

$$RMT_{i,\tilde{i}}(y) = \frac{\frac{\partial f^{\tilde{j}\tilde{i}}(z^{\tilde{j}\tilde{i}})}{\partial z_k^{\tilde{j}\tilde{i}}}}{\frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}}} = \frac{\frac{w_k}{\frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}}}}{\frac{w_k}{\frac{\partial f^{\tilde{j}\tilde{i}}(z^{\tilde{j}\tilde{i}})}{\partial z_k^{\tilde{j}\tilde{i}}}}} = \frac{\frac{\partial c^{ji}(w, y^{ji})}{\partial y^{ji}}}{\frac{\partial c^{\tilde{j}\tilde{i}}(w, y^{\tilde{j}\tilde{i}})}{\partial y^{\tilde{j}\tilde{i}}}}$$

3.2 Eficiencia en el sentido de Pareto (óptimo de Pareto)

Si una asignación factible es eficiente en sentido de Pareto (es un óptimo de Pareto) si no podemos mejora a un consumidor sin empeorar a otro. Esto es lo mismo que decir que dada la utilidad de todos los consumidores menos uno, no se puede mejorar a este último consumidor. Es decir, se maximiza la utilidad de un consumidor sujeto a la restricción de que los otros consumidores disfrutan de su nivel de utilidad. Por tanto, si una asignación factible $\left(\left(\hat{x}^h\right)_{h=1}^H, \left(\left(\hat{y}^{ji}, \hat{z}^{ji}\right)_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^n\right)$ es eficiente en sentido de Pareto, entonces tiene que ser la solución del siguiente problema de optimización:

$$\max_{\left(\hat{x}^h\right)_{h=1}^H, \left(\left(y^{ji}, z^{ji}\right)_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^n} u^1(x^1)$$

$$\begin{array}{ll} u^h(x^h) \geq \hat{u}^h & h \in \{2,3,\ldots,H\} \\ y_i \geq \sum_{h=1}^{H} x_i^h & i \in \{1,3,\ldots,n\} \\ \sum_{j=1}^{J_i} f^{ji}(z^{ji}) \geq y_i & i \in \{1,3,\ldots,n\} \\ e_k \geq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{J_i} z_k^{ji} & k \in \{1,2,\ldots,m\} \end{array}$$

donde $\hat{u}^h \equiv u^h(x^h)$. El anterior problema de optimización lo podemos simplificar substituyendo y_i por $\sum_{j=1}^{J_i} f^{ji}(z^{ji})$, ya que sabemos que la restricción $\sum_{j=1}^{J_i} f^{ji}(z^{ji}) \geq y_i$ se tiene que cumplir con igualdad en el óptimo:

$$\max_{\left(\hat{x}^h\right)_{h=1}^H, \left(\left(z^{ji}\right)_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^n} u^1(x^1)$$

$$\begin{array}{ll} u^h(x^h) \geq \hat{u}^h & h \in \{2,3,\ldots,H\} \\ \sum_{j=1}^{J_i} f^{ji}(z^{ji}) \geq \sum_{h=1}^{H} x_i^h & i \in \{1,3,\ldots,n\} \\ e_k \geq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{J_i} z_k^{ji} & k \in \{1,2,\ldots,m\} \end{array}$$

El Lagrangiano correspondiente sería:

$$L = u^1(x^1) + \sum_{h=2}^{H} \lambda^h \left(u^h(x^h) - \hat{u}^h\right) + \sum_{i=1}^{n} \wp_i \left(\sum_{j=1}^{J_i} f^{ji}(z^{ji}) - \sum_{h=1}^{H} x_i^h \right) + \sum_{k=1}^{m} \omega_k \left(e_k - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{J_i} z_k^{ji} \right)$$

Las condiciones de primer orden para solución interior son:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i^h} = \lambda^h \frac{\partial u^h(x^h)}{\partial x_i^h} - \wp_i = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_k^{ji}} = \wp_i \frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial x_i^h} - \omega_k = 0$$

Usando estas condiciones de primer orden se obtienen las siguientes condiciones de eficiencia:

- **Eficiencia en la combinación factorial entre empresas:**

$$\left.\begin{array}{l} \wp_i \dfrac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z^{ji}_{\tilde{k}}} = \omega_{\tilde{k}} \\ \wp_i \dfrac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z^{ji}_{k}} = \omega_k \end{array}\right\} \Rightarrow RMST^{ji}_{\tilde{k},k}(z^{ji}) = \dfrac{\dfrac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z^{ji}_{\tilde{k}}}}{\dfrac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z^{ji}_{k}}} = \dfrac{\omega_{\tilde{k}}}{\omega_k} = RMST^{\tilde{j}\tilde{i}}_{\tilde{k},k}(z^{\tilde{j}\tilde{i}}) \Rightarrow$$

$$\boxed{RMST^{ji}_{\tilde{k},k}(z^{ji}) = RMST^{\tilde{j}\tilde{i}}_{\tilde{k},k}(z^{\tilde{j}\tilde{i}})} \qquad \text{(OP1)}$$

Es decir se tienen que igualar las relaciones marginales de substitución técnica entre todas las empresas de todos los sectores de la economía. Esta condición es la primera de las que tiene que satisfacer una asignación de factores para que el vector de producción resultante esté en la FPP. Por tanto es una condición necesaria para la eficiencia productiva.

