Universidad de La Laguna
Departamento de Análisis Económico

OWC Economía para Matemáticos
Tema 7: Crecimiento Económico a Largo Plazo

1. Considere el modelo de Diamond donde los agentes tienen una función de utilidad de elasticidad constante:

$$\frac{\left(c^1\right)^{1-\sigma}}{1-\sigma}+\frac{1}{1+\rho}\frac{\left(c^2\right)^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

a) Calcular la función de ahorro.
b) ¿Cuál es el efecto sobre la función de ahorro y sobre la acumulación de capital de un impuesto sobre la rentas del capital que se dedica a ayuda humanitaria a otros países?
c) ¿Cuál es el efecto sobre la función de ahorro y sobre la acumulación de capital de un impuesto sobre la rentas del trabajo que se devuelve en forma de transferencias a las personas jubiladas (seguridad social)?

2. Considere el modelo de Diamond donde los agentes tienen una función de utilidad logarítmica y una función de producción Cobb-Douglas.

$$u\left(c^1,c^2\right)=\ln c^1+\frac{1}{1+\rho}\ln c^2; \qquad F(K,A_tL)=K^{\alpha}\left(A_tL\right)^{1-\alpha}$$

donde A_t es el número de unidades eficientes de trabajo de cada "joven", que crece a una tasa exógena "a".
a) Calcular la función de ahorro.
b) Calcular la función que determina el capital por unidad eficiente de trabajo del siguiente periodo.
c) Representar gráficamente y explicar en términos económicos el efecto sobre la acumulación de capital de un aumento en "n", en "a" y en "ρ".

3. Considere el modelo de Diamond donde los agentes tienen una función de utilidad logarítmica y una función de producción Cobb-Douglas.

$$u\left(c^1,c^2\right)=\ln c^1+\frac{1}{1+\rho}\ln c^2; \qquad F(K,A_tL)=K^{\alpha}\left(A_tL\right)^{1-\alpha}$$

donde A_t es el número de unidades eficientes de trabajo de cada "joven", que crece a una tasa exógena "a". Considere que hay una proporción fija de la renta γ que se destina a gasto público. Determinar cual de las siguientes políticas tiene un mayor efecto sobre la acumulación de capital:.
a) Un impuesto sobre los salarios.
b) Un impuesto sobre el capital.

4. Considere el modelo de Diamond donde los agentes tienen una función de utilidad de elasticidad constante y una función de producción lineal.

$$u\left(c^1,c^2\right)=\frac{\left(c^1\right)^{1-\sigma}}{1-\sigma}+\frac{1}{1+\rho}\frac{\left(c^2\right)^{1-\sigma}}{1-\sigma}; \qquad F(K,L)=AK+BL$$

Considere que hay un impuesto de la seguridad social con tipo impositivo τ que se distribuye entre las personas jubilados en forma de pensiones.

a) Calcular la función de ahorro.
b) Calcular la función que determina el capital por unidad eficiente de trabajo del siguiente periodo.
c) Representar gráficamente el efecto sobre la acumulación de capital de un aumento en "τ".
d) ¿Bajo que condiciones el estado estacionario es dinámicamente inficiente?
e) ¿Bajo que condiciones este sistema de la seguridad social es políticamente sostenible?

5. Considere el modelo de Diamond donde hay cambio técnico exógeno con una función de producción $F(K,A_tL)$, donde A_t es el número de unidades eficientes de trabajo de cada "joven", que crece a una tasa exógena "a". Explicar si cada uno de los siguientes sistemas de seguridad social es progresivo, determinar la condición para que el sistema de la seguridad social sea políticamente sostenible y explicarla en términos económicos bajo los siguientes supuestos.
a) Hay dos grupos de jóvenes, los ricos y los pobres que tienen respectivamente $\theta^R A_t$ y $\theta^P A_t$ unidades eficientes de trabajo cuando son jóvenes, la proporción de pobres sobre la población activa total es denotada por μ. Se normaliza las unidades eficientes de trabajo a por persona activa a A_t, por tanto $\mu\theta^P+(1-\mu)\theta^R=1$. Supongamos que los pobres obtienen la proporción χ^P de las transferencias por persona jubilada donde $1 \geq \chi^P > \theta^P$. Se supone además que hay más jóvenes pobres y personas jubiladas juntas que jóvenes ricos.
b) Hay un continuo de jóvenes indexados en el intervalo $i \in [0,1]$ y distribuidos uniformemente, que tienen $\left[\underline{\theta}+2(1-\underline{\theta})i\right]A_t$ unidades eficientes de trabajo, donde $\underline{\theta} < 1$. La pensión que reciben esto individuos es igual a: $\left[\underline{\chi}+2(1-\underline{\chi})i\right]tr_t$, donde tr denota la pensión media y $\underline{\theta} < \chi \leq 1$.

