

# Problemas: formulación, ejemplos, representación de soluciones y estructuras de entorno

---

Christopher Expósito Izquierdo, J. Marcos Moreno Vega  
cexposit@ull.es, jmmoreno@ull.es

Departamento de Ingeniería Informática y de Sistemas  
Universidad de La Laguna

# Problema de optimización

## Problema $(S, f)$

---

$$\text{optimizar}_{X \in S} f(X)$$

donde  $f$  es una función que a cada  $X \in S$  asocia una medida de la adecuación de  $X$  como solución del problema y  $S$  es el conjunto de soluciones.

## Elementos

---

- $S$ , **región factible**, *espacio solución o conjunto de soluciones*
- $f$ , **función objetivo** o *función de costo*
- optimizar, minimizar o maximizar la función objetivo  $f$  sobre la región factible  $S$

## Problema $(S, f)$

---

$$\text{optimizar}_{X \in S} f(X)$$

donde  $f$  es una función que a cada  $X \in S$  asocia una medida de la adecuación de  $X$  como solución del problema y  $S$  es el conjunto de soluciones.

## Elementos

---

- $S$ , **región factible**, *espacio solución o conjunto de soluciones*
- $f$ , **función objetivo** o *función de costo*
- optimizar, minimizar o maximizar la función objetivo  $f$  sobre la región factible  $S$

## Problema $(S, f)$

---

$$\text{optimizar}_{X \in S} f(X)$$

donde  $f$  es una función que a cada  $X \in S$  asocia una medida de la adecuación de  $X$  como solución del problema y  $S$  es el conjunto de soluciones.

## Elementos

---

- $S$ , **región factible**, *espacio solución o conjunto de soluciones*
- $f$ , **función objetivo** o *función de costo*
- optimizar, minimizar o maximizar la función objetivo  $f$  sobre la región factible  $S$

## Problemas de localización

---

- En un Problema de localización se pretende determinar la ubicación de ciertos servicios de forma que, según unos determinados criterios y cumpliendo unas determinadas restricciones, éstos satisfagan de forma óptima las necesidades demandadas por los usuarios.
- Servicio debe entenderse en un sentido amplio (punto, camino, circuito, árbol, ...).

## Algunos problemas de localización

---

- Problema de localización de la  $p$ -mediana discreta.
- Problema de localización del ciclo mediano.

## Problemas de localización

---

- En un Problema de localización se pretende determinar la ubicación de ciertos servicios de forma que, según unos determinados criterios y cumpliendo unas determinadas restricciones, éstos satisfagan de forma óptima las necesidades demandadas por los usuarios.
- Servicio debe entenderse en un sentido amplio (punto, camino, circuito, árbol, ...).

## Algunos problemas de localización

---

- Problema de localización de la  $p$ -mediana discreta.
- Problema de localización del ciclo mediano.

## Problemas de localización

---

- En un Problema de localización se pretende determinar la ubicación de ciertos servicios de forma que, según unos determinados criterios y cumpliendo unas determinadas restricciones, éstos satisfagan de forma óptima las necesidades demandadas por los usuarios.
- Servicio debe entenderse en un sentido amplio (punto, camino, circuito, árbol, ...).

## Algunos problemas de localización

---

- Problema de localización de la  $p$ -mediana discreta.
- Problema de localización del ciclo mediano.

## $p$ -mediana discreta (i)

---

- Conjunto de localizaciones potenciales para los servicios

$$L = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$$

- Conjunto de puntos de demanda

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

- Matriz de distancias

$$D = (d_{ij})_{n \times m} = (D[u_i, v_j])_{n \times m}$$

## $p$ -mediana discreta (ii)

---

- Región factible (espacio solución)

$$S = \{X \subseteq L, |X| = p\}$$

- Función objetivo

$$f(X) = \sum_{u_i \in U} \min_{v_j \in X} D[u_i, v_j]$$

- Problema de optimización

$$\min_{X \in S} f(X) = \min_{X \in S} \left( \sum_{u_i \in U} \min_{v_j \in X} D[u_i, v_j] \right)$$

## $p$ -mediana discreta (iii)

---

- En muchas aplicaciones prácticas, el conjunto de localizaciones potenciales para los servicios coincide con el conjunto de puntos de demanda. Es decir,  $L = U$  y  $m = n$ .
- Por tanto, las soluciones del problema de la  $p$ -mediana son subconjuntos de  $p$  puntos de  $U$  en los que localizar los servicios.

