Tema 7: Crecimiento Económico a largo plazo

1. Introducción

El modelo de crecimiento neoclásico se caracteriza porque la fuente del crecimiento económico es la acumulación de capital, que a su vez depende del ahorro de las familias, dado que la economía es cerrada. Esto significa que los supuestos que se adopten sobre el modo en que los hogares toman sus decisiones intertemporales sobre el consumo y el ahorro van a jugar un papel fundamental en el comportamiento del modelo. Las dos versiones más extendidas del modelo neoclásico son el modelo de Ramsey, estudiado en el tema 1, y el modelo de generaciones solapadas de Diamond (1965), que se estudiará en este tema. Estos dos modelos que se diferencian precisamente en el modo en que los agentes deciden si consumir en el presente o posponer el consumo a través del ahorro.

En el modelo de Ramsey, los agentes son altruistas con respecto a sus hijos y, como consecuencia, la utilidad de todos sus sucesores les afecta positivamente. Esto implica que los consumidores, a la hora de elegir cuanto consumir y cuanto ahorrar, tienen en cuenta toda la senda de consumo de ellos y de sus descendientes en un horizonte infinito, si bien ponderando más la utilidad de la dinastía en el presente que en el futuro. El modelo de generaciones solapadas, sin embargo, considera que los agentes sólo tienen en cuenta su propia utilidad y, por tanto, consideran un horizonte finito cuando toman sus decisiones. Esta diferente manera de concebir el comportamiento de los hogares no es una mera curiosidad teórica, sino que provoca importantes cambios en cuanto a los resultados del modelo:

- El equilibrio competitivo no tiene por qué ser eficiente y, por tanto, la intervención del Estado puede ser beneficiosa. En el tema 1 se vio que el equilibrio competitivo en el modelo de Ramsey coincide con el Óptimo de Pareto. Esto significa que el equilibrio competitivo es eficiente a no ser que haya impuestos distorsionantes, externalidades, bienes públicos, etc. En el modelo de generaciones solapadas, incluso si no se presenta ninguno de los problemas antes mencionados, el equilibrio puede ser dinámicamente ineficiente, lo que significa que hay sobreacumulación de capital y que se puede encontrar una senda de consumo factible en la que todos los agentes consumen más y, por tanto, disfrutan de un nivel de utilidad superior. Es decir, se puede encontrar una asignación de los recursos superior en el sentido de Pareto al equilibrio competitivo. Esto da pie a posibles actuaciones del Estado para mejorar el equilibrio competitivo.

- Un sistema de seguridad social que ponga impuestos a las personas en edad de trabajar y dé trasferencias a personas jubiladas se puede justificar desde el punto de vista de la eficiencia.

- Mientras que en el modelo de Ramsey es irrelevante si el gasto público se financia con impuestos o con deuda pública (propiedad que se conoce como "Equivalencia Ricardiana"), en el modelo de generaciones solapadas los efectos de estas dos maneras de financiar el gasto público son muy distintos.

En definitiva, el modelo de generaciones solapadas es un mejor instrumento que el modelo de Ramsey para analizar temas como la seguridad social o la deuda pública.

Otro motivo por el que este modelo es interesante es porque pone de manifiesto los conflictos de intereses entre personas de distintas generaciones, y las consecuencias distributivas que tienen ciertas políticas económicas.

2. El Modelo

El modelo fue introducido por Diamond (1965) y también es conocido como el modelo de Diamond. El tiempo es discreto, es decir, está clasificado por periodos $t \in \{0,1,2,...\}$. Al igual que en el modelo de Ramsey, hay dos factores de producción: capital y trabajo, y un solo bien de consumo. El capital y el bien de consumo se producen con la misma tecnología representada por una función de producción $F(K,L)$ continua y diferenciable de segundo orden, cóncava, creciente en ambos argumentos, que presenta rendimientos constantes a escala, y en la que ambos factores productivos son imprescindibles: $F(0,L) = F(K,0) = 0$. La ecuación de acumulación de capital es la versión en tiempo discreto de la ya estudiada en el modelo de Ramsey:

$$K_{t+1} - K_t = F(K_t, L_t) - C_t \qquad (1)$$

Como se puede observar en la ecuación anterior, se está suponiendo que la tasa de depreciación es cero.

En cada periodo nace una generación que consta de L_t individuos, y cada uno de ellos vive dos periodos. Cada individuo tiene una dotación positiva de trabajo en el primer periodo de su vida (normalizada a la unidad), mientras que en el segundo periodo no dispone de trabajo. La interpretación natural es que el primer periodo de vida de un individuo coincide con su vida activa, mientras que el segundo coincide con su jubilación. Por este motivo, a los agentes que están viviendo su primer periodo se los suele llamar jóvenes y a los individuos que viven su segundo periodo jubilados. Los individuos maximizan su utilidad que depende de su consumo en los dos periodos de su vida $u(c_t^1, c_{t+1}^2)$, donde c_t^1 y c_{t+1}^2 denotan el consumo en el periodo de juventud (primer periodo de vida) y de vejez (segundo periodo de vida), respectivamente. La función de utilidad, $u(c^1, c^2)$, es continua y diferenciable de segundo orden, estrictamente cuasicóncava, y cumple que $\lim\limits_{c^1\to 0} u'_{c^1}(c^1,c^2)=\lim\limits_{c^2\to 0} u'_{c^2}(c^1,c^2)=+\infty$. Además, ambos bienes son normales (de elasticidad renta positiva).

3 Decisiones de los Agentes

3. 1 Los Consumidores

Como en el modelo de Ramsey, se normaliza el precio del bien de consumo a la unidad. El problema de maximización de la utilidad de las economías domésticas es como sigue:

$$\begin{aligned}&\underset{c^1,c^2}{Max}\, u(c_t^1,c_{t+1}^2)\\ &s.a:\\ &b_{t+1}=w_t-c_t^1\\ &c_{t+1}^2=b_{t+1}(1+r_{t+1})\end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned}&\underset{c^1,c^2}{Max}\, u(c_t^1,c_{t+1}^2)\\ &s.a:\quad w_t=c_t^1+\frac{c_{t+1}^2}{(1+r_{t+1})}\end{aligned} \qquad (2)$$

donde b_{t+1} son los activos de los agentes y, como es habitual, w_t y r_{t+1} son el salario y el tipo de interés, respectivamente. Las condiciones de primer orden del problema son:

$$RMS=\frac{u'_{c^1}(c_t^1,c_{t+1}^2)}{u'_{c^2}(c_t^1,c_{t+1}^2)}=(1+r_{t+1}) \qquad (3)$$

La relación marginal de substitución entre consumo del primer periodo y del segundo periodo es igual a su precio relativo, que es 1+*r*.

