Tema 5:

Equilibrio General

Parte III

OWC Economía para Matemáticos

Fernando Perera Tallo

Existencia de Equilibrio

http://bit.ly/8l8DDu
Fernando Perera-Tallo

A lo largo de esta presentación nos vamos a concentrar en espacios Euclidios, gran parte de los resultados se podrían generalizar a espacios métricos completos.

Conjunto Potencia: conjunto potencia del conjunto Y, P(Y), es el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto Y.

Correspondencia entre dos conjuntos X e Y es una aplicación que asocia cada elemento de X con un subconjunto (no vacío) de Y. Es decir, es una función $\Gamma : X \to P(Y)$ que asocia cada elemento del conjunto X con el conjunto potencia del conjunto Y (excluido el conjunto vacío). En economía las correspondencias se suelen escribir simplemente $\Gamma : X \to\to Y$ (no se usa la notación de conjunto potencia)

Ejemplo 1: la correspondencia que relaciona el vector de precios y la renta con el conjunto presupuestario del consumidor:

$$CP:\Re_{+}^{n+1}\rightarrow\rightarrow\Re_{+}^{n}\quad CP(p,m)=\left\{x\in\Re_{+}^{n}\,/\,px\leq m\right\}$$

Ejemplo 2: Si una función de utilidad no es estrictamente cuasi cóncava podemos tener una correspondencia de demanda en vez de una función de demanda. Si por ejemplo tenemos la función de utilidad lineal, $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, entonces la correspondencia de demanda será:

$$\left(x_1(p_1, p_2, m), x_2(p_1, p_2, m)\right) =$$

$$\begin{cases} \left\{\left(\dfrac{m}{p_1}, 0\right)\right\} & \text{si } p_1 < p_2 \\ \left\{(x_1, x_2) \in \Re^2_+ / p_1 x_1 + p_2 x_2 = m\right\} & \text{si } p_1 = p_2 \\ \left\{\left(0, \dfrac{m}{p_2}\right)\right\} & \text{si } p_1 > p_2 \end{cases}$$

http://bit.ly/8l8DDu
Fernando Perera-Tallo

Ejemplo 3: Cuando la función de producción de una empresa es estrictamente cuasicóncava y presenta rendimientos constantes a escala, entonces hay función de demandas condicionadas de factores pero la "función" de oferta de bienes y de demanda de factores no es una función, es una correspondencia. El problema de minimización de costes sería:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{z} & wz \\ s.a: & y \leq f(z) \end{array}$$

De este problema obtendríamos la función de costes $c(w,y)$ y las <u>funciones</u> de demandas condicionales de factores $z(w,y)$.

Problema de maximización del beneficio:

$$\max_{y, z_1, z_2} \quad py - wz$$
$$s.a: \quad y \leq f(z)$$

La correspondencia de oferta y demanda (no condicionada) de factores sería como sigue:

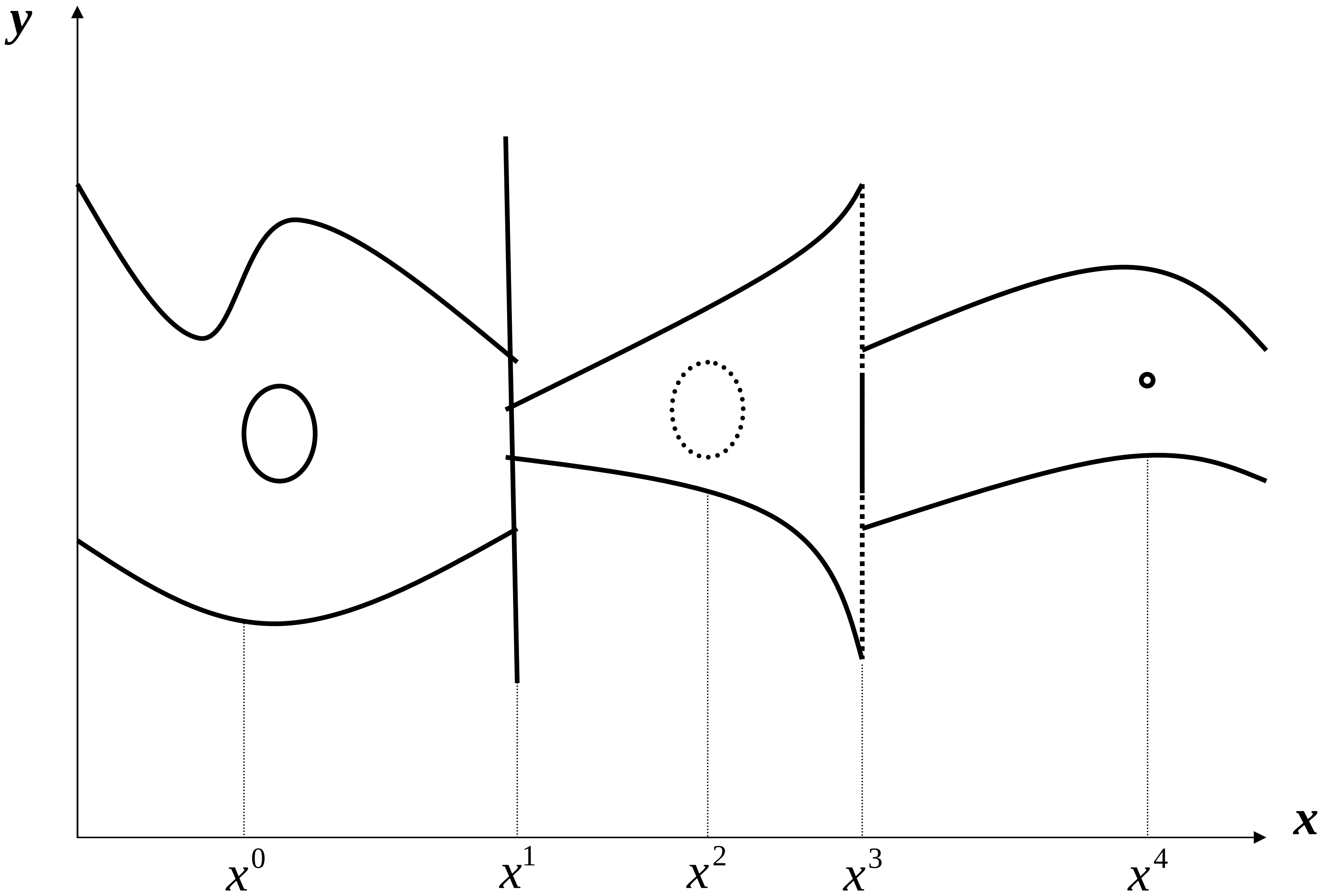
$$(y(p,w), z(p,w)) =$$
$$\begin{cases} \{(0,0,0)\} & \text{si } p < c(w,1) \\ \{(y,z) \in \Re_+^{1+m} / y \in \Re_+ \; z = z(w,y)\} & \text{si } p = c(w,1) \\ \varnothing & \text{si } p > c(w,1) \end{cases}$$

Una correspondencia $\Gamma : X \to\to Y$ es de valor compacto si $\forall x \in X$ el conjunto $\Gamma(x)$ es compacto.