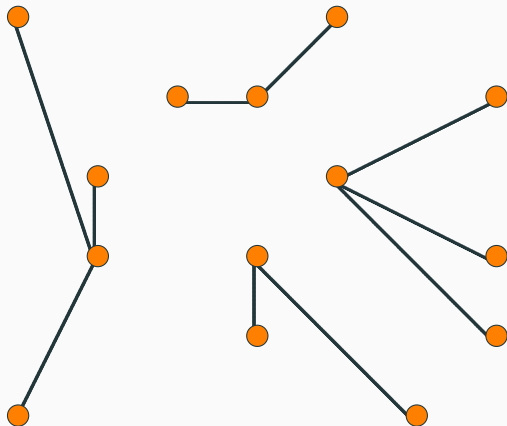


Figure 1:  $p$ -mediana discreta ( $p = 4$ ). Una solución factible.

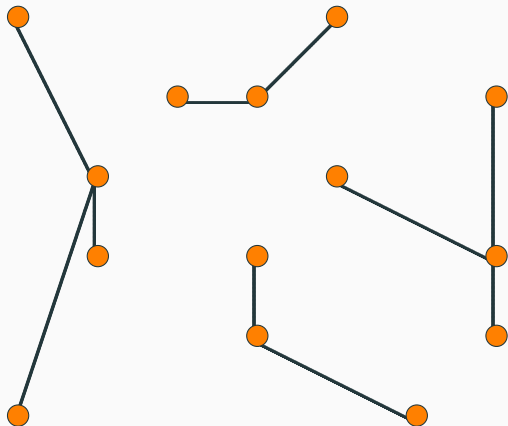


Figure 2:  $p$ -mediana discreta ( $p = 4$ ). Otra solución

## Problema de localización del ciclo mediano(i)

---

- Sea  $G = (V, E)$  un grafo no dirigido completo donde

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

es el conjunto de vértices y  $v_1$  denota el depósito.

- Sean

$$L[v_i, v_j] \equiv \text{longitud no negativa asociada a cada arista} \\ e = [v_i, v_j] \in E$$

$$D[v_i, v_j] \equiv \text{coste de asignación no negativo para cada par} \\ (v_i, v_j) \in V \times V$$

## Problema de localización del ciclo mediano(ii)

---

- Región factible

$$S = \{X : X \text{ es un ciclo que contiene al depósito (vértice } v_1)\}$$

- Función objetivo

$$f(X) = Len(X) + Cos(X)$$

con

$$Len(X) = \sum_{(v_i, v_j) \in X} L[v_i, v_j]$$

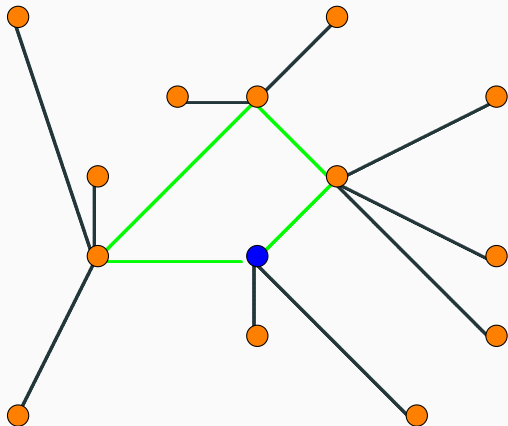
$$Cos(X) = \sum_{v_i \in V} \min_{v_j \in V(X)} D[v_i, v_j]$$

## Problema de localización del ciclo mediano(iii)

---

- Problema de optimización

$$\min_{X \in \mathcal{S}} f(X) = \min_{X \in \mathcal{S}} \left( \sum_{(v_i, v_j) \in X} L[v_i, v_j] + \sum_{v_i \in V} \min_{v_j \in V(X)} D[v_i, v_j] \right)$$