Las funciones $c^1(r_{t+1},w_t)$ y $c^2(r_{t+1},w_t)$ denotarán, respectivamente, el consumo óptimo del primer y segundo periodo dados el tipo de interés futuro y los salarios presentes, mientras que el ahorro óptimo se denotará como $s(r_{t+1},w_t)$, de tal manera que:

$$\left(c^1(r_{t+1},w_t),c^2(r_{t+1},w_t)\right)= \quad \begin{aligned}&Arg\,\underset{c^1,c^2}{Max}\quad u(c_t^1,c_{t+1}^2)\\ &s.a:\quad w_t=c_t^1+\frac{c_{t+1}^2}{(1+r_{t+1})}\end{aligned} \qquad (4)$$

$$b_{t+1}=s(r_{t+1},w_t)=w_t-c^1(r_{t+1},w_t) \qquad (5)$$

3.2 Empresas

Las empresas son competitivas y maximizan sus beneficios:

$$\underset{K,L}{Max}\, F(L_t,K_t)-w_tL_t-r_tK_t \qquad (6)$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} F_L(L_t, K_t) &= w_t \\ F_K(L_t, K_t) &= r_t \end{aligned} \tag{7}$$

Como ya se vio en el tema 1, dado el supuesto de rendimientos constantes a escala, las condiciones de primer orden pueden rescribirse en términos de capital por trabajador (dividiendo por L_t)

$$\begin{aligned} w_t &= f(k_t) - k_t f'(k_t) \\ r_t &= f'(k_t) \end{aligned} \tag{8}$$

donde k_t es el capital por trabajador ($k_t = K_t / L_t$).

4 Equilibrio Competitivos

En equilibrio, la oferta de capital (que coincide con los activos de los consumidores) se iguala a la demanda de capital por parte de las empresas, es decir, la cantidad de capital que usan las empresas:

$$L_{t-1} b_t = K_t \Leftrightarrow L_{t-1} b_t = L_t k_t \Leftrightarrow k_t = \frac{L_{t-1}}{L_t} b_t \Leftrightarrow k_t = \frac{b_t}{1+n} \tag{9}$$

Equilibrio Competitivo: El equilibrio competitivo es una secuencia de asignaciones $\{c_t^1, c_t^2, b_t, k_t\}_{t=0}^{\infty}$, y una secuencia de precios $\{w_t, r_t\}_{t=0}^{\infty}$, tales que los agentes (consumidores y empresas) maximizan sus funciones objetivo (utilidad y beneficios, respectivamente), y los mercados se vacían (la oferta se iguala a la demanda). Por tanto, se tiene que cumplir que:

- Los consumidores maximizan su utilidad:

$$\begin{aligned} &\underset{c^1, c^2}{Max}\, u(c_t^1, c_{t+1}^2) \\ &s.a: \\ &b_{t+1} = w_t - c_t^1 \\ &c_{t+1}^2 = b_{t+1}(1 + r_{t+1}) \end{aligned}$$

- Las empresas maximizan sus beneficios:

$$\begin{aligned} w_t &= f(k_t) - k_t f'(k_t) \\ r_t &= f'(k_t) \end{aligned}$$

- Los mercados se vacían:

$$k_t = \frac{b_t}{1+n}$$

Usando las ecuaciones (5), (8) y (9) se llega a la ecuación de acumulación de capital por trabajador:

$$k_{t+1} = \frac{f(k_t) - f'(k_t)k_t - c_t^1}{1+n} = \frac{f(k_t) - f'(k_t)k_t - c^1\left(f'(k_{t+1}), f(k_t) - f'(k_t)k_t\right)}{1+n} \Leftrightarrow$$

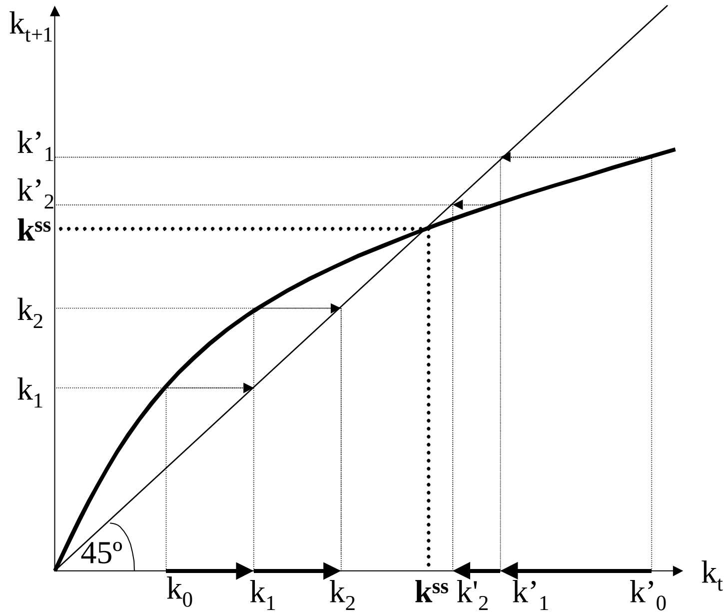
$$k_{t+1} = \frac{s\left(f'(k_{t+1}), f(k_t) - f'(k_t)k_t\right)}{1+n} \qquad (10)$$

Se puede demostrar (véase el apéndice) que bajo el supuesto de que el capital más las rentas del capital por trabajador, $(1+f'(k))k$, sean crecientes en k, la ecuación (10) define de forma implícita una función que relaciona el capital del siguiente periodo k_{t+1} con el del periodo presente k_t:

$$k_{t+1} = \Gamma(k_t) \qquad (11)$$

donde $\Gamma(.)$ es una función creciente, continua y diferenciable de primer orden. El gráfico 1 nos muestra un caso típico. Aquel punto en el que la curva $\Gamma(k)$ corta con la recta de cuarenta y cinco grados corresponde al nivel de capital en que $k=\Gamma(k)$ y, por tanto es el nivel de capital del estado estacionario. Si el nivel de capital inicial es k^{ss} el capital del siguiente periodo también será k^{ss}. Podemos también observar que cuando el nivel de capital está por debajo del de estado estacionario, el capital crece y se acerca progresivamente al nivel del estado estacionario. Sucede lo contrario cuando el nivel inicial de capital está por encima del valor del estado estacionario.