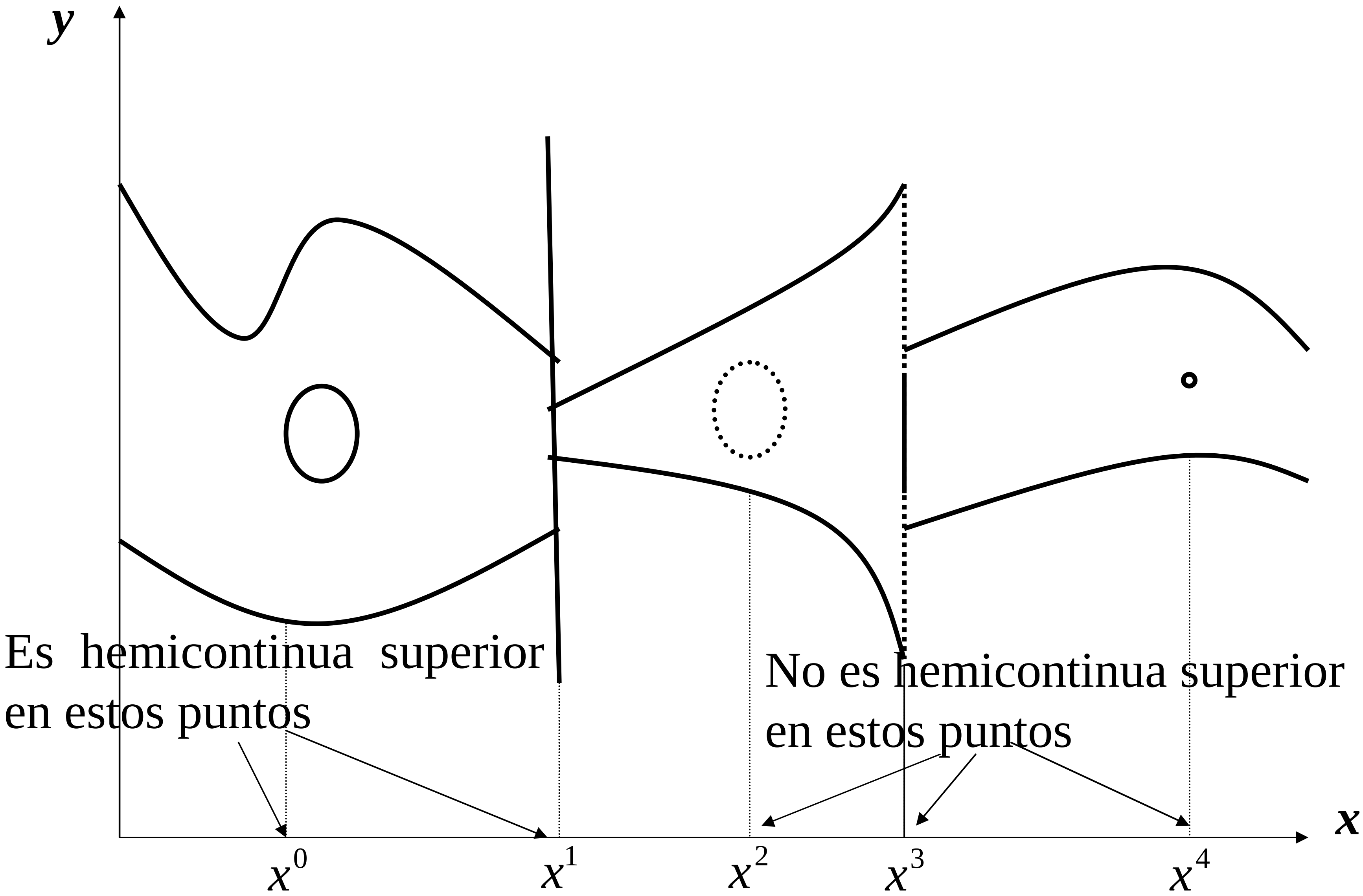
Una correspondencia $\Gamma : X \to\to Y$ es de valor convexo si $\forall x \in X$ el conjunto $\Gamma(x)$ es convexo.

Definición 1 de correspondencia hemicontinua superior: una correspondencia $\Gamma : X \to\to Y$ es hemicontinua superior en $x^0 \in X$ si para cualquier conjunto abierto $A \subset Y$ tal que $\Gamma\left(x^0\right) \subset A$, existe un entorno de x^0, $B(x^0, \varepsilon)$, tal que $\forall x \in B(x^0, \varepsilon)$ $\Gamma(x) \subset A$.

Definición 2 de correspondencia hemicontinua superior: una correspondencia $\Gamma : X \to\to Y$ de valor compacto es hemicontinua superior en $x^0 \in X$ si y sólo si para cualquier secuencia $\left\{x^n\right\}$ convergente a x^0, $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = x^0$, y para cualquier secuencia $\left\{y^n\right\}$ donde $y^n \in \Gamma(x^n)$, existe una subsequencia que converge a $y^0 \in \Gamma(x^0)$.