6. Considere el modelo de Diamond donde los agentes tienen una función de utilidad homotética, de forma que el consumo óptimo del primer periodo es $c^1(r_{t+1},V_t)=c^1(r_{t+1},1)\,V_t$, donde V_t es el valor actualizado de todas las rentas presentes y en el futuro. La función de producción es: $F(K_t,A_tL_t)=\Gamma K_t+A_tL_t$, donde A_t es el número de unidades eficientes de trabajo por trabajador que crece a una tasa constante a. Considere que hay un impuesto de la seguridad social con tipo impositivo τ que se distribuye entre las personas jubilados en forma de pensiones. a) Calcular la función que determina el consumo por unidad eficiente de trabajo ($\tilde{c}(\tilde{k}_t)$). b) Calcular la función que determina el consumo por unidad eficiente de trabajo necesario para que el capital por unidad eficiente de trabajo permanezca constante ($\tilde{c}_{\tilde{k}_{t+1}=\tilde{k}_t}(\tilde{k}_t)$). c) Representar gráficamente el efecto sobre la acumulación de capital de un aumento en "τ" (en el espacio k, c). d) ¿Cuál es el tipo impositivo máximo posible?.

7. Considere el modelo de Diamond donde hay dos tipos de agentes: los privados y los políticos corruptos. Los agentes privados trabajan y ahorran en el primer periodo y se jubilan en el segundo y tienen una función de utilidad logarítmica: $u\left(c^1,c^2\right)=\ln c^1+\frac{1}{1+\rho}\ln c^2$. La función de producción es: $F(K,A_tL)=K^{\alpha}\left(A_tL\right)^{1-\alpha}$, donde A_t es el número de unidades eficientes de trabajo de cada "joven", que crece a una tasa exógena "a". Los políticos corruptos no trabajan ni ahorran simplemente consumen. Además hay un impuesto sobre las rentas laborales con tipo impositivo τ que sirve para financiar el consumo de los políticos corruptos. a) Calcular el capital por unidad eficiente de trabajo

del estado estacionario ($\tilde{k}_t$). b) Suponiendo que τ =0 ¿bajo qué condición el estado estacionario es dinámicamente ineficiente?. c) Suponiendo que se cumplen las condiciones del apartado b, calcular el tipo impositivo que haría que $\tilde{k}_t$ sea el de la regla de oro ¿Esta política implicaría una mejora en el sentido de Pareto?

8. Considere el modelo de Diamond donde los agentes tienen una función de utilidad logarítmica y la función de producción es Cobb-Douglas. $u\left(c^1, c^2\right) = \ln c^1 + \frac{1}{1+\rho}\ln c^2$; $F(K, L) = AK^{\alpha}\left(L\right)^{1-\alpha}$. Hay un impuesto de la seguridad social con tipo impositivo τ que se distribuye entre las personas jubiladas en forma de pensiones. Además se supone que hay depreciación y que la tasa de depreciación igual a 1, es decir, el capital sólo dura un periodo. a) Calcular la función que determina el capital por unidad eficiente de trabajo del siguiente periodo. b) Calcular el capital por unidad eficiente de trabajo del estado estacionario (k^{ss}). c) ¿bajo qué condición el estado estacionario es dinámicamente ineficiente?. d) Suponiendo que se cumple las condiciones del apartado "c" para τ =0 ¿Qué condición nos daría el tipo impositivo que haría que el capital del estado estacionario fuera el de la regla de oro? (no hace falta que lo resuelva).