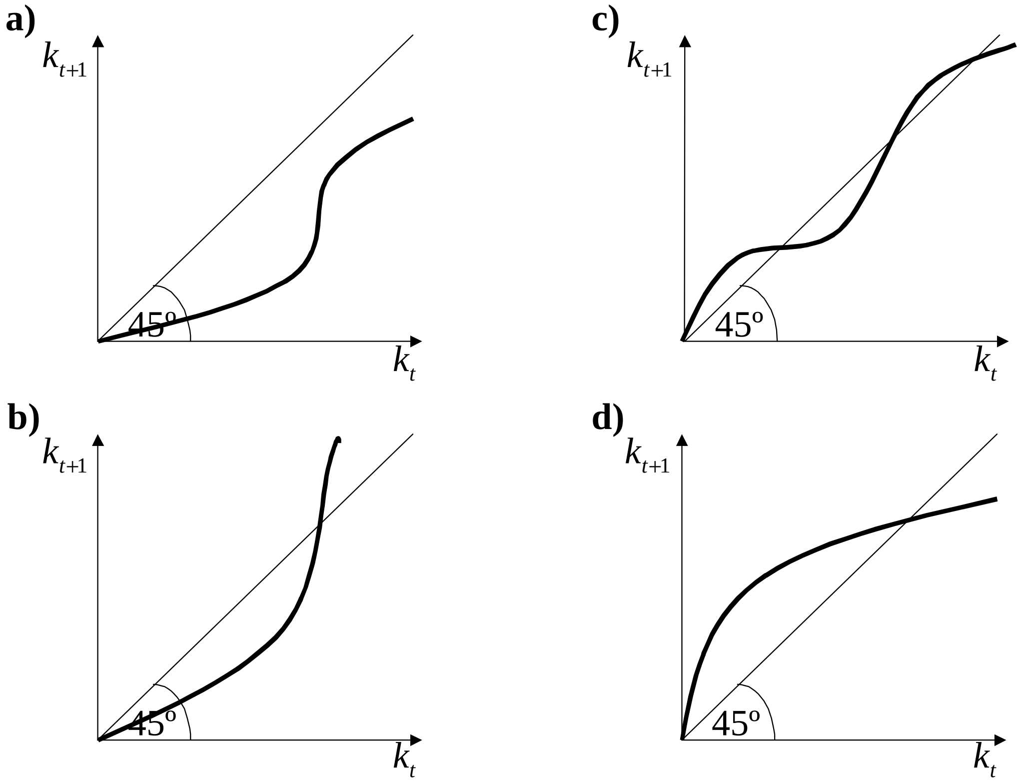
Gráfico 1



El gráfico 1 es la forma más común de función Γ(.) y será el caso en el que concentraremos nuestro análisis. No obstante, el gráfico 2 muestra otras posibles formas. El gráfico 2.a representa una economía en la que el único estado estacionario que existe es el trivial (con un nivel de capital por trabajador igual a cero). En el gráfico 2.b, aunque hay un estado estacionario no trivial, el estado estacionario trivial es estable. No obstante, Konishi y Perera Tallo (1997) demuestran que este caso se puede desechar bajo los supuestos de que las curvas de Engel son localmente cóncavas en cero y que la proporción de la renta que va al factor trabajo no se hace cero cuando el nivel de capital es pequeño:

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(k) - f'(k)k}{f(k)} > 0$$

Gráfico 2



5 Eficiencia

Para estudiar la eficiencia del mecanismo de mercado, consideremos la ecuación de acumulación del capital por trabajador (véase ecuación 1):

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{L_t}{L_{t+1}}\left[\frac{F(K_t, L_t) - C_t + K_t}{L_t}\right] = \frac{1}{1+n}\left[f(k_t) - c_t + k_t\right] \Leftrightarrow \\ k_{t+1} &= \frac{1}{1+n}\left[f(k_t) - c_t + k_t\right] \end{aligned} \qquad (12)$$

donde c_t es el consumo por trabajador. El capital por trabajador permanece constante cuando:

$$\begin{aligned} & k_{t+1} = k_t \Leftrightarrow k_{t+1} = \frac{1}{1+n}\left[f(k_t) - c_t + k_t\right] = k_t \Leftrightarrow \\ & c_t = c_{k_{t+1}=k_t}(k_t) = f(k_t) - nk_t \end{aligned}$$

La derivada de la anterior función es:

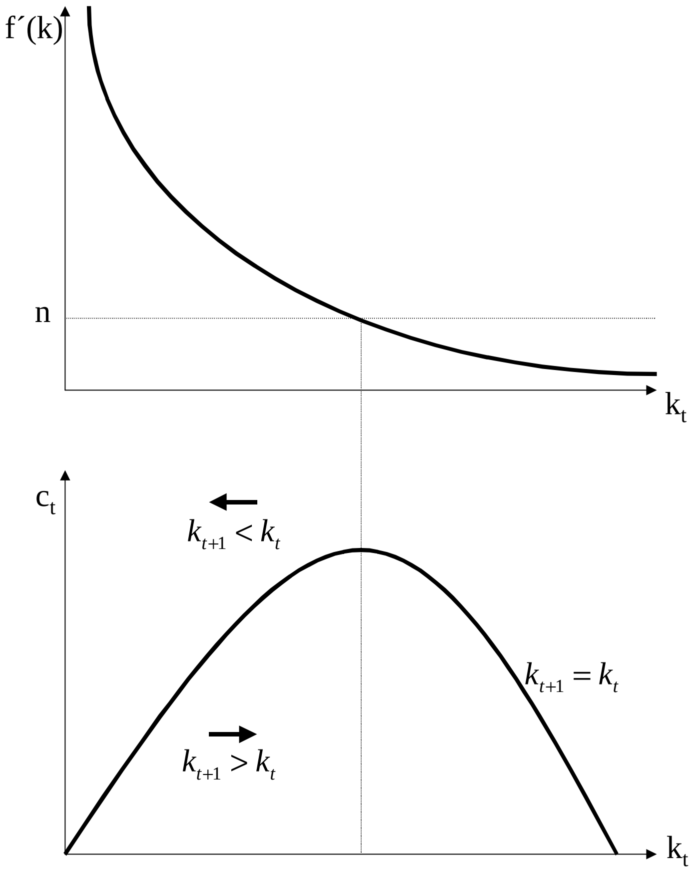
$$\frac{\partial c_{k_{t+1}=k_t}(k)}{\partial k} = f'(k_t) - n$$

El nivel de capital en el que la función $c_{k_{t+1}=k_t}(k)$ alcanza su máximo se llama capital de la regla de oro y viene definido como:

$$k^{ro} \overset{Def}{\Leftrightarrow} f'(k^{ro}) = n$$

En el gráfico 3 se puede observar como cuando el nivel de capital está por debajo del de la regla de oro, el producto marginal del capital *f'(k)* está por encima de la tasa de crecimiento de la población *n* y, consecuentemente, la función $c_{k_{t+1}=k_t}(k)$ es creciente. Ocurre lo contrario cuando el nivel de capital está por encima del de la regla de oro.