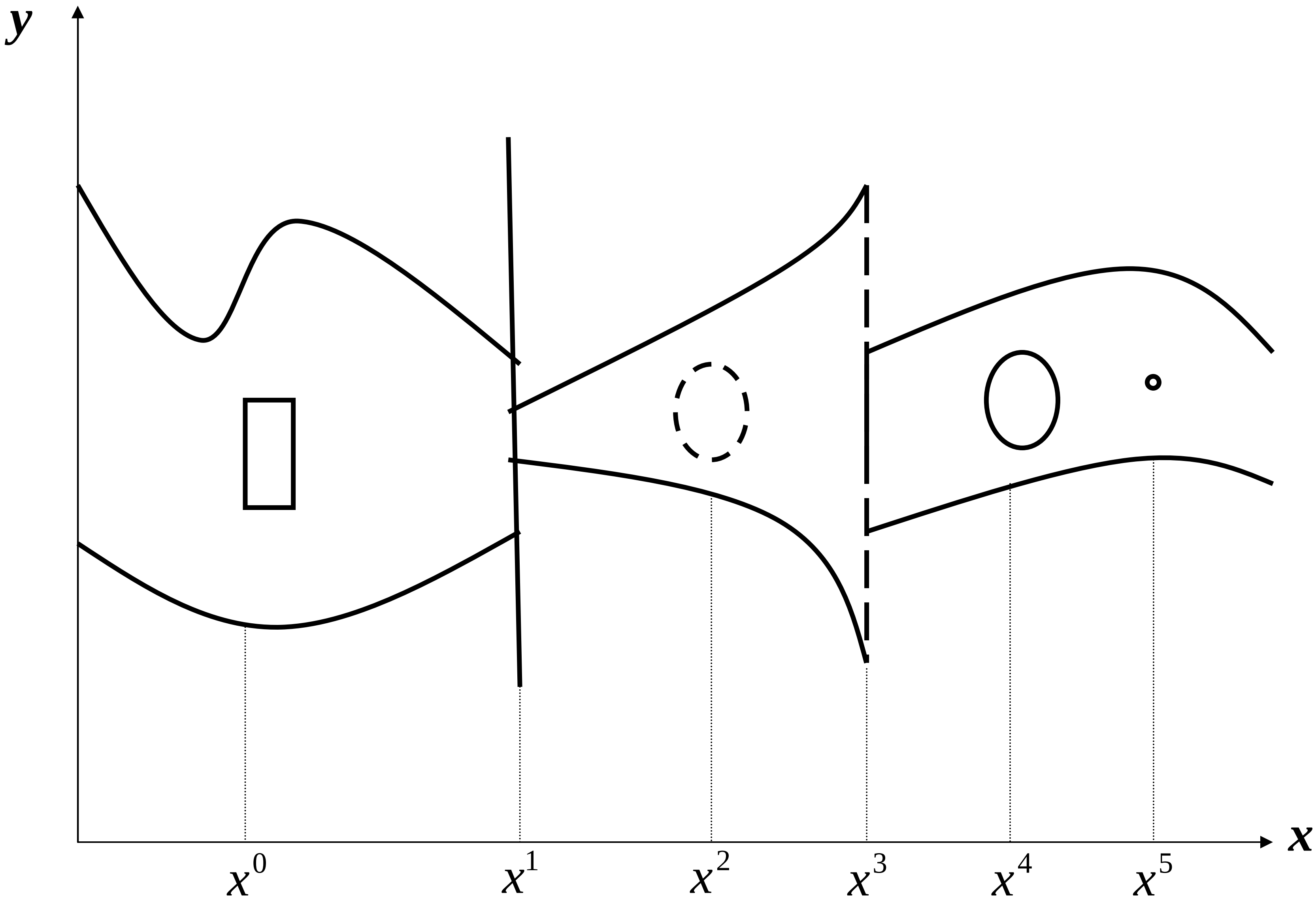


y
x
x^0
x^1
x^2
x^3
x^4

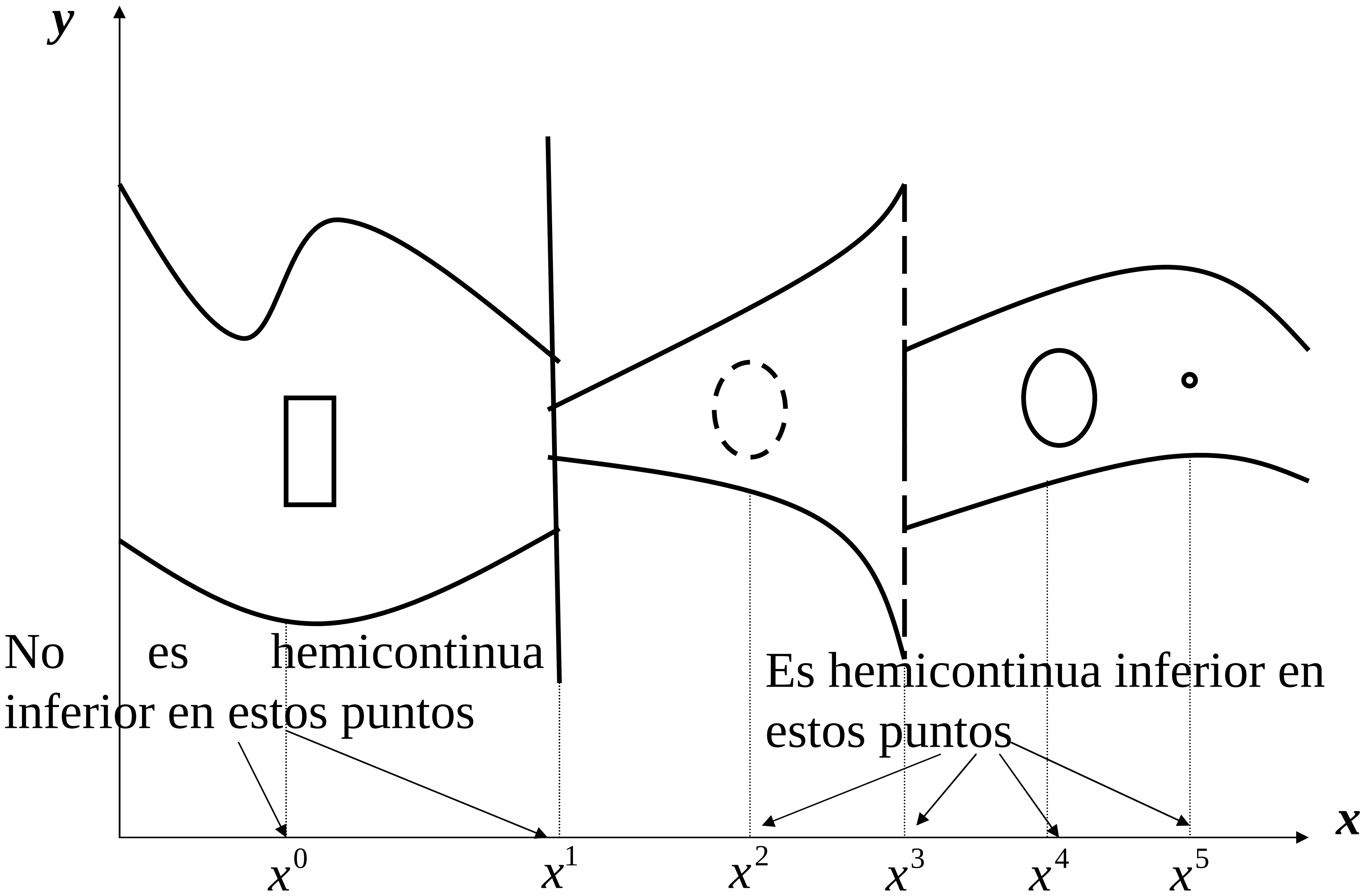

y
x
Es hemicontinua superior en estos puntos
No es hemicontinua superior en estos puntos
x^0
x^1
x^2
x^3
x^4

Definición 1 de correspondencia hemicontinua inferior: una correspondencia $\Gamma : X \rightarrow\rightarrow Y$ es hemicontinua inferior en $x^0 \in X$ si para cualquier conjunto abierto $A \subset Y$ tal que $\Gamma\left(x^0\right) \cap A \neq \varnothing$, existe un entorno de x^0, $B(x^0, \varepsilon)$, tal que $\forall x \in B(x^0, \varepsilon)$ $\Gamma(x) \cap A \neq \varnothing$.

Definición 2 de correspondencia hemicontinua inferior: una correspondencia $\Gamma : X \rightarrow\rightarrow Y$ es hemicontinua inferior en $x^0 \in X$ si y sólo si para cualquier secuencia $\{x^n\}$ convergente a x^0, $\lim_{n \to +\infty} x^n = x^0$, y para cualquier $y^0 \in \Gamma(x^0)$, existe una secuencia $y^n \in \Gamma(x^n)$ tal que $\lim_{n \to +\infty} y^n = y^0$.



y
x
x0
x1
x2
x3
x4
x5


y
No es hemicontinua inferior en estos puntos
Es hemicontinua inferior en estos puntos
x
x^0
x^1
x^2
x^3
x^4
x^5

Se dice que una correspondencia $\Gamma : X \rightarrow\rightarrow Y$ es continua en $x^0 \in X$ si es hemicontinua superior e inferior en ese punto.