- **Eficiencia en la distribución de tamaños de las empresas dentro de un mismo sector:**

$$\left.\begin{array}{l} \wp_i \dfrac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z^{ji}_{k}} = \omega_k \\ \wp_i \dfrac{\partial f^{\tilde{j}i}(z^{\tilde{j}i})}{\partial z^{\tilde{j}i}_{k}} = \omega_k \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z^{ji}_{k}} = \dfrac{\partial f^{\tilde{j}i}(z^{\tilde{j}i})}{\partial z^{\tilde{j}i}_{k}}$$

$$\boxed{\dfrac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z^{ji}_{k}} = \dfrac{\partial f^{\tilde{j}i}(z^{\tilde{j}i})}{\partial z^{\tilde{j}i}_{k}}} \qquad \text{(OP2)}$$

Esta condición nos dice que los productos marginales de las empresas del <u>mismo sector</u> (que producen el mismo bien) se tienen que igualar. Esta condición es la segunda de las que tiene que satisfacer una asignación de factores para que el vector de producción resultante esté en la FPP. Por tanto es una condición necesaria para la eficiencia productiva. Las condiciones (OP1) y (OP2) implican **eficiencia productiva**. Si la asignación de factores entre las distintas empresas no cumplen estas dos condiciones entonces se pueden reasignar los factores para que se produzca más o igual de todos los bienes y estrictamente más de al menos un bien.

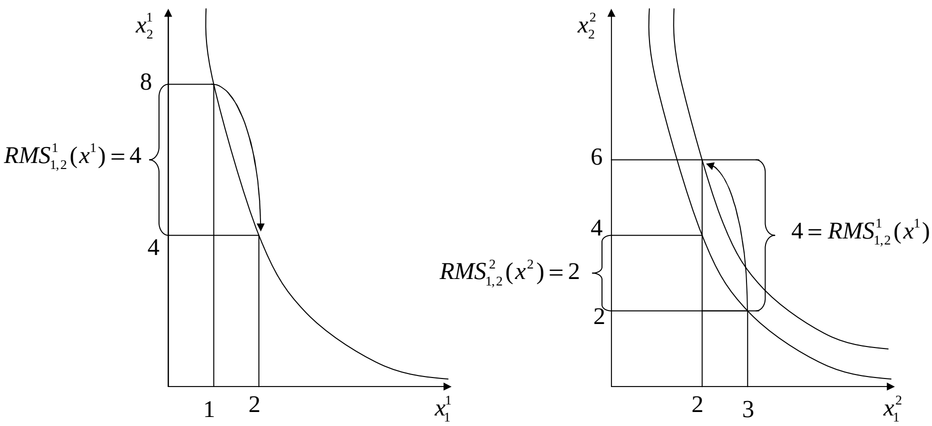
- **Eficiencia asignativa del consumo o eficiencia de la asignación de bienes entre consumidores:**

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lambda^h \dfrac{\partial u^h(x^h)}{\partial x^h_i} = \wp_i \\ \lambda^h \dfrac{\partial u^h(x^h)}{\partial x^h_{\tilde{i}}} = \wp_{\tilde{i}} \end{array}\right\} \Rightarrow RMS^h_{i,\tilde{i}}(x^h) = \dfrac{\dfrac{\partial u^h(x^h)}{\partial x^h_i}}{\dfrac{\partial u^h(x^h)}{\partial x^h_{\tilde{i}}}} = \dfrac{\wp_i}{\wp_{\tilde{i}}} \\ \left.\begin{array}{l} \lambda^{\breve{h}} \dfrac{\partial u^{\breve{h}}(x^{\breve{h}})}{\partial x^{\breve{h}}_i} = \wp_i \\ \lambda^{\breve{h}} \dfrac{\partial u^{\breve{h}}(x^{\breve{h}})}{\partial x^{\breve{h}}_{\tilde{i}}} = \wp_{\tilde{i}} \end{array}\right\} \Rightarrow RMS^{\breve{h}}_{i,\tilde{i}}(x^{\breve{h}}) = \dfrac{\dfrac{\partial u^{\breve{h}}(x^{\breve{h}})}{\partial x^{\breve{h}}_i}}{\dfrac{\partial u^{\breve{h}}(x^{\breve{h}})}{\partial x^{\breve{h}}_{\tilde{i}}}} = \dfrac{\wp_i}{\wp_{\tilde{i}}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$RMS_{i,\tilde{i}}^{h}(x^{h}) = RMS_{i,\tilde{i}}^{\tilde{h}}(x^{\tilde{h}}) \qquad \text{(OP3)}$$

Esta condición nos dice que las relaciones marginales de substitución entre dos bienes se igualan para todos los consumidores. Si no se da esta condición, siempre se puede distribuir las cantidades producidas de tal manera que se puede mejorar a un consumidor sin perjudicar a nadie. Para ver esto considere que tenemos dos consumidores (1 y 2) y dos bienes (1y 2) y además $RMS_{1,2}^{1}(x^{1}) > RMS_{1,2}^{2}(x^{2})$. Si le quitamos al consumidor 2 una unidad de bien 1 y se la damos al consumidor 1 y le quitamos $RMS_{1,2}^{1}(x^{1})$ unidades del bien 2 al consumidor 1 y se las damos al consumidor 2, por definición de RMS el consumidor 1 seguirá estando exactamente igual. Sin embargo, dado que $RMS_{1,2}^{1}(x^{1}) > RMS_{1,2}^{2}(x^{2})$, le estamos dando al consumidor 2 una cantidad de bien 2 mayor de la que se necesitaría para compensarle de la pérdida de la unidad de bien 1. Por tanto con esta redistribución de bienes entre los consumidores el agente 1 disfruta del mismo nivel de utilidad que antes pero el agente 2 esta estrictamente mejor. Por tanto si $RMS_{i,\tilde{i}}^{h}(x^{h}) > RMS_{i,\tilde{i}}^{h}(x^{h})$, siempre se puede hacer una mejora en sentido de Pareto en la asignación de bienes entre los consumidores.