**Figure 3:** Ciclo mediano. Una solución con un ciclo con  $p = 4$  vértices

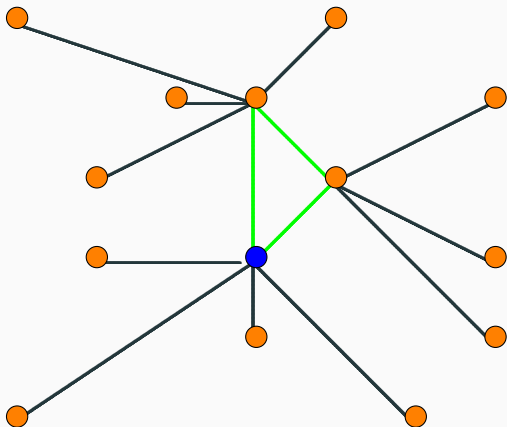


Figure 4: Ciclo mediano. Otra solución con un ciclo con  $p = 3$  vértices

## Representación de soluciones

---

- Las soluciones se pueden codificar o representar de diferentes formas, y esto significa que existen diferentes maneras de obtener la función objetivo. De tal forma que la representación que se hace de las soluciones condiciona la forma en que se calcula el valor objetivo de una solución.
- Debe resaltarse que la representación usada determina el espacio de soluciones y su tamaño.
- Además, la representación de las soluciones tiene un impacto directo en la eficiencia de una heurística.

## Codificaciones para la $p$ -mediana discreta (i)

---

- **Codificación binaria:**  $n$ -upla binaria con exactamente  $p$  unos; un 1 en la  $i$ -ésima posición indica que en la localización  $v_i$  se localiza una mediana.

(0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0)

- **Codificación indexal:**  $p$ -upla (ordenada o no) de las localizaciones en las que se localizan las medianas

( $v_3, v_7, v_8, v_9$ )

## Codificaciones para la $p$ -mediana discreta (ii)

---

- **Array:**  $n$ -upla (ordenada o no) de las localizaciones. En las  $p$  primeras localizaciones se localizan las medianas:

$$\underbrace{(v_3, v_7, v_8, v_9, v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14})}_{\text{medias}}$$

- Nótese que las siguientes codificaciones representan a la misma solución:

$$\underbrace{(v_3, v_9, v_8, v_7, v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14})}_{\text{medias}}$$

$$\underbrace{(v_3, v_7, v_8, v_9, v_{12}, v_2, v_4, v_5, v_6, v_{10}, v_{11}, v_1, v_{13}, v_{14})}_{\text{medias}}$$

## Codificaciones para el ciclo mediano (i)

---

- Una solución  $X$  dada por un ciclo  $C$  que visita  $p$  vértices se representa por un array

$$X = [v_i : i = 1, 2, \dots, n]$$

donde  $v_1$  es el depósito y

$$v_i = \begin{cases} \text{el } i\text{-ésimo vértice del ciclo} & i = 2, \dots, p \\ \text{el } (i - p)\text{-ésimo vértice que} \\ \text{no pertenece al ciclo} & i = p + 1, \dots, n. \end{cases}$$

- 

$$\underbrace{(v_3, v_7, v_8, v_9, v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14})}_{\text{ciclo}}$$

## Codificaciones para el ciclo mediano (ii)

---

- Nótese que ahora las siguientes codificaciones no representan a la misma solución:

$$\underbrace{(v_3, v_7, v_8, v_9, v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14})}_{\text{ciclo}}$$

$$\underbrace{(v_3, v_9, v_8, v_7, v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14})}_{\text{ciclo}}$$