Gráfico 3



En el gráfico 3 también se puede observar que cuando el consumo está por encima de la curva $c_{k_{t+1}=k_t}(k)$, el capital del siguiente periodo es inferior al del presente (hecho que se representa por una flecha horizontal de derecha a izquierda):

$$Si\ c_t > c_{k_{t+1}=k_t}(k_t) \Rightarrow k_{t+1} = \frac{1}{1+n}\left[f(k_t) - c_t + k_t\right] < \frac{1}{1+n}\left[f(k_t) - c_{k_{t+1}=k_t}(k_t) + k_t\right] = k_t$$

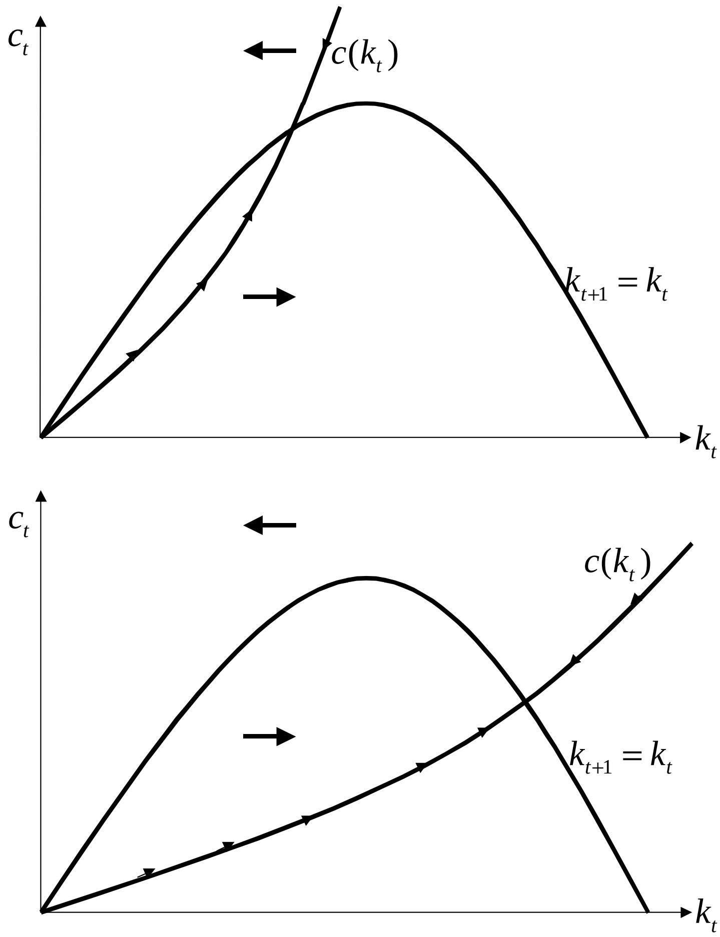
Lo contrario ocurre cuando el consumo está por debajo de la curva $c_{k_{t+1}=k_t}(k)$, es decir, el capital del siguiente periodo es superior al del presente (representado por la flecha de izquierda a derecha): el consumo es menor que el que se necesita para mantener el capital por trabajador constante $c_{k_{t+1}=k_t}(k)$, por tanto, el ahorro y consecuentemente la inversión son mayores que los niveles necesarios para mantener el capital por trabajador constante.

Usando las ecuaciones (2), (4), (8), (9) y (11), se obtiene el consumo por trabajador en equilibrio como sigue:

$$c_t = \frac{C_t}{L_t} = \frac{L_t c_t^1 + L_{t-1} c_t^2}{L_t} = c_t^1 + \frac{c_t^2}{1+n} = c^1(r_{t+1}, w_t) + \frac{[1+r_t]b_t}{1+n} =$$
$$c^1\left(f'(k_{t+1}), f(k_t) - f'(k_t)k_t\right) + \frac{[1+f'(k_t)]k_t(1+n)}{1+n}$$
$$c_t = c(k_t) = c^1\left(f'(\Gamma(k_t)), f(k_t) - f'(k_t)k_t\right) + [1+f'(k_t)]k_t$$

En el apéndice se demuestra que *c(k)* es una función creciente. El nivel de consumo y capital por trabajador del estado estacionario será aquel punto en que la curva $c_{k_{t+1}=k_t}(k)$ corte con la curva $c(k)$. En el gráfico 4 se muestra que el capital del estado estacionario puede ser mayor o menor que el de la regla de oro:

Gráfico 4



Cuando el capital del estado estacionario es mayor que el de la regla de oro se dice que el estado estacionario es dinámicamente ineficiente, ya que no es óptimo de Pareto. Para demostrarlo considere el siguiente sendero de consumo:

$$\{c_t^*\}_{t=0}^{\infty} = \{f(k^{ss}) - (1+n)k^{ro}, f(k^{ro}) - (1+n)k^{ro}, f(k^{ro}) - (1+n)k^{ro}, \dots\} = \{c_0^*, c^{ro}, c^{ro}, c^{ro} \dots\}$$

Si el capital del estado estacionario es mayor que el de la regla de oro, el anterior sendero de consumo es factible y estrictamente mayor que el del estado estacionario:

$$Si\ k^{ss} > k^{ro} \Rightarrow si\ t = 0 \quad c_0^* > c^{ro} > c^{ss},\ si\ t > 0 \quad c_t^* = c^{ro} > c^{ss}$$

Esto implica que los individuos de todas las generaciones podrían estar mejor que en el estado estacionario, por tanto, el equilibrio no es óptimo de Pareto.

6 Seguridad Social

6.1 Efecto de sobre la acumulación de Capital

Hay dos posibles sistemas de seguridad social:

- Sistema de seguridad social con fondos de inversión: las pensiones se financian con las rentas de las inversiones que se han realizado con los pagos previos. Es decir, las pensiones de mañana se financian con los impuestos de hoy.

- Sistema de seguridad social de pago con los ingresos corrientes (*pay as you go*): las pensiones se pagan con los impuestos corrientes de la seguridad social. Es decir, las pensiones de hoy se pagan con los impuestos de hoy.

El primer sistema no es muy usado en la práctica, y de hecho es fácil de demostrar que este sistema no tiene ningún efecto en este tipo de economía. El segundo sistema es el más común y concentraremos nuestro análisis en él.

