Universidad de La Laguna
Departamento de Economía Aplicada y Métodos Cuantitativos

José Enrique Rodríguez Hernández

Tema 3. Potencias y raíces

Racionalización de radicales

Cuando tenemos fracciones con radicales en el denominador conviene obtener fracciones equivalentes pero ***que no tengan radicales en el denominador***. A este proceso se denomina racionalización de radicales de los denominadores. La racionalización de radicales se basa en eliminar las raíces (radicales) que se encuentran en el denominador de una fracción. Al realizar esta operación se facilita el cálculo de operaciones con fracciones como son la suma y la resta.

Se pueden dar varios casos según el tipo de raíz que aparece en el denominador.

1. ***En el denominador aparece una raíz cuadrada como único término. En este caso se debe multiplicar numerador y denominador por la misma raíz cuadrada que se encuentra en el denominador.***

Es decir, para racionalizar $\frac{a}{b\sqrt{c}}$ se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{c}$.

$$\frac{a}{b\sqrt{c}}=\frac{a\sqrt{c}}{b\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}}=\frac{a\sqrt{c}}{b(\sqrt{c})^2}=\frac{a\sqrt{c}}{b\cdot(c^{1/2})^2}=\frac{a\sqrt{c}}{b\cdot c}$$

Por ejemplo, para racionalizar la fracción $\frac{7}{\sqrt{3}}$ multiplicaremos numerador y denominador por $\sqrt{3}$.

$$\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{5}{2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{2(\sqrt{3})^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2\cdot(3^{1/2})^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$$

$$5+\frac{5}{\sqrt{3}}=5+\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=5+\frac{5\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}=5+\frac{5\sqrt{3}}{3}=\frac{15+5\sqrt{3}}{3}$$

$$\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Otro ejemplo. En este caso la racionalización de $\frac{7}{\sqrt{12}}$ se puede realizar dos formas. En los casos que sea posible simplificar la raíz del denominador, se puede multiplicar numerador y denominador por la raíz simplificada del denominador.

$$\frac{7}{\sqrt{12}}=\frac{7}{\sqrt{2^2\cdot 3}}=\frac{7}{2\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\frac{7\sqrt{3}}{6}$$

O bien multiplicamos directamente numerador y denominador por $\sqrt{12}$

$$\frac{7}{\sqrt{12}}=\frac{7\sqrt{12}}{\sqrt{12}\sqrt{12}}=\frac{7\sqrt{12}}{12}=\frac{7\sqrt{2^2\cdot 3}}{12}=\frac{7\cdot 2\cdot\sqrt{3}}{12}=\frac{7\sqrt{3}}{6}$$

2. ***El denominador de la fracción contiene dos términos donde uno de ellos es raíz cuadrada. En este caso, se debe multiplicar numerador y denominado por el conjugado del denominador.***

Es decir, para racionalizar $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\frac{a}{\sqrt{b}+c}$, $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$ cuando el denominador sea un binomio con al menos un radical, se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador. El conjugado de un binomio consiste en cambiar de signo al segundo elemento de dicho binomio. Véase los siguientes ejemplos de conjugados:

$$a+b \Rightarrow a-b$$
$$-a+b \Rightarrow -a-b$$
$$a-b \Rightarrow a+b$$

También tenemos que tener en cuenta que: "**suma por diferencia es igual a la diferencia de cuadrados**".

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Por ejemplo: $\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{5}+\sqrt{3}$. En el denominador siempre va a aparecer un producto de una suma por una diferencia, o sea una expresión del tipo $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

José Enrique Rodríguez Hernández

$$\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{7\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=\frac{7\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{7\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3}=\frac{7\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{2}$$

Otro ejemplo: $\frac{2}{3+\sqrt{7}}$, ahora multiplicamos numerador y denominador por $3-\sqrt{7}$

$$\frac{2}{3+\sqrt{7}}=\frac{2\left(3-\sqrt{7}\right)}{\left(3+\sqrt{7}\right)\left(3-\sqrt{7}\right)}=\frac{2\left(3-\sqrt{7}\right)}{9-7}=\frac{2\left(3-\sqrt{7}\right)}{2}=3-\sqrt{7}$$

$$\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2-3}=-5(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

$$\frac{5}{\sqrt{2}-3}=\frac{5(\sqrt{2}+3)}{(\sqrt{2}-3)\cdot(\sqrt{2}+3)}=\frac{5(\sqrt{2}+3)}{(\sqrt{2})^2-(3)^2}=\frac{5(\sqrt{2}+3)}{2-9}=\frac{5(\sqrt{2}+3)}{-7}$$

$$\frac{5}{2-\sqrt{3}}=\frac{5(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})}=\frac{5(2+\sqrt{3})}{(2)^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{5(2+\sqrt{3})}{4-3}=5(2+\sqrt{3})$$

3. ***En el denominador aparece un término con una raíz de índice cualquiera, del tipo*** $\frac{a}{b\sqrt[n]{c^k}}$ ***. En este caso, se multiplica numerador y denominador por la raíz*** $\sqrt[n]{c^{n-k}}$.

Es decir, para racionalizar $\frac{a}{b\sqrt[n]{c^k}}$ se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[n]{c^{n-k}}$.

$$\frac{a}{b\sqrt[n]{c^k}}=\frac{a\sqrt[n]{c^{n-k}}}{b\sqrt[n]{c^k}\cdot\sqrt[n]{c^{n-k}}}=\frac{a\sqrt[n]{c^{n-k}}}{b\cdot c^{n/n}}=\frac{a\sqrt[n]{c^{n-k}}}{b\cdot c}$$

Ejemplo: $\frac{5}{2\sqrt[5]{3^2}}=\frac{5\sqrt[5]{3^{5-2}}}{2\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{3^{5-2}}}=\frac{5\sqrt[5]{3^3}}{2\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{3^3}}=\frac{5\sqrt[5]{3^3}}{2\cdot 3^{5/5}}=\frac{5\sqrt[5]{3^3}}{2\cdot 3}=\frac{5\sqrt[5]{3^3}}{6}$

En el ejemplo: $\frac{2}{\sqrt[3]{9}}$, si factorizamos la raíz del denominador: $\frac{2}{\sqrt[3]{9}}=\frac{2}{\sqrt[3]{3^2}}$, basta con multiplicar numerador y denominador por $\sqrt[3]{3}$ para completar la potencia de 3

José Enrique Rodríguez Hernández

$$\frac{2}{\sqrt[3]{9}}=\frac{2}{\sqrt[3]{3^2}}=\frac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2}\cdot\sqrt[3]{3}}=\frac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^3}}=\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$$