Reasignación de bienes para el caso en que $RMS_{1,2}^{1}(x^{1}) > RMS_{1,2}^{2}(x^{2})$



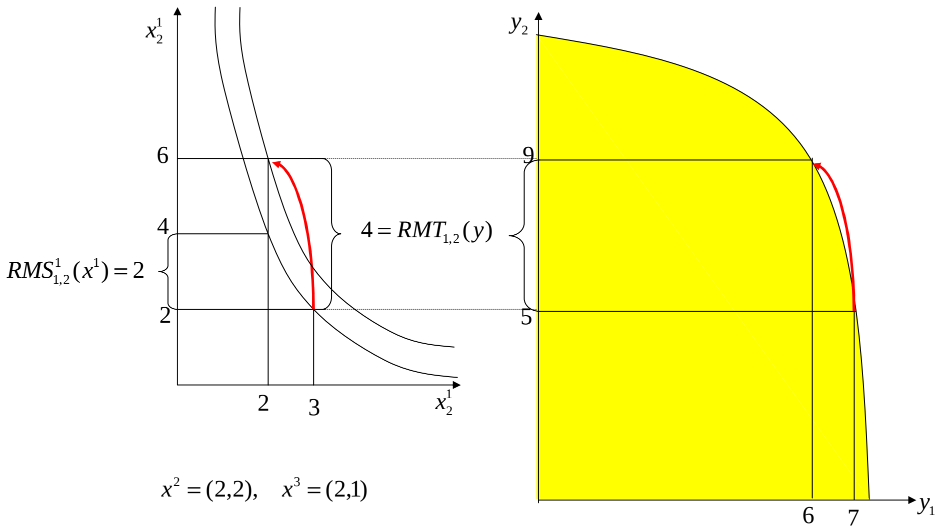
- **Eficiencia de la combinación productiva o elección de la combinación de producción en la FPP que maximiza la utilidad de los consumidores:**

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lambda^h \dfrac{\partial u^h(x^h)}{\partial x_i^h}=\wp_i \\ \lambda^h \dfrac{\partial u^h(x^h)}{\partial x_{\tilde{i}}^h}=\wp_{\tilde{i}}\end{array}\right\} \Rightarrow RMS_{i,\tilde{i}}^h(x^h)=\dfrac{\dfrac{\partial u^h(x^h)}{\partial x_i^h}}{\dfrac{\partial u^h(x^h)}{\partial x_{\tilde{i}}^h}}=\dfrac{\wp_i}{\wp_{\tilde{i}}} \\ \left.\begin{array}{l}\wp_i \dfrac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}}=\omega_k \\ \wp_{\tilde{i}} \dfrac{\partial f^{\tilde{j}\tilde{i}}(z^{\tilde{j}\tilde{i}})}{\partial z_k^{\tilde{j}\tilde{i}}}=\omega_k\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\dfrac{\omega_k}{\dfrac{\partial f^{\tilde{j}\tilde{i}}(z^{\tilde{j}\tilde{i}})}{\partial z_k^{\tilde{j}\tilde{i}}}}}{\dfrac{\omega_k}{\dfrac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}}}}=\dfrac{\dfrac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}}}{\dfrac{\partial f^{\tilde{j}\tilde{i}}(z^{\tilde{j}\tilde{i}})}{\partial z_k^{\tilde{j}\tilde{i}}}}=RMT_{i,\tilde{i}}(y)=\dfrac{\wp_i}{\wp_{\tilde{i}}}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

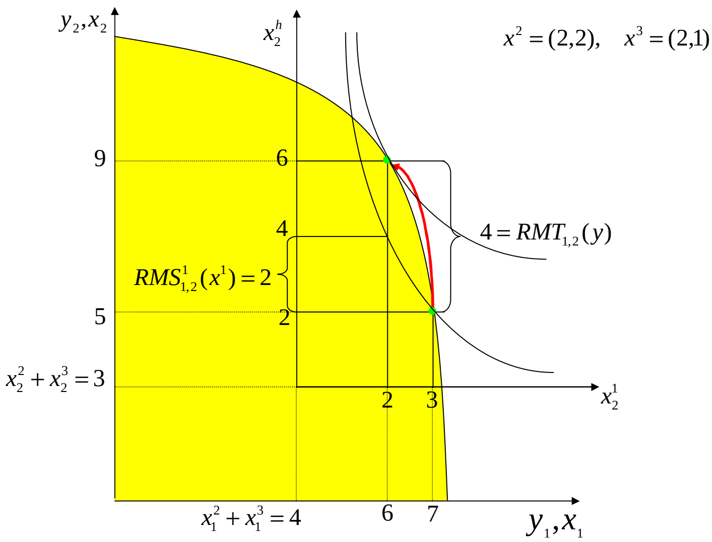
$$RMS_{i,\tilde{i}}^h(x^h)=RMT_{i,\tilde{i}}(y) \qquad \text{(OP4)}$$