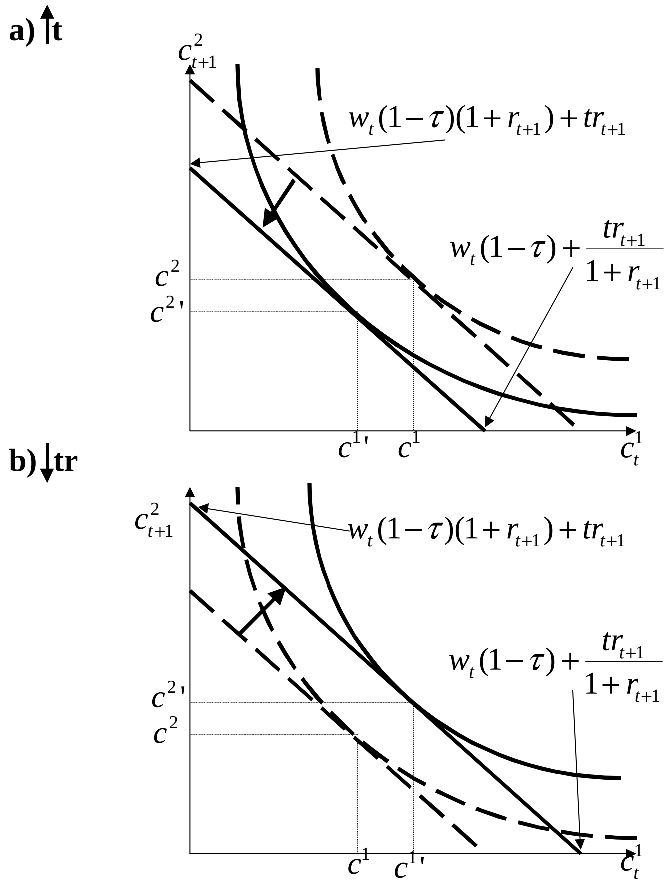
La seguridad social financiada con ingresos corrientes consiste en un impuesto sobre las rentas laborales (de los jóvenes) para financiar las pensiones de las personas jubiladas, de esta forma el problema de maximización de la utilidad de las economías domésticas es como sigue:

$$\begin{aligned} &\underset{c^1,c^2}{Max}\ u(c_t^1, c_{t+1}^2) \\ &s.a: \\ &b_{t+1} = w_t(1-\tau) - c_t^1 \\ &c_{t+1}^2 = b_{t+1}(1+r_{t+1}) + tr_{t+1} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} &\underset{c^1,c^2}{Max}\ u(c_t^1, c_{t+1}^2) \\ &s.a: \quad w_t(1-\tau) + \frac{tr_{t+1}}{(1+r_{t+1})} = c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{(1+r_{t+1})} \end{aligned}$$

donde τ es el tipo impositivo de la seguridad social y *tr* es la cuantía de la pensión que recibe cada individuo jubilado.

El gráfico 5.a muestra el efecto de un aumento en el tipo impositivo sobre la renta laboral el salario: reduce la renta de los jóvenes y por tanto su ahorro. El gráfico 5.b representa el aumento de la pensión en el segundo periodo de vida: aumenta el valor actualizado de las rentas presentes y futuras del individuo, con lo que éste consume más. Dado que la renta en el primer periodo de vida sigue siendo la misma (el salario), esto conlleva una reducción del ahorro.

Gráfico 5



Tanto el aumento del tipo impositivo de la seguridad social come de las pensiones tiene un efecto negativo sobre el ahorro, como ilustra el gráfico 5, y se demuestra formalmente como sigue:

$$s\left(r_{t+1}, w_t(1-\tau), tr_{t+1}\right) = b_{t+1} = \frac{c^2\left(r_{t+1}, w_t(1-\tau)+\dfrac{tr_{t+1}}{1+r_{t+1}}\right) - tr_{t+1}}{1+r_{t+1}} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial s\left(r_{t+1}, w_t(1-\tau), tr_{t+1}\right)}{\partial \tau} = -\frac{c_w^{2}{}'\left(r_{t+1}, w_t(1-\tau)+\dfrac{tr_{t+1}}{1+r_{t+1}}\right) w_t}{1+r_{t+1}} < 0$$

$$s(r_{t+1}, w_t(1-\tau), tr_t) = w_t(1-\tau) - c^1\left(r_{t+1}, w_t(1-\tau) + \frac{tr_{t+1}}{1+r_{t+1}} \right) \Rightarrow$$
$$\frac{\partial s(r_{t+1}, w_t(1-\tau), tr_t)}{\partial tr_t} = -c_w^1{}'\left(r_{t+1}, w_t(1-\tau) + \frac{tr_{t+1}}{1+r_{t+1}} \right)\frac{1}{1+r_{t+1}} < 0$$

Por tanto, el ahorro depende positivamente de la renta del primer periodo, es decir, del salario después de impuestos, y negativamente de la renta (no financiera) del segundo periodo, es decir, las pensiones:

$$s\left(\underset{?}{r_{t+1}}, \underset{+}{w_t(1-\tau)}, \underset{-}{tr_{t+1}} \right)$$

donde el signo de las derivadas del ahorro con respecto a cada una de las anteriores variables esta representado debajo de las mismas. El sistema de la seguridad social disminuye la renta del primer periodo, debido al impuesto sobre la renta laboral, y aumenta la renta del segundo periodo a través de las pensiones, por tanto reduce el ahorro.

Para que el presupuesto de la seguridad social este equilibrado la recaudación de impuestos tiene que ser igual a las pensiones:

$$L_t \tau w_t = L_{t-1} tr_t \quad \Leftrightarrow \quad (1+n)\tau w_t = tr_t$$

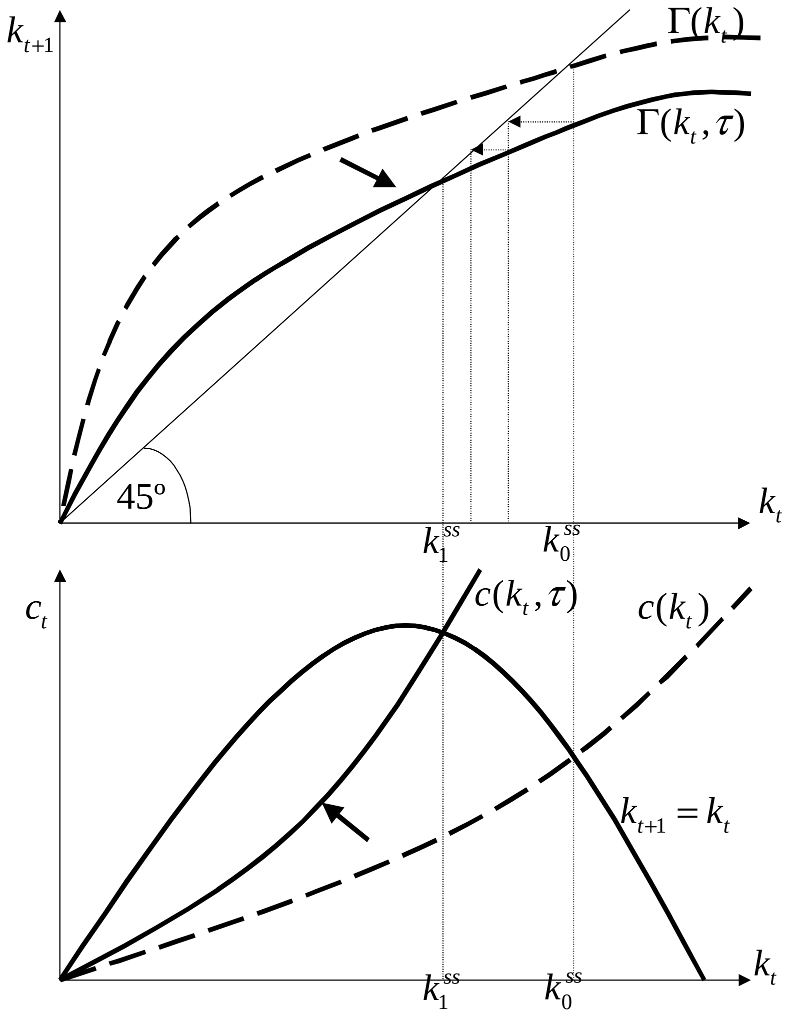
Cuando hay seguridad social, la ecuación de acumulación de capital por trabajador: la ecuación de acumulación de capital por trabajador:

$$k_{t+1} = \frac{s\left(f'(k_{t+1}), [f(k_t) - f'(k_t)k_t](1-\tau), (1+n)\tau[f(k_{t+1}) - f'(k_{t+1})k_{t+1}] \right)}{1+n}$$