Se dice que una correspondencia $\Gamma : X \rightarrow\rightarrow Y$ es hemicontinua superior si lo es $\forall x \in X$.

Se dice que una correspondencia $\Gamma : X \rightarrow\rightarrow Y$ es hemicontinua inferior si lo es $\forall x \in X$.

Se dice que una correspondencia $\Gamma : X \rightarrow\rightarrow Y$ es continua si lo es $\forall x \in X$.

Teorema del máximo: Sea $X \in \Re^n$ e $y \in \Re^m$. Dada la función continua $f : X \times Y \to \Re$ y la correspondencia no vacía, continua y de valor compacto $\Gamma : X \to\to Y$, entonces $v(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} f(x)$ es una función continua, y $\Omega(x) = \arg\max_{y \in \Gamma(x)} f(x)$ es una correspondencia hemicontinua superior con valores compactos y diferentes del vacío.

Sea $X \in \Re^n$ y $\mathrm{P} \in \Re^m$ (donde X es el espacio de variables de elección y P es el espacio de parámetros). Dada la función continua y cuasicóncava $f: X \times P \to \Re$ y la correspondencia no vacía, continua y de valor compacto y convexo $\Gamma: P \to\to X$, entonces $v(\wp) = \max_{x \in \Gamma(\wp)} f(x)$ es una función continua, y $\Omega(\wp) = \arg\max_{x \in \Gamma(\wp)} f(x)$ es una correspondencia hemicontinua superior con valores compactos, convexos y diferentes del vacío.

Si $x_1, x_2 \in \Omega(\wp) \Rightarrow x_1, x_2 \in \Gamma(\wp) \Rightarrow \forall \lambda \in (0,1) \quad \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \Gamma(\wp)$
$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{f(x_1), f(x_2)\} = \max_{x \in \Gamma(\wp)} f(x) \Rightarrow$
$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \Omega(\wp) \Rightarrow \Omega(\wp)$ es de valor convexo.

Sea $X \in \Re^n$ y $\mathrm{P} \in \Re^m$ (donde X es el espacio de variables de elección y P es el espacio de parámetros). Dada la función continua y estrictamente cuasicóncava $f : X \times P \to \Re$ y la correspondencia no vacía, continua y de valor compacto y convexo $\Gamma : P \to\to X$, entonces $v(\wp) = \max_{x \in \Gamma(\wp)} f(x)$ es una función continua, y $\Omega(\wp) = \arg\max_{x \in \Gamma(\wp)} f(x)$ es una función continua.

Si $x_1, x_2 \in \Omega(\wp) \Rightarrow x_1, x_2 \in \Gamma(\wp) \Rightarrow \forall \lambda \in (0,1) \quad \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in \Gamma(\wp)$
$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\right) \geq \min\left\{ f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)\right\} = \max_{x \in \Gamma(\wp)} f(x) \Rightarrow\Leftarrow$

Sea $X \in \Re^n$ y $P \in \Re^m$ y la correspondencia $\Gamma : P \rightarrow\rightarrow X$ tal que $\Gamma(\wp) = \{x / g(x,\wp) \geq 0\}$ donde $g : X \times P \rightarrow \Re^{\tilde{n}}$ es una función continua. Si $\Gamma(\wp)$ es no vacía y de valor compacto, entonces es una correspondencia hemicontinua superior.

Demostración:

Sea $\{\wp^n\}$ tal que $\lim_{n\to+\infty} \wp^n = \wp^*$, y $\{x^n\}$ donde $x^n \in \Gamma(\wp^n)$ y $\lim_{n_i\to+\infty} x^{n_i} = x^*$, por continuidad $g(x^{n_i}, \wp^{n_i}) \geq 0$, $\lim_{n_i\to+\infty} g(x^{n_i}, \wp^{n_i}) = g(x^*, \wp) \geq 0 \Rightarrow x^* \in \Gamma(\wp^*)$.

Sea $X \in \Re^n$ y $P \in \Re^m$ y la correspondencia $\Gamma : P \to\to X$ tal que $\Gamma(\wp) = \{x / g(x,\wp) \geq 0\}$ donde $g : X \times P \to \Re^{\tilde{n}}$ es una función continua. Si $\forall \varepsilon > 0$ $\forall x \in \Gamma(\wp)$ $\exists x' \neq x /$ $x' \in B(x,\varepsilon)$ y $g(x,\wp) \gg 0$ entonces es una correspondencia hemicontinua inferior.

Demostración:

- Caso en que $g(x,\wp) = a \gg 0$: Sea $\{\wp^n\} / \lim\limits_{n\to+\infty} \wp^n = \wp$ y

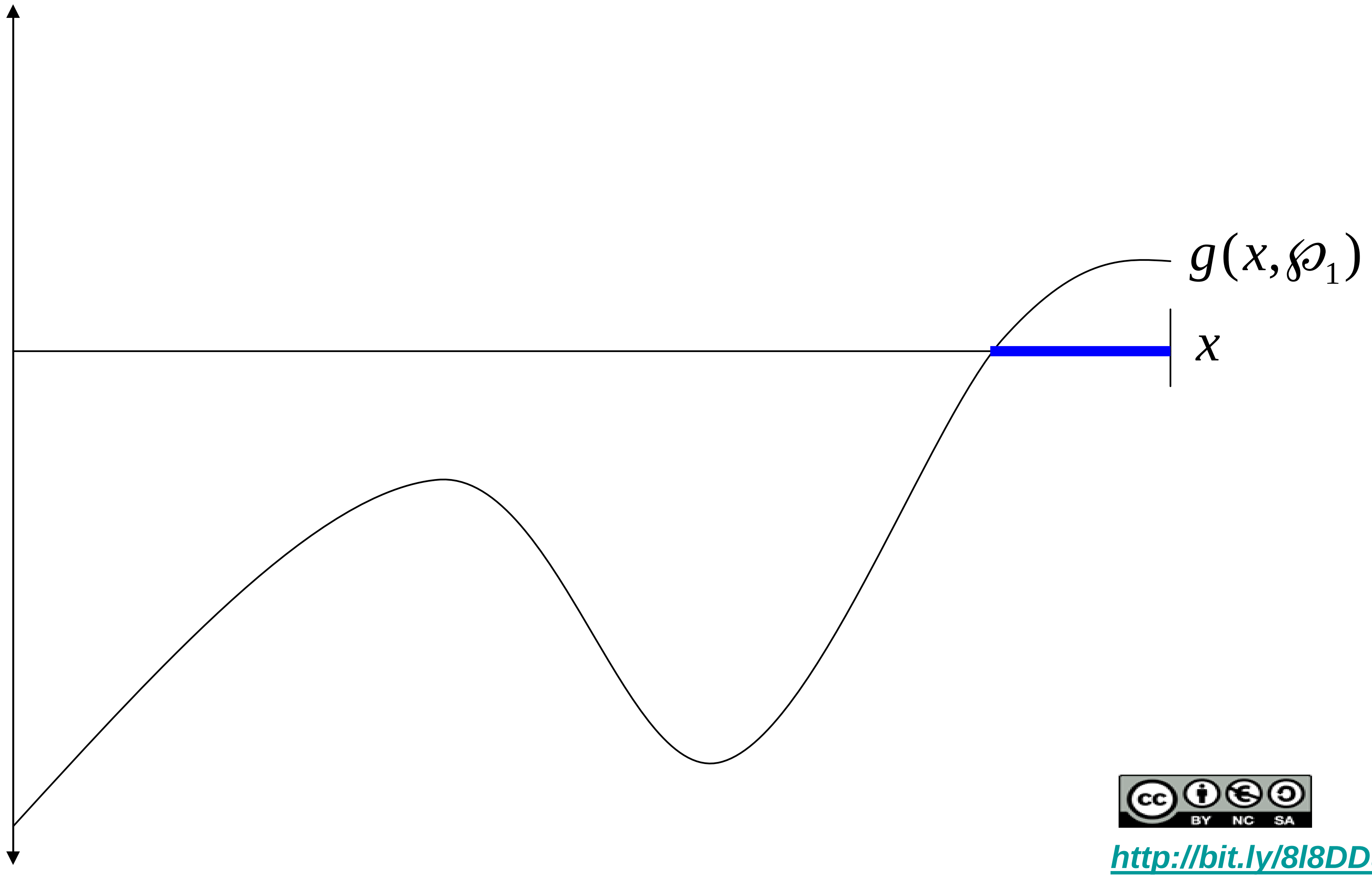
$x \in \Gamma(\wp)$ tal que $g(x,\wp) \gg 0$, por continuidad