Esta condición nos dice que la relación marginal de substitución entre dos bienes de todos los consumidores se tiene que igualar a la relación marginal de transformación entre estos dos bienes. Si esto no ocurre siempre podemos elegir un vector de producción tal que todos los consumidores estén mejor o igual y al menos uno esté estrictamente mejor. Para ver esto considere que $RMS_{1,2}^1(x^1)<RMT_{1,2}(y)$. Considere que reducimos la producción del bien 1 en una unidad y aumentamos la producción del bien 2 en $RMT_{1,2}(y)$ unidades, y reducimos el consumo del bien 1 por parte del consumidor 1 en 1 unidad y aumentamos el consumo del bien 2 por parte del consumidor 1 en $RMT_{1,2}(y)$ unidades. Por definición de RMT la asignación resultante sigue siendo factible. Además le estamos dando al consumidor 1 más unidades del bien 2 ($RMT_{1,2}(y)$ unidades) de las que le compensaría por la pérdida de la unidad del bien 1 ($RMS_{1,2}^1(x^1)$ unidades), por tanto el consumidor 1 estaría mejor después de este cambio en la combinación de producción.
En el siguiente ejemplo la RMS entre el bien uno y el dos es de 2 unidades de bien dos, mientras que la RMT es de 4 unidades del bien 2. Si reducimos la producción del bien uno en una unidad y amentamos la producción del bien 2 en 4 unidades, y le quitamos al consumidor uno una unidad de bien 1 y le damos 4 de bien 2, el consumidor 1 mejorará mientras que el resto de los consumidores de la economía seguirán exactamente igual. Por tanto se puede hacer una mejora en sentido de Pareto eligiendo otra combinación productiva.

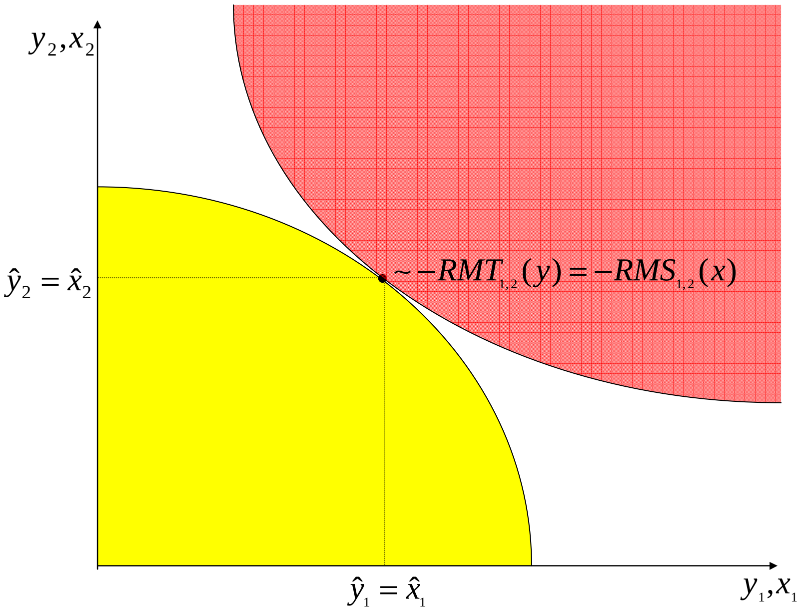
Reasignación de la producción para el caso en que $RMS^1_{1,2}(x^1) < RMT_{1,2}(y)$



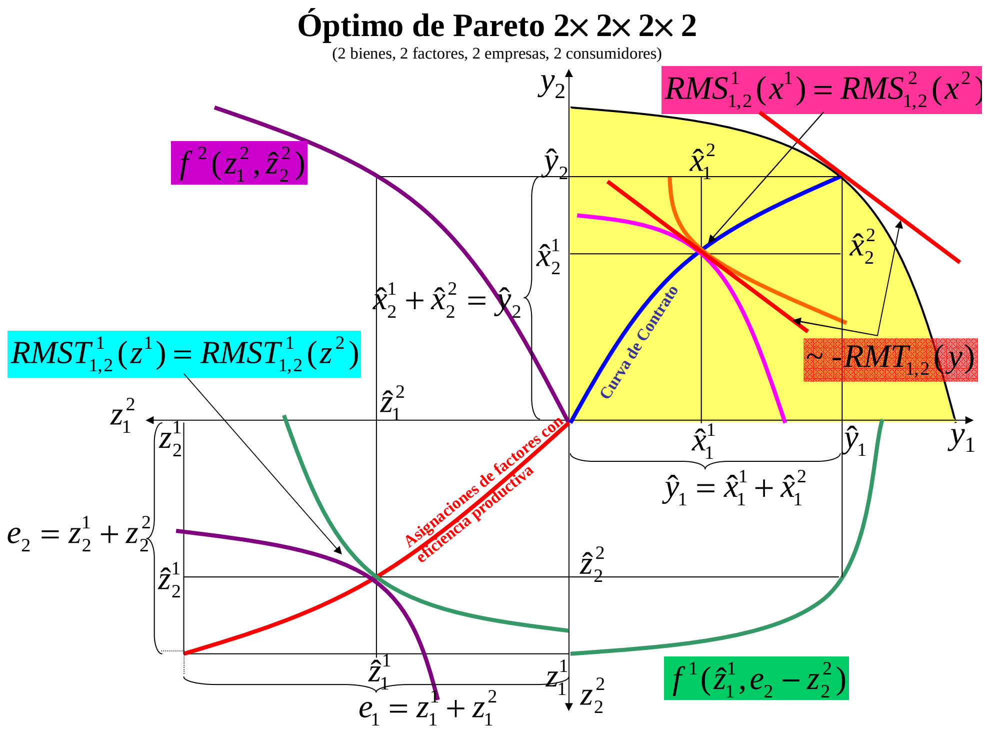
Reasignación de la producción para el caso en que $RMS^1_{1,2}(x^1) < RMT_{1,2}(y)$



En el caso de que haya un solo consumidor la eficiencia de la combinación productiva significa que se elige la combinación de producción de la FPP en que se maximiza la utilidad del único consumidor de la economía. En el siguiente gráfico se puede observar que aquella combinación de producción de la FPP en la que la RMT es igual a la RMS, no hay intercepción entre el conjunto de contorno superior estricto del único consumidor de la economía y el conjunto de posibilidades de producción. Eso significa que para que el consumidor estuviera mejor tendría que consumir una combinación de bienes no factible (fuera del conjunto de posibilidades de producción). Por tanto cuando la RMT se iguala a la RMS se maximiza la utilidad del único consumidor de la economía.