Como muestra el gráfico 6, el sistema de la seguridad social reduce el ahorro y, consecuentemente, el nivel de capital por trabajador en el estado estacionario (ver detalles en el apéndice):

$$\frac{\partial s_t}{\partial \tau} = -s'_w\left(f'(k_{t+1}), [f(k_t) - f'(k_t)k_t](1-\tau), (1+n)\tau[f(k_{t+1}) - f'(k_{t+1})k_{t+1}] \right)[f(k_t) - f'(k_t)k_t] +$$
$$s'_{tr}\left(f'(k_{t+1}), [f(k_t) - f'(k_t)k_t](1-\tau), (1+n)\tau[f(k_{t+1}) - f'(k_{t+1})k_{t+1}] \right)(1+n)[f(k_{t+1}) - f'(k_{t+1})k_{t+1}] < 0$$

Gráfico 6



El resultado no es sorprendente: el sistema de la seguridad social simplemente le quita renta a los ahorradores (los jóvenes) y se la da a las personas que no ahorran (los jubilados). Además, si los jóvenes van a recibir pensiones en el futuro, no es necesario ahorrar tanto para poder disfrutar del consumo cuando se llega al periodo de jubilación. No obstante, esto no significa que la eficiencia de la economía disminuya. De hecho, si se parte de un estado estacionario dinámicamente ineficiente, la reducción del nivel de capital que conlleva el sistema de la seguridad social puede llevar a un estado estacionario con un nivel de consumo superior al nivel inicial (como ocurre en el gráfico 6).

6.2 Sostenibilidad Política

- ***Agentes Homogéneos***

Se dice que un sistema de la seguridad social es políticamente sostenible si el sistema beneficia a la mayoría de los individuos de cada periodo. Es decir si se celebrara un referéndum sobre si mantener el sistema de la seguridad social, saldría sí en cada periodo. En nuestro caso, los individuos son homogéneos, y dado que los jóvenes son mayoría (hay 1+*n* jóvenes por cada jubilado), un sistema de seguridad es políticamente sostenible si beneficia a los jóvenes. Para que esto ocurra, el valor actualizado de las pensiones tiene que ser superior o igual a los impuestos pagados a lo largo de la vida activa:

$$\tau_t w_t \leq \frac{tr_{t+1}}{1+r_{t+1}} = \frac{\tau_{t+1} w_{t+1}(1+n)}{1+r_{t+1}}$$

Por tanto, en estado estacionario se tiene que cumplir que:

$$\tau w^{ss} \leq \frac{\tau w^{ss}(1+n)}{1+r^{ss}} \Leftrightarrow r^{ss} \leq n \Leftrightarrow f'(k^{ss}) \leq n \Leftrightarrow k^{ss} \geq k^{ro}$$

Por lo que un sistema de seguridad social es políticamente sostenible si y solo si el estado estacionario es dinámicamente ineficiente.

- ***Agentes Heterogéneos***

Cuando hay agentes heterogéneos este resultado no se mantiene porque el sistema de la seguridad social puede que no solo redistribuya renta entre jubilados y jóvenes, sino entre jóvenes ricos y pobres. Por tanto los jóvenes pobres se pueden "aliar" con los jubilados para mantener el sistema de la seguridad social. Por ejemplo, consideremos que hay dos grupos de jóvenes, los ricos y los pobres, que tienen respectivamente θ^R y θ^P unidades eficientes de trabajo cuando son jóvenes. La proporción de pobres sobre la población activa total se denota por μ. Se normaliza las unidades eficientes de trabajo por persona activa a uno, por tanto $\mu\theta^P+(1-\mu)\theta^R=1$. Supongamos que los pobres obtienen la proporción χ^P de las pensiones por persona jubilada, donde $1 \geq \chi^P > \theta^P$. La última desigualdad significa que el sistema es progresivo, es decir, la ratio pensión-impuestos de la seguridad social es mayor para los pobres que para los ricos. Se supone además que hay más jóvenes pobres y personas jubiladas (juntas) que jóvenes ricos:

$$\mu L_t + L_{t-1} \geq (1-\mu)L_t \Leftrightarrow \mu(1+n)+1 \geq (1-\mu)(1+n) \Leftrightarrow \mu \geq \frac{n}{2(1+n)}$$

Dado que los jubilados siempre estarán a favor de un sistema de seguridad social, para que el sistema de la seguridad social sea políticamente sostenible se tiene que dar que los jóvenes pobres salgan beneficiados por la seguridad social:

$$\tau_t \theta^p w_t \leq \frac{\chi^p tr_{t+1}}{1+r_{t+1}} = \frac{\chi^p \tau_{t+1} w_{t+1}(1+n)}{1+r_{t+1}}$$

Por tanto, en estado estacionario se tiene que cumplir que:

$$\tau\theta^p w^{ss} \leq \frac{\chi^p \tau w^{ss}(1+n)}{1+r^{ss}} \Leftrightarrow r^{ss} \leq \frac{\chi^p}{\theta^p}(1+n)-1 \Leftrightarrow f'(k^{ss}) \leq \frac{\chi^p}{\theta^p}(1+n)-1 \Leftrightarrow k^{ss} \geq k^{sost}$$

donde:

$$k^{sost} \overset{Def}{\Leftrightarrow} f'(k^{sost}) = \frac{\chi^p}{\theta^p}(1+n)-1$$

Nótese que bajo el supuesto de que el sistema es progresivo ($(\chi^p / \theta^p) > 1$):

$$f'(k^{sost}) = \frac{\chi^p}{\theta^p}(1+n)-1 > n \Rightarrow k^{sost} < k^{ro}$$

Por tanto, cuando hay agentes heterogéneos, el sistema es políticamente sostenible, incluso cuando el estado estacionario no es dinámicamente ineficiente, siempre que el sistema sea suficientemente progresivo (la ratio χ^p / θ^p sea suficientemente alta).