9. Considere el modelo de Diamond donde las familias tienen una función de utilidad logarítmica: $u\left(c^1, c^2\right) = \ln c^1 + \frac{1}{1+\rho}\ln c^2$. La función de producción es Cobb-Douglas: $F(K, L) = K^{\alpha}\left(L\right)^{1-\alpha}$. Hay un impuesto sobre el consumo con tipo impositivo τ que sirve para financiar ayuda humanitaria a otros países. ¿Cuál es el efecto de un aumento del tipo impositivo τ sobre la acumulación de capital?. Explique en términos económicos.

10. Considere el modelo de Diamond donde los agentes sobreviven en el segundo periodo de vida con probabilidad μ. La función de utilidad logarítmica y la función de producción es Cobb-Douglas: $u\left(c^1, c^2\right) = \ln c^1 + \left[1/(1+\rho)\right]\mu \ln c^2$; $F(K, L) = AK^{\alpha}\left(L\right)^{1-\alpha}$ y la tasa de depreciación es igual a 1. Las rentas del capital de las personas que no sobreviven en el segundo periodo se reparten entre las personas jóvenes. ¿Cuál es el efecto de un aumento de la probabilidad de sobrevivir μ sobre la acumulación de capital?. Explique en términos económicos.

11. Sabiendo que la ecuación de acumulación de deuda pública agregada es como sigue: $DP_{t+1} = (1+r_t)DP_t + G_t - T_t$, donde DP, G y T son respectivamente deuda pública agregada, Gasto público agregado y recaudación agregada de impuestos. ¿Bajo que condiciones puede haber deuda pública (positiva) en el estado estacionario, es decir, la deuda pública es sostenible?.

12. Considere el modelo de Diamond donde las familias tienen una función de utilidad logarítmica: $u\left(c^1, c^2\right) = \ln c^1 + \frac{1}{1+\rho}\ln c^2$. La función de producción es Cobb-Douglas: $F(K, L) = AK^{\alpha}\left(L\right)^{1-\alpha}$. Hay un impuesto sobre la renta laboral con tipo impositivo τ mientras que una proporción constante γ de la renta sirve para financiar ayuda humanitaria a otros países. Sabiendo que la ecuación de acumulación de deuda pública agregada es como sigue: $DP_{t+1} = (1+r_t)DP_t + G_t - T_t$, donde DP, G y T son respectivamente deuda pública agregada, gasto público agregado y recaudación agregada de impuestos. a) ¿Bajo que condiciones puede haber deuda pública (positiva) en el estado estacionario, es decir, la deuda pública es sostenible?. b) Suponiendo que se cumple las condiciones del apartado 2, derivar la condición que tiene que cumplir el capital por trabajador en el estado estacionario. c) ¿Cuál es el efecto

sobre el capital del estado estacionario de un aumento en el tipos impositivo τ?. Explique en términos económicos.

13. Considere el modelo de Diamond donde los agentes tienen una función de utilidad homotética, de forma que el consumo óptimo del primer periodo es $c^1(r_{t+1}, V_t) = c^1(r_{t+1}, 1)\, V_t$, donde V_t es el valor actualizado de todas las rentas presentes y en el futuro. La función de producción es: $F(K_t, A_t L_t) = \Gamma K_t + BL_t$. Hay un impuesto sobre la renta con tipo impositivo τ mientras que una proporción constante γ de la renta sirve para financiar ayuda humanitaria a otros países. Sabiendo que la ecuación de acumulación de deuda pública agregada es como sigue: $DP_{t+1} = (1 + r_t) DP_t + G_t - T_t$, donde *DP*, *G* y *T* son respectivamente deuda pública agregada, gasto público agregado y recaudación agregada de impuestos. a) ¿Bajo que condiciones la economía es dinámicamente ineficiente?. b) Suponiendo que se cumplen las condiciones del apartado a y que $\gamma > \tau$, derivar el capital por trabajador en el estado estacionario. c) ¿Cuál es el efecto sobre el capital del estado estacionario de un aumento en el tipos impositivo τ?. d) ¿Cual es el nivel de γ máximo posible?. Explique en términos económicos.