En el siguiente gráfico se representa una asignación eficiente en sentido de Pareto para el caso de que haya, dos consumidores, dos bienes, dos empresas (una por sector) y dos factores productivos:



3.4 Equilibrio Walrasiano

La definición de equilibrio Walrasiano que estábamos usando es la siguiente**:**

Definición 1: Un **equilibrio Walrasiano** es una asignación $\left(\left(x^h\right)_{h=1}^{H}, \left(\left(y^{ji}, z^{ji}\right)_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^{n}\right)$, llamada **asignación de equilibrio,** y un vector de precios (p, w), llamado **vector de precios de equilibrio**, tal que:

- Las economías domésticas maximizan su utilidad:
$$x^h \in Arg \max_{x^h} \quad u^h(x^h)$$
$$s.a. \quad px^h \le we^h + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \theta^{hji}\pi^{ji}$$
- Las empresas maximizan beneficios:
$$(y^{ji}, z^{ji}) \in \quad \arg\max_{y^{ji}, z^{ji}} p_i y^{ji} - wz^{ji}$$
$$s.a. \ \ f^{ji}(z^{ji}) \ge y^{ji}$$
- Los mercados de bienes se vacían:
$$\sum_{h=1}^{H} x_i^h = \sum_{j=1}^{J_i} y^{ji} \quad \forall i \in \{1,2,...,n\}$$
- Los mercados de factores se vacían:
$$\sum_{h=1}^{H} e_k^h = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i} z_k^{ji} \quad \forall k \in \{1,2,...,m\}$$

Cuando todas las economías domésticas y todas las empresas tienen soluciones interiores, equilibrio Walrasiano también se puede definir de la siguiente manera:

Definición 2: Un **equilibrio Walrasiano** es una asignación $\left(\left(x^h\right)_{h=1}^{H}, \left(\left(y^{ji}, z^{ji}\right)_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^{n}\right)$, llamada **asignación de equilibrio,** y un vector de precios (p, w), llamado **vector de precios de equilibrio**, tal que:

- Las economías domésticas maximizan su utilidad:
$$RMS_{\tilde{i},i}^{h}(x^h) = \frac{p_{\tilde{i}}}{p_i}$$
$$px^h = we^h + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \theta^{hji}\left(p_i y^{ji} - wz^{ji}\right)$$
- Las empresas maximizan beneficios:
$$p_i \frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}} = w_k$$
$$y^{ji} = f^{ji}(z^{ji})$$
- Los mercados de bienes se vacían:
$$\sum_{h=1}^{H} x_i^h = \sum_{j=1}^{J_i} y^{ji} \quad \forall i \in \{1,2,...,n\}$$
- Los mercados de factores se vacían:
$$\sum_{h=1}^{H} e_k^h = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i} z_k^{ji} \quad \forall k \in \{1,2,...,m\}$$

Con esta definición, el equilibrio Walrasiano esta en forma de sistema de ecuaciones, que nos permitiría calcularlo:

$$RMS^h_{\tilde{i},i}(x^h)=\frac{p_{\tilde{i}}}{p_i} \qquad (n-1)\times H \qquad (EW1)$$

$$px^h=we^h+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\theta^{hji}\left(p_i y^{ji}-wz^{ji}\right) \qquad H \qquad (EW2)$$

$$p_i\frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}}=w_k \qquad m\times\sum_{i=1}^{n}J_i \qquad (EW3)$$

$$y^{ji}=f^{ji}(z^{ji}) \qquad \sum_{i=1}^{n}J_i \qquad (EW4)$$

$$\sum_{h=1}^{H}x_i^h=\sum_{j=1}^{J_i}y^{ji} \qquad n \qquad (EW5)$$

$$\sum_{h=1}^{H}e_k^h=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i}z_k^{ji} \qquad m \qquad (EW6)$$

Por tanto tenemos un sistema de $n\times H+(m+1)\times\sum_{i=1}^{n}J_i+n+m$ ecuaciones, con $n\times H+(m+1)\times\sum_{i=1}^{n}J_i+n+m$ incógnitas que son la asignación de consumo a las economías domésticas $\left(x^h\right)_{h=1}^{H}$ ($n\times H$ incógnitas), la asignación de factores a las empresa y la producciones de las empresas $\left(\left(y^{ji},z^{ji}\right)_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^{n}$ ($(m+1)\times\sum_{i=1}^{n}J_i$ incógnitas), el vector de precios de los bienes p (n incógnitas) y el vector de precios de los factores w (m incógnitas). Por tanto tenemos un sistema de $n\times H+(m+1)\times\sum_{i=1}^{n}J_i+n+m$ ecuaciones con $n\times H+(m+1)\times\sum_{i=1}^{n}J_i+n+m$ incógnitas. Lo que hay que tener en cuenta es que si (p^*,w^*) es un vector de precios de equilibrio, entonces para cualquier constante positiva λ, el vector de precios $(\lambda p^*,\lambda w^*)$ es también un vector de precios de equilibrio:

$$RMS^h_{\tilde{i},i}(x^h)=\frac{\lambda p_{\tilde{i}}}{\lambda p_i}$$

$$\lambda px^h=\lambda we^h+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\theta^{hji}\left(\lambda p_i y^{ji}-\lambda wz^{ji}\right)$$

$$\lambda p_i\frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}}=\lambda w_k$$

$$y^{ji}=f^{ji}(z^{ji})$$

$$\sum_{h=1}^{H}x_i^h=\sum_{j=1}^{J_i}y^{ji}$$

$$\sum_{h=1}^{H}e_k^h=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i}z_k^{ji}$$