7 La deuda Pública

7.1 Acumulación del Capital

Como hemos comentado anteriormente, en el modelo de Ramsey se cumple la "Equivalencia Ricardiana": es irrelevante si el gasto público se financia con impuestos o con deuda pública. No obstante, en el modelo de generaciones solapadas los efectos son muy distintos.

Consideremos que partimos de una situación inicial en que la deuda pública es cero y hay un cierto nivel de gasto que es financiado con impuestos sobre la renta laboral, por tanto el nivel de inversión será:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{k}_{t+1} = \dfrac{s(r_{t+1}, w_t(1-\tau_t))}{1+n} = \dfrac{w_t(1-\tau_t) - c^1(r_{t+1}, w_t(1-\tau_t))}{1+n} \\ g_t = \tau_t w_t \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\hat{k}_{t+1} = \frac{s(r_{t+1}, w_t - g_t)}{1+n} = \frac{w_t - g_t - c^1(r_{t+1}, w_t - g_t)}{1+n}$$

Sin embargo, si se financia con deuda pública:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{k}_{t+1} + dp_{t+1} = \dfrac{s(r_{t+1}, w_t)}{1+n} = \dfrac{w_t - c^1(r_{t+1}, w_t)}{1+n} \\ g_t L_t = dp_{t+1} L_{t+1} \Leftrightarrow g_t = dp_{t+1}(1+n) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{s(r_{t+1}, w_t) - g_t}{1+n} - = \frac{w_t - g_t - c^1(r_{t+1}, w_t)}{1+n}$$

Es fácil de demostrar que hay más inversión cuando el gasto es financiado con impuestos:

$$\hat{k}_{t+1} = \frac{w_t - g_t - c^1(r_{t+1}, w_t - g_t)}{1+n} > \frac{w_t - g_t - c^1(r_{t+1}, w_t)}{1+n} = \tilde{k}_{t+1}$$

7.2 Sostenibilidad

Cabe preguntarse si la deuda pública es sostenible en el largo plazo, no desde un punto de vista político, sino simplemente ver bajo que condiciones es posible que haya un stock de deuda pública positivo en el estado estacionario. Para responder a esta pregunta vamos a utilizar el balance presupuestario del estado:

$$G_t + (1+r_t)DP_t = T_t + DP_{t+1}$$

donde *DP*, *G* y *T* son respectivamente deuda pública agregada, gasto público agregado y recaudación agregada de impuestos. El estado tiene que financiar el gasto público G_t y tiene que pagar la deuda pública DP_t más los intereses $r_t\, DP_t$. Para ello cuenta con los ingresos de la recaudación de impuestos T_t y de la emisión de la nueva deuda pública DP_{t+1}. A partir de esta expresión obtenemos la ecuación de acumulación de deuda pública agregada:

$$DP_{t+1} = (1 + r_t)DP_t + G_t - T_t$$

Poniéndolo en términos por trabajador:

$$\frac{DP_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{L_t}{L_{t+1}}\left[(1+r_t)\frac{DP_t}{L_t} + \frac{G_t}{L_t} - \frac{T_t}{L_t}\right]$$

$$dp_{t+1} = \frac{(1+r_t)dp_t + g_t - T_t}{1+n}$$

En el estado estacionario:

$$dp^{ss} = \frac{(1+r^{ss})dp^{ss} + g^{ss} - T^{ss}}{1+n} \Leftrightarrow$$

$$dp^{ss}(n - r^{ss}) = g^{ss} - T^{ss}$$

Por tanto:

- Si el capital del estado estacionario es menor que el de la regla de oro, puede haber deuda publica en el estado estacionario, es decir, la deuda pública es sostenible, si en el estado estacionario hay superávit presupuestario (el gasto público es inferior a los impuestos):

$$k^{ss} < k^{ro} \Leftrightarrow r^{ss} > n \Rightarrow dp^{ss} = \frac{g^{ss} - T^{ss}}{n - r^{ss}} > 0 \Rightarrow g^{ss} - T^{ss} > 0$$

- Si el capital del estado estacionario es igual al de la regla de oro, la deuda pública es sostenible si en el estado estacionario hay equilibrio presupuestario (el gasto público es inferior a los impuestos):

$$k^{ss} = k^{ro} \Leftrightarrow r^{ss} = n \Rightarrow dp^{ss} > 0 \Rightarrow g^{ss} - T^{ss} = 0$$

- Si el capital del estado estacionario es superior al de la regla de oro, el estado estacionario es dinámicamente ineficiente, la deuda pública es sostenible si en el estado estacionario hay déficit presupuestario (el gasto público es superior a los impuestos):

$$k^{ss} > k^{ro} \Leftrightarrow r^{ss} < n \Rightarrow dp^{ss} = \frac{g^{ss} - T^{ss}}{n - r^{ss}} > 0 \Rightarrow g^{ss} - T^{ss} < 0$$

7.3 Estado Estacionario

Vamos a suponer que hay un impuesto sobre la renta laboral con tipo impositivo τ y que el gasto público es una fracción γ de la renta. En el estado estacionario se tienen que dar las siguientes condiciones:

$$k_{t+1} + dp_{t+1} = \frac{s\left(r_{t+1}, w_t(1-\tau)\right)}{1+n} \Rightarrow k^{ss} + dp^{ss} = \frac{s\left(r^{ss}, w^{ss}(1-\tau)\right)}{1+n}$$

$$dp_{t+1} = \frac{(1+r_t)dp_t + \gamma y_t - \tau w_t}{1+n} \Rightarrow dp^{ss}(n - r^{ss}) = \gamma y^{ss} - \tau w^{ss}$$

Suponiendo que el estado estacionario no es el de la regla de oro y la deuda pública es sostenible, en el estado estacionario se tiene que cumplir que:

$$k^{ss}=i^{ss}=\frac{s\left(f'(k^{ss}),\left[f(k^{ss})-f'(k^{ss})k^{ss}\right](1-\tau)\right)}{1+n}-\frac{\gamma f(k^{ss})-\tau\left[f(k^{ss})-f'(k^{ss})k^{ss}\right]}{n-f'(k^{ss})}$$

$$dp^{ss}=\frac{\gamma f(k^{ss})-\tau\left[f(k^{ss})-f'(k^{ss})k^{ss}\right]}{n-f'(k^{ss})}$$

- Cuando el estado estacionario es dinámicamente eficiente ($f'(r^{ss})>n$), la inversión aumenta con el tipo impositivo y la deuda pública disminuye:

$$\frac{\partial i^{ss}}{\partial\tau}=\left[-\frac{s'_w}{1+n}+\frac{1}{n-f'(k^{ss})}\right]\left[f(k^{ss})-f'(k^{ss})k^{ss}\right]>\left[-\frac{1}{1+n}+\frac{1}{n-f'(k^{ss})}\right]\left[f(k^{ss})-f'(k^{ss})k^{ss}\right]>0$$

$$\frac{\partial dp^{ss}}{\partial\tau}=\frac{\left[f(k^{ss})-f'(k^{ss})k^{ss}\right]}{n-f'(k^{ss})}<0$$