$$\lim_{n\to+\infty} g(x,\wp^n) = a \Rightarrow \exists n^* / \forall n > n^* \quad g(x,\wp^n) \gg 0 \Rightarrow \forall n > n^*$$

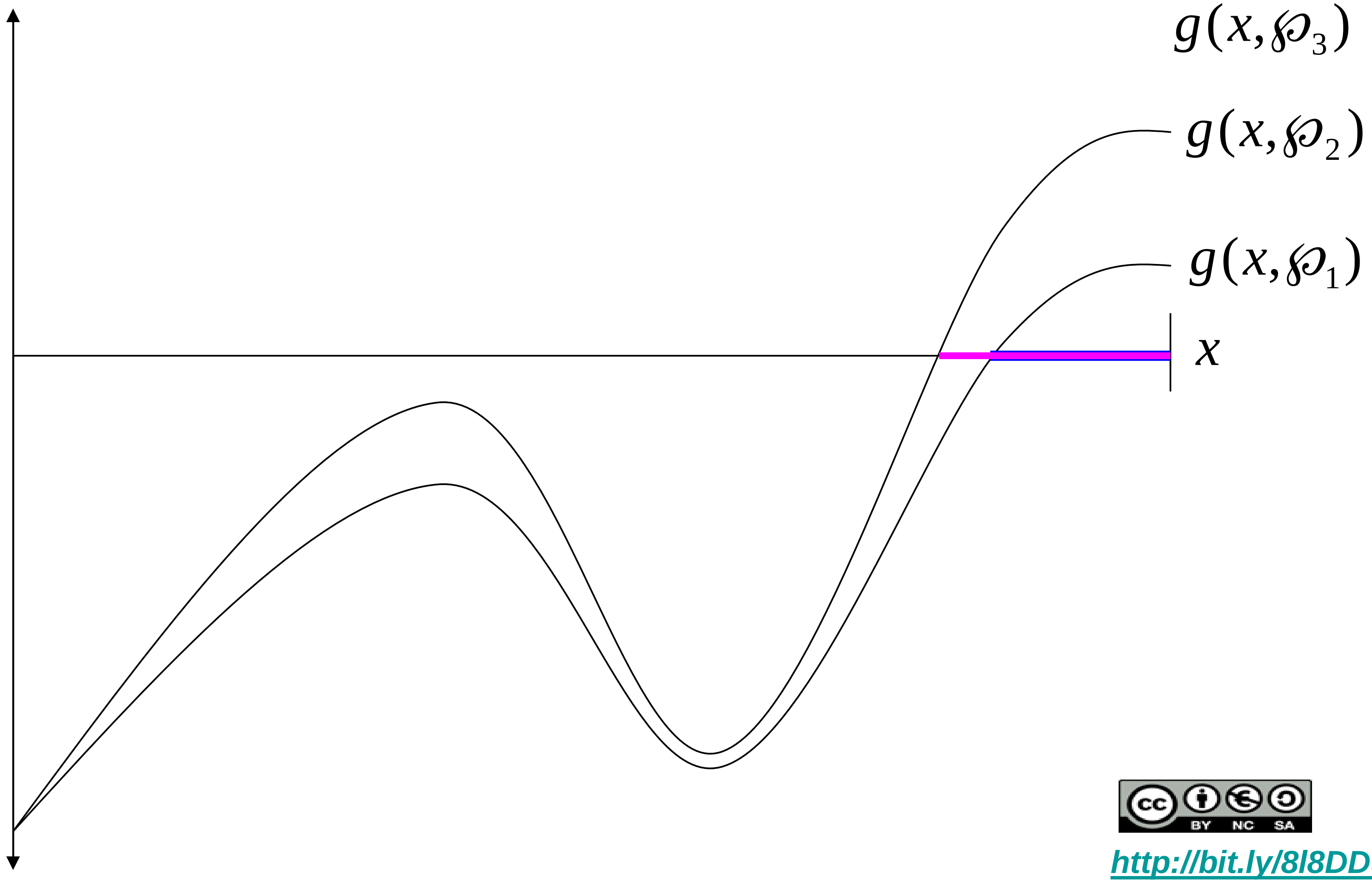
$$\Rightarrow x \in \Gamma(\wp^n) \Rightarrow \exists x^n / \forall n > n^* \quad x^n = x \in \Gamma(\wp^n) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x^n = x$$

- Caso en que $g(x,\wp)\geq 0$: Sea $\lim_{n\to+\infty}\wp^n=\wp$ y $x\in\Gamma(\wp)$ tal que $g(x,\wp)\geq 0$, $\exists\bar{x}^i \,/\, g\left(x^i,\wp\right)$»$0 \,/\, \lim_{n\to+\infty}\bar{x}^i=x$, dado el apartado anterior, $\forall\left\{\wp^n\right\}$ tal que $\lim_{n\to+\infty}\wp^n=\wp$, $\exists\left\{\hat{x}^{ni}\right\}$ tal que $\hat{x}^{ni}\in\Gamma\left(\wp^n\right)$y $\lim_{n\to+\infty}\hat{x}^{ni}=\bar{x}^i$. Definamos la secuencia $\left\{\tilde{x}^n\right\}/\,\tilde{x}^n=\hat{x}^{nn}\Rightarrow d\left(\tilde{x}^n,x\right)=d\left(\hat{x}^{nn},x\right)\leq d\left(\hat{x}^{nn},\bar{x}^n\right)+d\left(\bar{x}^n,x\right)\Rightarrow$ $\lim_{n\to+\infty}d\left(\tilde{x}^n,x\right)=\lim_{n\to+\infty}d\left(\hat{x}^{nn},x\right)\leq\lim_{n\to+\infty}d\left(\hat{x}^{nn},\bar{x}^n\right)+\lim_{n\to+\infty}d\left(\bar{x}^n,x\right)=0$ $\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\tilde{x}^n=x$.