Por tanto nos "sobra" un precio, es decir tenemos que normalizar el vector de precios de alguna manera: igualando el precio de algún bien o de algún factor a la unidad, normalizando con un índice de precios,…etc. Si sumamos las restricciones presupuestarias de todas las economías domésticas obtenemos:

$$p\sum_{h=1}^{H} x^h = w\sum_{h=1}^{H} e^h + \sum_{h=1}^{H}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i}\theta^{hji}\left(p_i y^{ji} - wz^{ji}\right)$$

$$p\sum_{h=1}^{H} x^h = w\sum_{h=1}^{H} e^h + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i}\left(p_i y^{ji} - wz^{ji}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\left(\sum_{h=1}^{H} x_i^h\right) = \sum_{k=1}^{m} w_k\left(\sum_{h=1}^{H} e_k^h\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i}\left(p_i y^{ji} - \sum_{k=1}^{m} w_k z_k^{ji}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\left(\sum_{h=1}^{H} x_i^h - \sum_{j=1}^{J_i} y^{ji}\right) = \sum_{k=1}^{m} w_k\left(\sum_{h=1}^{H} e_k^h - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i} z_k^{ji}\right)$$

Con lo que obtenemos una combinación de las condiciones de vaciado de los mercados de bienes y de factores. Por tanto, podemos eliminar o bien una restricción presupuestaria, o bien una condición de vaciado de un mercado de bines o un mercado de factores: si están en equilibrio ($n+m-1$) mercados, entonces están en equilibrio el mercado restante.

Resumiendo tenemos $n\times H + (m+1)\times\sum_{i=1}^{n} J_i + n + m - 1$ incógnitas (normalizando algún precio) y $n\times H + (m+1)\times\sum_{i=1}^{n} J_i + n + m - 1$ ecuaciones (eliminando alguna ecuación de vaciado de mercado o alguna restricción presupuestaria):

$p_i \dfrac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}} = w_k$		$m\times\sum_{i=1}^{n} J_i$
$y^{ji} = f^{ji}(z^{ji})$		$\sum_{i=1}^{n} J_i$
$RMS_{\tilde{i},i}^{h}(x^h) = \dfrac{p_{\tilde{i}}}{p_i}$		$(n-1)\times H$
$px^h = we^h + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\theta^{hji}\left(p_i y^{ji} - wz^{ji}\right)$	H	$H+n+m-1$ ecuaciones (sobra una)
$\sum_{h=1}^{H} x_i^h = \sum_{j=1}^{J_i} y^{ji}$	n	
$\sum_{h=1}^{H} e_k^h = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i} z_k^{ji}$	m	

Usando ecuación (EW3) obtenemos:

$$
\left.\begin{aligned}
p_i \frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_{\tilde{k}}^{ji}} &= w_{\tilde{k}} \\
p_i \frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_{k}^{ji}} &= w_{k}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow RMST_{\tilde{k},k}^{ji}(z^{ji}) = \frac{\dfrac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_{\tilde{k}}^{ji}}}{\dfrac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_{k}^{ji}}} = \frac{w_{\tilde{k}}}{w_k}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
p_i \frac{\partial f^{\breve{j}i}(z^{\breve{j}i})}{\partial z_{\tilde{k}}^{\breve{j}i}} &= w_{\tilde{k}} \\
p_i \frac{\partial f^{\breve{j}i}(z^{\breve{j}i})}{\partial z_{k}^{\breve{j}i}} &= w_{k}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow RMST_{\tilde{k},k}^{\breve{j}i}(z^{\breve{j}i}) = \frac{\dfrac{\partial f^{\breve{j}i}(z^{\breve{j}i})}{\partial z_{\tilde{k}}^{\breve{j}i}}}{\dfrac{\partial f^{\breve{j}i}(z^{\breve{j}i})}{\partial z_{k}^{\breve{j}i}}} = \frac{w_{\tilde{k}}}{w_k} \Rightarrow
$$

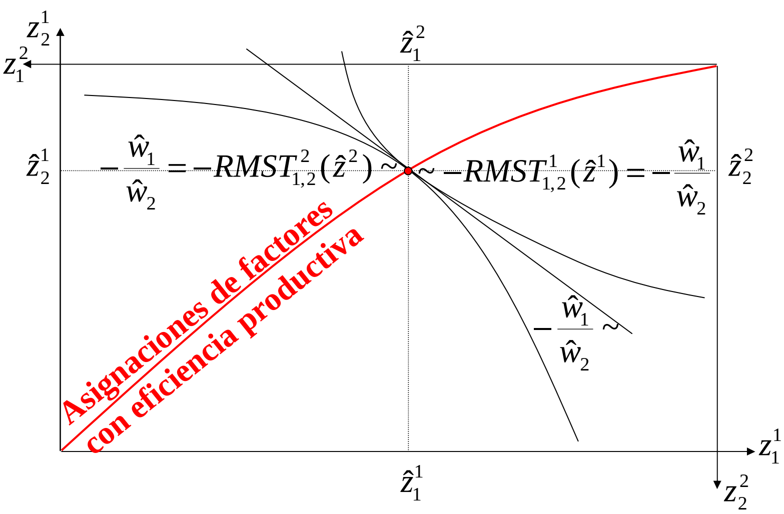
$$
\boxed{RMST_{\tilde{k},k}^{ji}(z^{ji}) = RMST_{\tilde{k},k}^{\breve{j}i}(z^{\breve{j}i})} \qquad \text{(EW7)}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
p_i \frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_{k}^{ji}} &= w_{k} \\
p_i \frac{\partial f^{\breve{j}i}(z^{\breve{j}i})}{\partial z_{k}^{\breve{j}i}} &= w_{k}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_{k}^{ji}} = \frac{w_k}{p_i} = \frac{\partial f^{\breve{j}i}(z^{\breve{j}i})}{\partial z_{k}^{\breve{j}i}} \Rightarrow
$$

$$
\boxed{\frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_{k}^{ji}} = \frac{\partial f^{\breve{j}i}(z^{\breve{j}i})}{\partial z_{k}^{\breve{j}i}}} \qquad \text{(EW.8)}
$$