- Cuando el estado estacionario es dinámicamente eficiente ($f'(r^{ss})<n$), la inversión disminuye con el tipo impositivo y la deuda pública aumenta:

$$\frac{\partial i^{ss}}{\partial\tau}=\left[-\frac{s'_w}{1+n}+\frac{1}{n-f'(k^{ss})}\right]\left[f(k^{ss})-f'(k^{ss})k^{ss}\right]<0$$

$$\frac{\partial dp^{ss}}{\partial\tau}=\frac{\left[f(k^{ss})-f'(k^{ss})k^{ss}\right]}{n-f'(k^{ss})}>0$$

En resumen, el capital y la deuda pública del estado estacionario siempre van en dirección contraria, más deuda pública implica menos capital.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Azariadis, C. (1993), *Intertemporal Macroeconomics,* Blackwell, Oxford.

Barro, R. y X. Sala-i-Martin (2003), *Economic Growth*, MIT Press, Massachusetts, 2ª edición.

Blanchard, O. y S. Fischer (1989), *Lectures on Macroeconomics*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Diamond, P.A. (1965), “National Debt in a Neoclassical Growth Model”, *American Economic Review*, vol. 55 (1), 393-414.

Galor, O. y H. E. Ryder (1989), “Existence, Uniqueness, and Stability of Equilibrium in a Overlapping-Generation Model with Productive Capital”, *Journal of Economic Theory*, vol. 49 (1), 360-375.

Ihori, T. (1978), “The Golden Rule and the Role of Government in a Life Cycle Growth Model”, *American Economic Review*, vol. 68 (3), 389-396.

Konishi, H. y F. Perera-Tallo (1997), “Existence of Steady-State in an Overlapping Generation Model with Production”, *Economic Theory*, vol. 9 (3), 529-538.

Romer, D. (2002), *Macroeconomía Avanzada,* McGrawHill, 2ª edición.

APÉNDICE

- ***Existencia de la función Γ(k)***

Se define:

$$RMS(c^1, c^2) = \frac{u'_{c^1}(c^1, c^2)}{u'_{c^2}(c^1, c^2)}$$

Es bien sabido que:

$$RMS'_{c^1}(c^1, c^2) < 0, \quad RMS'_{c^2}(c^1, c^2) > 0$$

En equilibrio se tiene que dar que:

$$\Psi(k, k_{+1}) = RMS\left(f(k) - f'(k)k - (1+n)k_{+1}, (1+n)k_{+1}[1 + f'(k_{+1})]\right) - [1 + f'(k_{+1})] = 0$$

Bajo el supuesto de que la función $k[1 + f'(k)]$ es creciente, la anterior función define implícitamente una función $k_{+1} = \Gamma(k)$, cuya derivada es:

$$\frac{\partial k_{+1}}{\partial k} = -\frac{\dfrac{\partial \Psi(k, k_{+1})}{\partial k}}{\dfrac{\partial \Psi(k, k_{+1})}{\partial k_{+1}}} =$$

$$-\frac{-RMS'_{c^1}\left(c^1, c^2\right) f''(k)k}{-RMS'_{c^1}\left(c^1, c^2\right)(1+n) + RMS'_{c^2}\left(c^1, c^2\right)(1+n)\dfrac{\partial[k_{+1}[1 + f'(k_{+1})]]}{\partial k_{+1}} - f''(k_{+1})} > 0$$

Por tanto, esta función es creciente.

Obviamente, en equilibrio:

$$k_{t+1} = \Gamma(k_t) \qquad (10)$$

- ***Existencia de la función c(k)***

Se define

$$k_{+1}(k,c^1)=\frac{f(k)-f'(k)k-c^1}{1+n}$$

En equilibrio se tiene que dar que:

$$\Psi(k,c)=RMS\left(c^1,(1+n)k_{+1}(k,c^1)\left[1+f'(k_{+1}(k,c^1))\right]\right)-\left[1+f'(k_{+1}(k,c^1))\right]=0$$

Bajo el supuesto de que la función $k[1+f'(k)]$ es creciente, la anterior función define implícitamente una función $c^1(k)$ con la siguiente derivada:

$$\frac{\partial c^1}{\partial k}=-\frac{\frac{\partial\Psi(k,c^1)}{\partial k}}{\frac{\partial\Psi(k,c^1)}{\partial c}}=-\frac{\left[RMS'_{c^2}\left(c^1,c^2\right)\frac{\partial\left[k_{+1}\left[1+f'(k_{+1})\right]\right]}{\partial k_{+1}}-f''(k_{+1})\right]\frac{-f''(k)k}{1+n}}{-RMS'_{c^1}\left(c^1,c^2\right)+RMS'_{c^2}\left(c^1,c^2\right)\frac{\partial\left[k_{+1}\left[1+f'(k_{+1})\right]\right]}{\partial k_{+1}}-\frac{f''(k_{+1})}{1+n}}>0$$

Se puede definir la función $c(k)$ de la siguiente forma:

$$c(k)=\frac{\left[1+f'(k)\right]k}{1+n}+c^1(k)$$

- ***Efecto de la seguridad social sobre la acumulación de capital***

En equilibrio se tiene que dar que:

$$\begin{aligned}&\Psi(k,k_{+1})=\\&RMS\left(\left[f(k)-f'(k)k\right](1-\tau)-(1+n)k_{+1},\,k_{+1}\left[1+f'(k_{+1})\right]+\tau(1+n)\left[f(k_{+1})-f'(k_{+1})k_{+1}\right]\right)\\&-\left[1+f'(k_{+1})\right]=0\end{aligned}$$

Bajo el supuesto de que la función $k[1+f'(k)]$ es creciente:

$$\frac{\partial k_{+1}}{\partial\tau}=-\frac{\frac{\partial\Psi(k,k_{+1})}{\partial\tau}}{\frac{\partial\Psi(k,k_{+1})}{\partial k_{+1}}}=$$

$$-\frac{-RMS'_{c^1}\left(c^1,c^2\right)\left[f(k)-f'(k)k\right]+RMS'_{c^2}\left(c^1,c^2\right)(1+n)\left[f(k_{+1})-f'(k_{+1})k_{+1}\right]}{-RMS'_{c^1}\left(c^1,c^2\right)(1+n)+RMS'_{c^2}\left(c^1,c^2\right)\left[\frac{\partial\left[k_{+1}\left[1+f'(k_{+1})\right]\right]}{\partial k_{+1}}-\tau(1+n)f''(k_{+1})\right]-f''(k_{+1})}<0$$