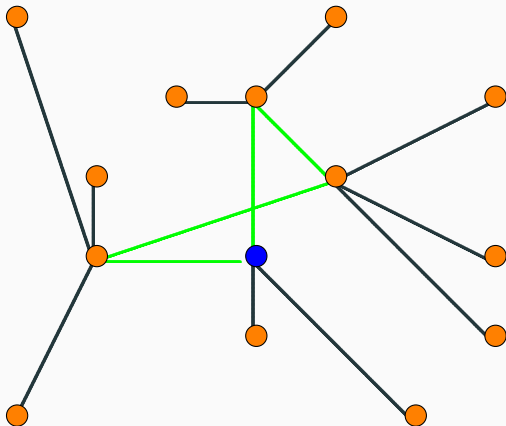


Figure 5: Solución con ciclo  $v_3, v_7, v_8, v_9$

# Problema de optimización

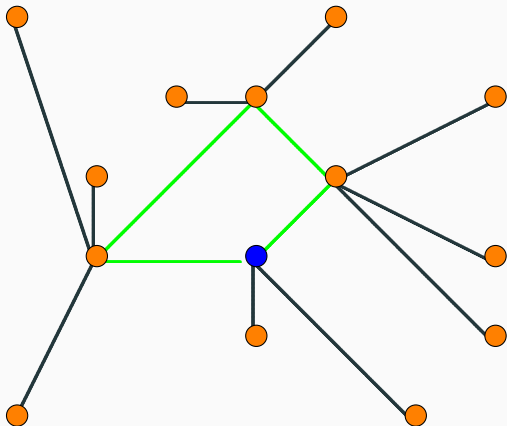


Figure 6: Solución con ciclo  $v_3, v_7, v_9, v_8$

## Estructura de entorno

---

- Dado el problema  $(S, f)$ , una estructura de entorno es una función

$$N : S \rightarrow 2^S$$

que asocia a cada solución  $X \in S$  un conjunto  $N(X) \subseteq S$  de soluciones cercanas a  $X$  en algún sentido.

- El conjunto  $N(X)$  se llama entorno de la solución  $X$  y cada  $Y \in N(X)$ , solución vecina de  $X$ .
- La anterior definición es bastante general y deja a criterio del decisor establecer cuándo dos soluciones están *cercanas en algún sentido*.

## Movimiento

---

- Generalmente, las estructuras de entorno se definen a través de movimientos que, aplicados sobre una solución, suministran otras.
- Por ejemplo, para problemas de localización suelen considerarse los movimientos de apertura, cierre e intercambio de servicios, y los de reasignación y traslado de puntos de demanda.
- Los movimientos de reasignación y traslado de puntos de demanda no se emplean en los problemas de la  $p$ -mediana discreta y el ciclo mediano al ser éstos problemas de asignación directa (cada punto de demanda se asigna al servicio más cercano).

## Movimiento

---

- Generalmente, las estructuras de entorno se definen a través de movimientos que, aplicados sobre una solución, suministran otras.
- Por ejemplo, para problemas de localización suelen considerarse los movimientos de apertura, cierre e intercambio de servicios, y los de reasignación y traslado de puntos de demanda.
- Los movimientos de reasignación y traslado de puntos de demanda no se emplean en los problemas de la  $p$ -mediana discreta y el ciclo mediano al ser éstos problemas de asignación directa (cada punto de demanda se asigna al servicio más cercano).

## Movimiento

---

- Generalmente, las estructuras de entorno se definen a través de movimientos que, aplicados sobre una solución, suministran otras.
- Por ejemplo, para problemas de localización suelen considerarse los movimientos de apertura, cierre e intercambio de servicios, y los de reasignación y traslado de puntos de demanda.
- Los movimientos de reasignación y traslado de puntos de demanda no se emplean en los problemas de la  $p$ -mediana discreta y el ciclo mediano al ser éstos problemas de asignación directa (cada punto de demanda se asigna al servicio más cercano).

## Movimiento

---

- Generalmente, las estructuras de entorno se definen a través de movimientos que, aplicados sobre una solución, suministran otras.
- Por ejemplo, para problemas de localización suelen considerarse los movimientos de apertura, cierre e intercambio de servicios, y los de reasignación y traslado de puntos de demanda.
- Los movimientos de reasignación y traslado de puntos de demanda no se emplean en los problemas de la  $p$ -mediana discreta y el ciclo mediano al ser éstos problemas de asignación directa (cada punto de demanda se asigna al servicio más cercano).