Es decir, que las relaciones marginales de substitución técnica entre dos bienes se igualan entre empresas (condición EW7). Además las productividades marginales de las empresas que están en el mismo sector (que producen lo mismo) se igualan (EW.8). Estas eran las condiciones de optimalidad para estar en la frontera de posibilidades de producción (Ecuación FPP.1 y FPP.2). Por tanto, el equilibrio Walrasiano es eficiente desde el punto de vista productivo.

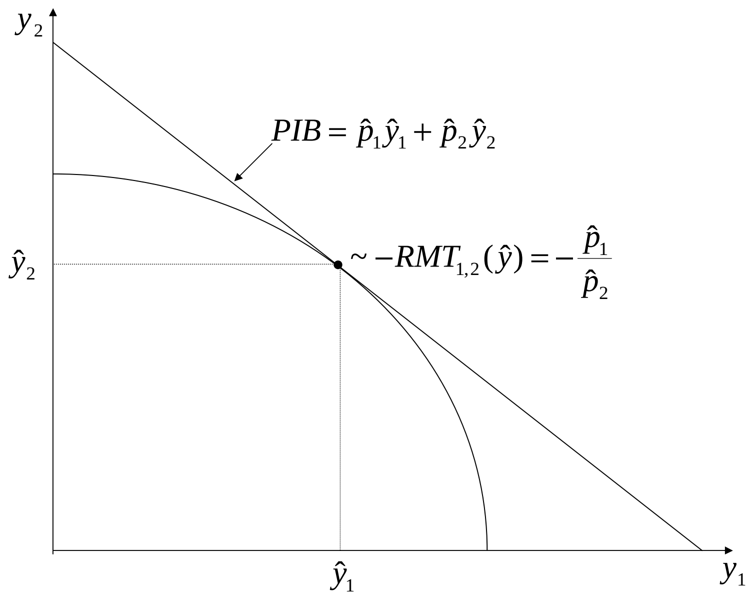
Asignaciones de Factores en el Equilibrio Walrasiano



Usando ecuación (EW3) obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} p_{\tilde{i}}\dfrac{\partial f^{\tilde{j}\tilde{i}}(z^{\tilde{j}\tilde{i}})}{\partial z_k^{\tilde{j}\tilde{i}}}=w_k \\ p_i\dfrac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}}=w_k \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{p_{\tilde{i}}}{p_i}=\frac{\dfrac{w_k}{\frac{\partial f^{\tilde{j}\tilde{i}}(z^{\tilde{j}\tilde{i}})}{\partial z_k^{\tilde{j}\tilde{i}}}}}{\dfrac{w_k}{\frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}}}}=\frac{\dfrac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}}}{\dfrac{\partial f^{\tilde{j}\tilde{i}}(z^{\tilde{j}\tilde{i}})}{\partial z_k^{\tilde{j}\tilde{i}}}}=RMT_{\tilde{i},i}(y) \qquad \text{(EW.9)}$$

donde en la última igualdad hemos usado la ecuación (FPP.3). Por tanto, en el equilibrio Walrasiano los precios relativos se igualan a la relación marginal de transformación. Esto significa que en el equilibrio Walrasiano se maximiza el valor de la producción (el PIB).

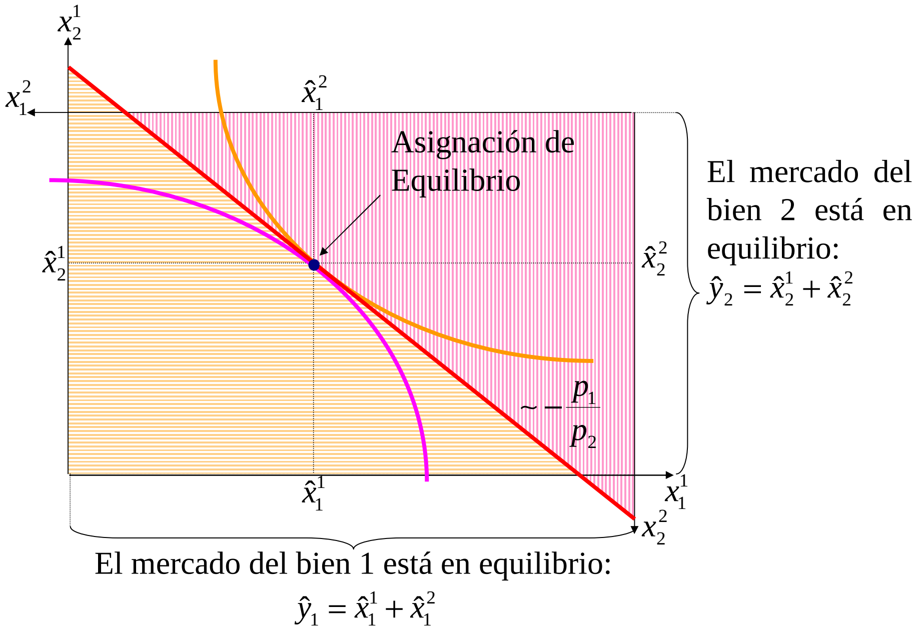


Se desprende de la ecuación (EW1) que las relaciones marginales de substitución entre dos bienes se igualan para todos los consumidores:

$$RMS^h_{\tilde{i},i}(x^h)=\frac{p_{\tilde{i}}}{p_i}=RMS^{\tilde{h}}_{\tilde{i},i}(x^{\tilde{h}}) \qquad \text{(EW.10)}$$

Por tanto en el equilibrio Walrasiano hay eficiencia asignativa en el consumo (condición OP3).