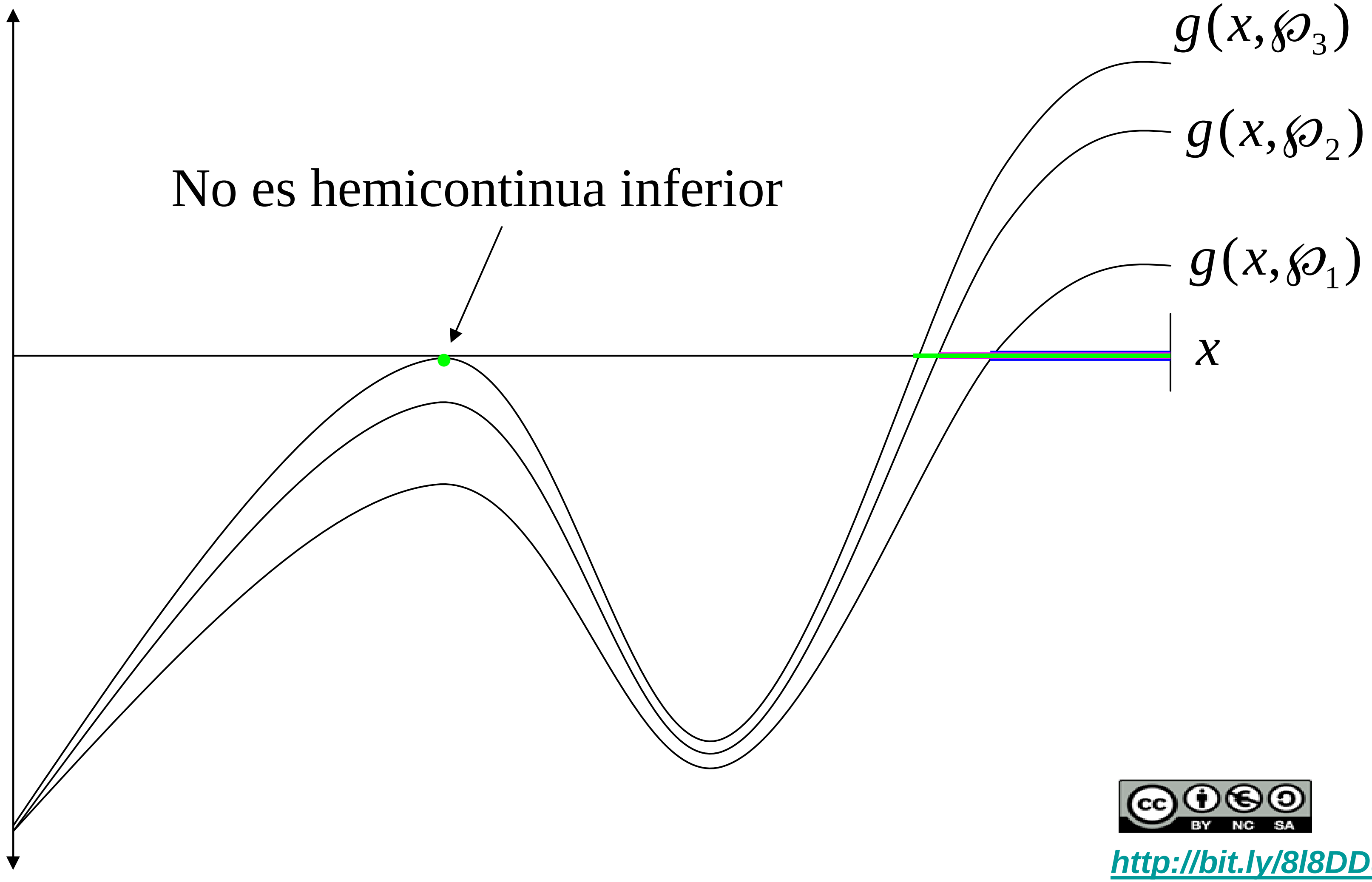
Ejemplo de correspondencia del tipo $\Gamma(\wp) = \{x \,/\, g(x,\wp) \geq 0\}$ que no es hemicontinua inferior:



Ejemplo de correspondencia del tipo $\Gamma(\wp) = \{x \,/\, g(x,\wp) \geq 0\}$ que no es hemicontinua inferior:



Ejemplo de correspondencia del tipo $\Gamma(\wp) = \{x / g(x,\wp) \geq 0\}$ que no es hemicontinua inferior:



Corolario: $\forall p \gg 0$ la correspondencia que define el conjunto presupuestario es una correspondencia continua:

$$CP : \Re_+^{n+1} \to \Re_+^n$$

$$CP(p,m) = \left\{ x \in \Re_+^n \,/\, px \leq m \right\}$$

Fernando Perera-Tallo

Sean X, Y, y $Z = X \times Y$ tres espacios métricos completos cuyas distancias verifican la siguiente desigualdad: sea $z^i = \left(x^i, y^i\right) \in Z$, donde $x^i \in X$, $y^i \in Y$ e $i \in \{1,2\}$, entonces $d^Z(z^1, z^2) \leq d^X(x^1, x^2) + d^Y(y^1, y^2)$. Sean dos correspondencias compactas y hemicontinuas superiores, $\Gamma : P \to\to X$ y $\Omega : P \to\to Y$. Si definimos la correspondencia $\Psi = \Gamma \otimes \Omega : P \to\to X \times Y = Z$ tal que $\Psi(\wp) = \{z = (x, y) \in Z \,/\, x \in \Gamma(\wp) \text{ y } y \in \Omega(\wp)\}$, entonces $\Psi(\wp)$ es hemicontinua superior.

Demostración:

Sea $\{\wp^n\}$ tal que $\lim\limits_{n \to +\infty} \wp^n = \wp^*$, y $\{z^n\} = \{(x^n, y^n)\}$ donde $z^n \in \Psi(\wp^n)$, entonces existe z^{n_i} tal que $\lim\limits_{i \to \infty} z^{n_i} = \lim\limits_{i \to \infty} \left(x^{n_i}, y^{n_i}\right) = \left(x^*, y^*\right) = z^*$, dado que $\Gamma(\wp)$ y $\Omega(\wp)$ son hemicontinuas superiores $x^* \in \Gamma(\wp^*)$ e $y^* \in \Omega(\wp^*)$, por tanto $z^* = \left(x^*, y^*\right) \in \Gamma(\wp^*) \otimes \Omega(\wp^*) = \Psi(\wp^*)$.

Definición de Punto fijo:

Un punto fijo de la función $f : X \to Y$ donde $X \cap Y \neq \emptyset$, es un punto $x^0 \in X \cap Y$ tal que $x^0 = f\left(x^0\right)$.

Un punto fijo de una correspondencia $\Gamma : X \to\to Y$ donde $X \cap Y \neq \emptyset$, es un punto $x^0 \in X \cap Y$ tal que $x^0 \in \Gamma\left(x^0\right)$.