## Movimientos para problemas de localización (i)

---

- **Apertura:** añadir a la solución  $X$  una localización,  $u$ , no presente en  $X$  para obtener la solución  $Y$ :

$$Y = X \cup \{u\}$$

- **Cierre:** eliminar de la solución  $X$  una localización,  $u$ , para obtener la solución  $Y$ :

$$Y = X \setminus \{u\}$$

- **Intercambio:** eliminar de la solución  $X$  una localización,  $u$ , y añadir una localización,  $v$ , no presente en  $X$  para obtener la solución  $Y$ :

$$Y = X \setminus \{u\} \cup \{v\}$$

## Movimientos para problemas de localización (ii)

---

- **$k$ -apertura:** añadir a la solución  $X$   $k$  localizaciones,  $u_1, u_2, \dots, u_k$ , no presentes en  $X$  para obtener la solución  $Y$ :

$$Y = X \cup \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$$

- **$k$ -cierre:** eliminar de la solución  $X$   $k$  localizaciones,  $u_1, u_2, \dots, u_k$ , para obtener la solución  $Y$ :

$$Y = X \setminus \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$$

- **$k$ -intercambio:** eliminar de la solución  $X$   $k$  localizaciones,  $u_1, u_2, \dots, u_k$ , y añadir  $k$  localizaciones,  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , no presentes en  $X$  para obtener la solución  $Y$ :

$$Y = X \setminus \{u_1, u_2, \dots, u_k\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

# Problema de optimización

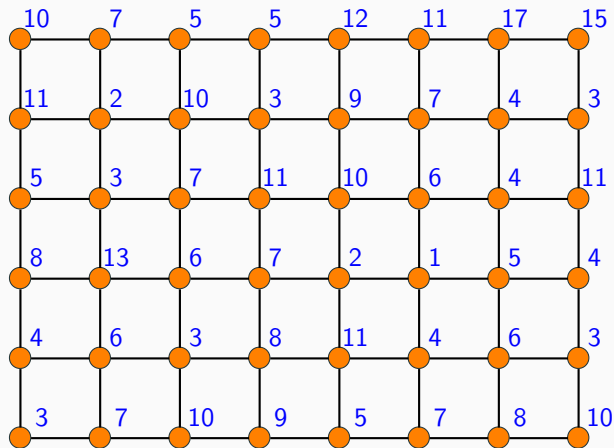


Figure 7: Estructura de la región factible

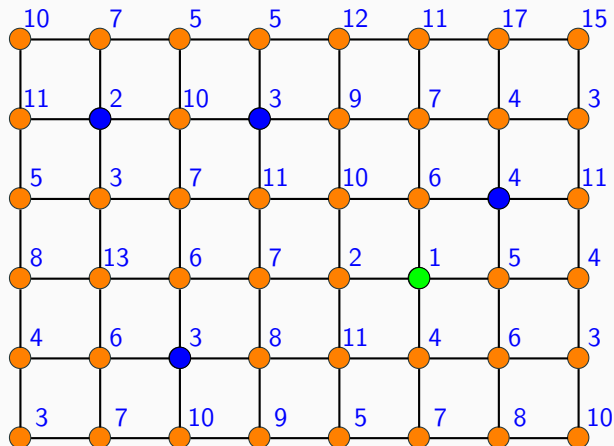
## Mínimo local

---

- Dado el problema  $(S, f)$  y la estructura de entorno  $N : S \rightarrow 2^S$ , se dice que  $X^* \in S$  es un mínimo local si el valor objetivo de  $X$  es menor o igual que el valor objetivo de cualquier solución  $X \in N(X^*)$ . Es decir:

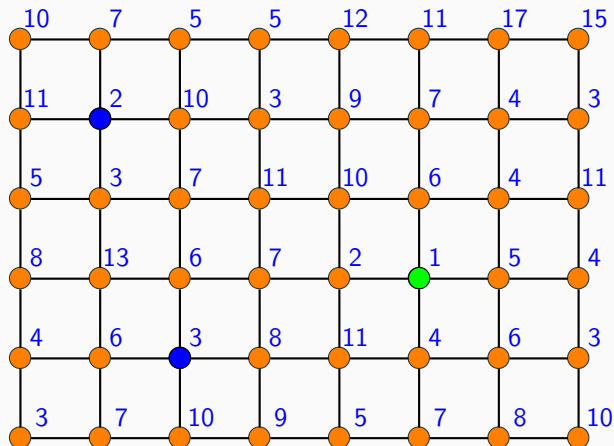
$$X^* \text{ es mínimo local} \iff f(X^*) \leq f(X) \quad \forall X \in N(X^*)$$