Asignación de consumo en el Equilibrio Walrasiano



Usando las ecuaciones (EW.7) a (EW.9) obtenemos:

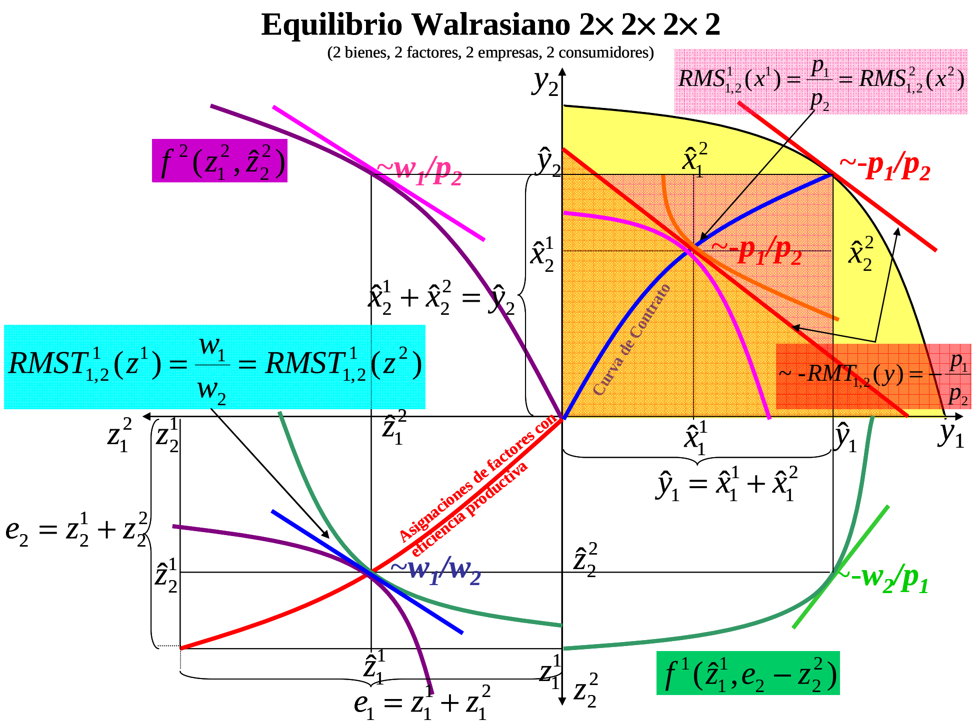
$$RMS^h_{\tilde{i},i}(x^h) = RMT_{\tilde{i},i}(y) \qquad \text{(EW.11)}$$

$$RMST^{ji}_{\tilde{k},k}(z^{ji}) = RMST^{\tilde{j}\tilde{i}}_{\tilde{k},k}(z^{\tilde{j}\tilde{i}}) \qquad \text{(EW.12)}$$

Es decir, en el equilibrio Walrasiano la relación marginal de substitución entre dos bienes de todos los consumidores se iguala al coste de oportunidad de uno de los bienes en términos del otro (relación marginal de transformación). Además la relación marginal de substitución técnica entre dos factores se iguala entre todas las empresas de la economía, que era la condición necesaria y suficiente para que hubiera eficiencia productiva. Esto significa que se elige el punto de la FPP óptimo (condición OP4) y hay eficiencia productiva (condición OP1).

Por tanto el equilibrio Walrasiano cumple las tres condiciones de eficiencia necesarias para la eficiencia Paretiana: i) eficiencia productiva (EW.7 y EW.8, OP.1 y OP. 2, FPP.1 y FPP.2), ii) Eficiencia asignativa del consumo (EW. 9, OP.3), iii**)** Eficiencia de la combinación productiva (EW.11, OP.4). Por tanto podemos concluir que el equilibrio Walrasiano es eficiente en sentido de Pareto.

En el siguiente gráfico se representa un Equilibrio Walrasiano para el caso de que haya, dos consumidores, dos bienes, dos empresas (una por sector) y dos factores productivos:


Equilibrio Walrasiano 2× 2× 2× 2
(2 bienes, 2 factores, 2 empresas, 2 consumidores)
$RMS^1_{1,2}(x^1) = \frac{p_1}{p_2} = RMS^2_{1,2}(x^2)$
$f^2(z_1^2, \hat{z}_2^2)$
~w_1/p_2
~-p_1/p_2
~-p_1/p_2
$\hat{x}_2^1 + \hat{x}_2^2 = \hat{y}_2$
$RMST^1_{1,2}(z^1) = \frac{w_1}{w_2} = RMST^1_{1,2}(z^2)$
Curva de Contrato
~ -$RMT_{1,2}(y) = -\frac{p_1}{p_2}$
$\hat{y}_1 = \hat{x}_1^1 + \hat{x}_1^2$
Asignaciones de factores con eficiencia productiva
$e_2 = z_2^1 + z_2^2$
~w_1/w_2
~-w_2/p_1
$f^1(\hat{z}_1^1, e_2 - z_2^2)$
$e_1 = z_1^1 + z_1^2$