Sea X un espacio métrico completo.

Definición: una función $f : X \to X$ es una contracción si $\exists a < 1$ tal que $\forall x, y \in X \quad d\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) < a\, d\left(x, y\right)$.

Proposición: Una contracción en un espacio métrico completo tiene un solo punto fijo.

Aplicaciones en economía: optimización dinámica.

$$V(k_0) = \max_{\{k_t\}_{t=1}^{+\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

$$s.a.: \quad k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_{t+i}$$

$$V(k) = \max_{k'} u\left(f(k) + (1-\delta)k - k'\right) + \beta V(k')$$

Se puede demostrar que la anterior ecuación funcional es una contracción en el espacio métrico de funciones continuas y acotadas, por tanto tiene un punto fijo.

Teorema del punto fijo de Brower: Sea X un subconjunto no vacío, compacto y convexo de $\Re^n$ y $f : X \to X$ una función continua. Entonces $f(.)$ tiene un punto fijo.

Supuesto 1.1: $u^h\left(x^h\right)$ es una función continua y creciente (en todos sus argumentos) en $\Re_+^n$. Además es estrictamente creciente en todos sus argumentos y <u>estrictamente cuasicóncava</u> en $\Re_{++}^n$.

Supuesto 1.2: $f^{ji}(z^{ji})$ es una función continua, creciente (en todos sus argumentos) y estrictamente cóncava en $\Re^n_+$, y $f^{ji}(0)=0$. Además es estrictamente creciente en todos sus argumentos y estrictamente cuasicóncava en $\Re^n_{++}$. Además el vector de dotaciones de factores es estrictamente positivo $e \gg 0$.

La estricta concavidad implica que hay rendimientos decrecientes a escala (se excluye los rendimientos constantes escala) .

Sean $\left(\tilde{y}^{ji}(p,w),\tilde{z}^{ji}(p,w)\right)$ y $\tilde{\pi}(p,w)$ respectivamente las funciones restringidas de oferta de bienes, demanda de factores y beneficios de la empresa j del sector i. (Como la función de producción es estrictamente cóncava, las ofertas de bienes y demandas de factores son funciones):

$$\left(\tilde{y}^{ji}(p,w),\tilde{z}^{ji}(p,w)\right)= \arg\max_{y^{ji},z^{ji}} p_i y^{ji} - wz^{ji}$$
$$s.a.\ \ f^{ji}(z^{ji}) \geq y^{ji}$$
$$z^{ji} \leq 2e$$

$$\tilde{\pi}(p,w)= \max_{y^{ji},z^{ji}} p_i y^{ji} - wz^{ji}$$
$$s.a.\ \ f^{ji}(z^{ji}) \geq y^{ji}$$
$$z^{ji} \leq 2e$$

(En realidad dependen de p_i, no del vector p).

En realidad las funciones <u>restringidas</u> de oferta de bienes, demanda de factores y beneficios de la empresa j del sector i dependen del precio del bien i, p_i, no del vector p.

$e = (e_1, e_2, \ldots, e_m) = \left(\sum_{h=1}^{H} e_1^h, \sum_{h=1}^{H} e_2^h, \ldots, \sum_{h=1}^{H} e_m^h \right) = \sum_{h=1}^{H} e^h$ es el vector de dotaciones de factores de la economía.

Fernando Perera-Tallo

$\tilde{x}^h(p,w)$ es las función de demanda restringida del consumidor h (como las funciones de utilidad son estrictamente cuasi concavas, las demandas de bienes son funciones, no correspondencias):

$$\tilde{x}^h(p,w) = \quad Arg\max_{x^h} \quad u^h(x^h)$$

$$s.a. \quad px^h \le we^h + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\theta^{hji}\pi^{ji}(p,w)$$

$$x^h \le 2y_i^{\max}$$

donde:

$$y_i^{\max} = \quad \max_{z^{i1},z^{i2},\ldots,z^{iJ_i}} \sum_{j=1}^{J_i} f^{ji}(z^{ji})$$

$$\text{s.a.:} \quad e \ge \sum_{j=1}^{J_i} z^{ji}$$

Sea $a \in \{1,\ldots,A\}$ el índice de todos los agentes de la economía (consumidores y empresas), donde $A \equiv H + \sum_{i=1}^{n} J_i$ es el número de agentes:

$$a(h) = h \qquad \text{si } a \leq H$$
$$a(ji) = H + \sum_{\tilde{i}=1}^{i-1} J_{\tilde{i}} + i \qquad \text{si } a > H$$

Sea $dn^a : \Re_+^{n+m} \to \Re^{n+m}$ las funciones de demandas netas <u>restringida</u> de los agentes (consumidores y empresas):

$$dn^a(p,w) = \left(\tilde{x}(p,w), -e^h\right) \qquad \text{si } a \leq H$$
$$dn^{H+\sum_{\tilde{i}=1}^{i-1} J_{\tilde{i}}+i}(p,w) = \left(\left(0,0,\ldots,\underset{\substack{\uparrow \\ i}}{-\tilde{y}^{ji}(p,w)},\ldots,0\right), \tilde{z}^{ji}(p,w)\right) \qquad \text{si } a > H$$

Sea $b \in \{1,\ldots,n+m\}$ el índice de todos los bienes y factores de la economía (consumidores y empresas):

$$b(i) = i \qquad \text{si } i \le n$$

$$b(i) = n + k \qquad \text{si } b > n$$

$\wp = (p, w) \in \Re_{+}^{n+m}$ es el vector de precios de bienes y factores.

Definición: $\Delta = \left\{ \wp \in \Re_{+}^{n+m} \,/\, \sum_{i=1}^{n+m} \wp_i = 1 \right\}$.

Con esta normalización para cada equilibrio sólo hay un vector de precios de equilibrio

Se define el exceso de demanda en un mercado como la suma de las demandas netas en ese mercado:

$$ed_b(\wp) = \sum_{a=1}^{A} dn_b^a(\wp)$$

$SW : \Delta \rightarrow \Delta$ es la función "subastador Walrasiano" definida como:

$$SW_b(\wp) = \frac{\wp_b + \max\{ed_b(\wp), 0\}}{1 + \sum_{b=1}^{n+m} \max\{ed_b(\wp), 0\}}.$$

Note que la función "subastador Walrasiano" es continua y su imagen está en Δ:

$$\text{Si } \wp \in \Delta \Rightarrow \sum_{b=1}^{n+m} SW_b(\wp) = \frac{\overbrace{\sum_{b=1}^{n+m} \wp_b}^{1} + \sum_{b=1}^{n+m} \max\{ed_b(\wp), 0\}}{1 + \sum_{b=1}^{n+m} \max\{ed_b(\wp), 0\}} = 1$$

Según el Teorema del punto fijo de Brower existe un punto fijo de la función *SW*.

Además como las funciones de utilidad y producción son estrictamente crecientes $\wp \gg 0$.

La Ley de Walras implican que los excesos de demanda son cero en todos los mercados.

Como las funciones objetivo son estrictamente cóncavas, y las excesos demandas netas en el punto fijo son interiores, las funciones de exceso de demanda restringidas en el punto fijo coinciden con las no restringidas, por tanto es un equilibrio.

Teorema del punto fijo de Brower: Sea X un subconjunto compacto, convexo y no vacío de $\Re^n$ y $\Gamma : X \to X$ una correspondencia hemicontinua superior, de valor convexo, compacto y no vacío. Entonces $\Gamma(.)$ tiene un punto fijo.

Supuesto 1.2: $f^{ji}(z^{ji})$ es una función continua, creciente (en todos sus argumentos) y (no estrictamente) cóncava en $\Re_{+}^{n}$, y $f^{ji}(0)=0$. Además es estrictamente creciente en todos sus argumentos y estrictamente cuasicóncava en $\Re_{++}^{n}$. Además el vector de dotaciones de factores es estrictamente positivo e»0.

Como la concavidad no es estricta puede haber rendimientos constantes escala.

Supuesto 1.1: $u^h\left(x^h\right)$ es una función continua y creciente (en todos sus argumentos) en $\Re_+^n$. Además es estrictamente creciente en todos sus argumentos y <u>(no estrictamente)</u> cuasicóncava en $\Re_{++}^n$.

Fernando Perera-Tallo

En realidad las funciones restringidas de oferta de bienes, demanda de factores y beneficios de la empresa j del sector i dependen del precio del bien i, p_i, no del vector p.

$e = (e_1, e_2, \ldots, e_m) = \left(\sum_{h=1}^{H} e_1^h, \sum_{h=1}^{H} e_2^h, \ldots, \sum_{h=1}^{H} e_m^h \right) = \sum_{h=1}^{H} e^h$ es el vector de dotaciones de factores de la economía.

Sean $\left(\tilde{y}^{ji}(p,w),\tilde{z}^{ji}(p,w)\right)$ y $\tilde{\pi}(p,w)$ respectivamente las correspondencias restringidas de oferta de bienes, demanda de factores y la función de beneficios de la empresa j del sector i. (Como la función de producción no son estrictamente cóncava, las ofertas de bienes y demandas de factores pueden ser correspondencias):

$$\left(\tilde{y}^{ji}(p,w),\tilde{z}^{ji}(p,w)\right)= \quad \arg\max_{y^{ji},z^{ji}} p_i y^{ji} - wz^{ji}$$
$$s.a. \;\; f^{ji}(z^{ji}) \geq y^{ji}$$
$$z^{ji} \leq 2e$$

$$\tilde{\pi}(p,w)= \quad \max_{y^{ji},z^{ji}} p_i y^{ji} - wz^{ji}$$
$$s.a. \;\; f^{ji}(z^{ji}) \geq y^{ji}$$
$$z^{ji} \leq 2e$$

$\left(\tilde{y}^{ji}(p,w),\tilde{z}^{ji}(p,w)\right)$ es hemicontinua superior (Teorema del máximo) y de valor convexo.

$\tilde{x}^h(p,w)$ es la <u>correspondencia</u> de demanda <u>restringida</u> del consumidor *h* (como las funciones de utilidad <u>no son estrictamente cuasi concavas,</u> las demandas de bienes por parte de los consumidores pueden ser correspondencias):

$$\tilde{x}^h(p,w) = \quad Arg\max_{x^h} \quad u^h(x^h)$$

$$s.a. \quad px^h \leq we^h + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\theta^{hji}\pi^{ji}(p,w)$$

$$x^h \leq 2y_i^{\max}$$

donde:

$$y_i^{\max} = \quad \max_{z^{i1},z^{i2},\ldots,z^{iJ_i}} \sum_{j=1}^{J_i} f^{ji}(z^{ji})$$

$$\text{s.a.}: \quad e \geq \sum_{j=1}^{J_i} z^{ji}$$

$\tilde{x}^h(p,w)$ es hemicontinua superior (Teorema del máximo) y de valor convexo.

Sea $a \in \left\{1,\ldots,H+\sum_{i=1}^{n} J_i\right\}$ el índice de todos los agentes de la economía (consumidores y empresas):

$$a(h) = h \qquad \text{si } a \leq H$$
$$a(ji) = H + \sum_{\tilde{i}=1}^{i-1} J_{\tilde{i}} + i \qquad \text{si } a > H$$

Sea $ed^{a} : \Re_{+}^{n+m} \to\to \Re_{+}^{n+m}$ las correspondencias de demanda netas <u>restringida</u> de los agentes (consumidores y empresas):

$$ed^{a}(p,w) = \left(\tilde{x}(p,w), -e^{h}\right) \qquad \text{si } a \leq H$$
$$ed^{H+\sum_{\tilde{i}=1}^{i-1} J_{\tilde{i}}+i}(p,w) = \left(\left(0,0,\ldots,\underset{\substack{\uparrow \\ i}}{-\tilde{y}^{ji}(p,w)},\ldots,0\right), \tilde{z}^{ji}(p,w)\right) \qquad \text{si } a > H$$

Sea $b \in \{1,\dots,n+m\}$ el índice de todos los bienes y factores de la economía (consumidores y empresas):

$$b(i) = i \qquad \text{si } i \leq n$$

$$b(i) = n+k \qquad \text{si } b > n$$

$\wp = (p, w) \in \Re_+^{n+m}$ es el vector de precios de bienes y factores.

$$S = \{dn \in R^{n+m} / dn_b \in [-y_b^{\max}, 2y_b^{\max}] \text{si b} \leq \text{n, y } dn_b \in [-e_b, 2e_b] \text{si b} > \text{n}$$

$$= [-y_1^{\max}, 2y_1^{\max}] \times \dots [-y_n^{\max}, 2y_n^{\max}] \times [-e, 2e]$$

$$\Delta = \left\{ \wp \in \Re_+^{n+m} / \sum_{i=1}^{n+m} \wp_i = 1 \right\}$$

$$\Omega = S^A \times \Delta$$

donde $A = H + \sum_{i=1}^{n} J_i$ es el número de agentes.

Sea $SW:\Omega \to\to \Delta$ como la correspondencia de valor único (es decir la función) “Subastador Walrasiano” que minimiza el valor de los excesos de demanda:

$$SW_b\left(dn^1,...,dn^A,\wp\right)=\frac{\wp_b+\max\left\{\sum_{a=1}^{A}dn_b^a,0\right\}}{1+\sum_{b=1}^{n+m}\max\left\{\sum_{a=1}^{A}dn_b^a,0\right\}}$$

Sea $\Gamma:\Omega \to\to \Omega$ como la correspondencia del producto cartesiano de las correspondencias de demandas netas de todos los agentes y la correspondencia “Subastador Walrasiano” $\Gamma = dn^1 \otimes dn^2 \otimes ... \otimes dn^A \otimes SW$.

Según el Teorema del punto fijo de Kakutani existe un punto fijo de la correspondencia Γ.

Además como las funciones de utilidad y producción son estrictamente crecientes $\wp \gg 0$.

La Ley de Walras implica que los excesos de demanda son cero en todos los mercados.

Como las funciones objetivo son cóncavas, y los excesos de demanda en el punto fijo son interiores, las el punto fijo pertenecen a las demandas netas no restringidas, por tanto es un equilibrio.