# Problema de optimización



**Figure 8:** Mínimos locales. Son soluciones vecinas las que se encuentran a distancia 1

# Problema de optimización



**Figure 9:** Mínimos locales. Son soluciones vecinas las que se encuentran a distancia 1 o 2

## Optimalidad local. Propiedades

---

- Un mínimo local bajo una estructura de entorno no tiene por qué ser mínimo local bajo otra estructura de entorno.
- Sean  $N_1$  y  $N_2$  dos estructuras de entorno para el mismo problema  $(S, f)$ . Si para toda solución  $X \in S$  se tiene que  $N_1(X) \subseteq N_2(X)$ , entonces el número de mínimos locales de  $f$  relativo a la estructura  $N_1$  es menor o igual que el número de mínimos locales de  $f$  relativo a  $N_2$ .
- Si el entorno de cualquier solución coincide con el espacio de soluciones, el único mínimo local es el mínimo global.
- El mínimo global es mínimo local bajo cualquier estructura de entorno.

## Optimalidad local. Propiedades

---

- Un mínimo local bajo una estructura de entorno no tiene por qué ser mínimo local bajo otra estructura de entorno.
- Sean  $N_1$  y  $N_2$  dos estructuras de entorno para el mismo problema  $(S, f)$ . Si para toda solución  $X \in S$  se tiene que  $N_1(X) \subseteq N_2(X)$ , entonces el número de mínimos locales de  $f$  relativo a la estructura  $N_1$  es menor o igual que el número de mínimos locales de  $f$  relativo a  $N_2$ .
- Si el entorno de cualquier solución coincide con el espacio de soluciones, el único mínimo local es el mínimo global.
- El mínimo global es mínimo local bajo cualquier estructura de entorno.

## Optimalidad local. Propiedades

---

- Un mínimo local bajo una estructura de entorno no tiene por qué ser mínimo local bajo otra estructura de entorno.
- Sean  $N_1$  y  $N_2$  dos estructuras de entorno para el mismo problema  $(S, f)$ . Si para toda solución  $X \in S$  se tiene que  $N_1(X) \subseteq N_2(X)$ , entonces el número de mínimos locales de  $f$  relativo a la estructura  $N_1$  es menor o igual que el número de mínimos locales de  $f$  relativo a  $N_2$ .
- Si el entorno de cualquier solución coincide con el espacio de soluciones, el único mínimo local es el mínimo global.
- El mínimo global es mínimo local bajo cualquier estructura de entorno.

## Optimalidad local. Propiedades

---

- Un mínimo local bajo una estructura de entorno no tiene por qué ser mínimo local bajo otra estructura de entorno.
- Sean  $N_1$  y  $N_2$  dos estructuras de entorno para el mismo problema  $(S, f)$ . Si para toda solución  $X \in S$  se tiene que  $N_1(X) \subseteq N_2(X)$ , entonces el número de mínimos locales de  $f$  relativo a la estructura  $N_1$  es menor o igual que el número de mínimos locales de  $f$  relativo a  $N_2$ .
- Si el entorno de cualquier solución coincide con el espacio de soluciones, el único mínimo local es el mínimo global.
- El mínimo global es mínimo local bajo cualquier estructura de entorno.

## Optimalidad local. Propiedades

---

- Un mínimo local bajo una estructura de entorno no tiene por qué ser mínimo local bajo otra estructura de entorno.
- Sean  $N_1$  y  $N_2$  dos estructuras de entorno para el mismo problema  $(S, f)$ . Si para toda solución  $X \in S$  se tiene que  $N_1(X) \subseteq N_2(X)$ , entonces el número de mínimos locales de  $f$  relativo a la estructura  $N_1$  es menor o igual que el número de mínimos locales de  $f$  relativo a  $N_2$ .
- Si el entorno de cualquier solución coincide con el espacio de soluciones, el único mínimo local es el mínimo global.
- El mínimo global es mínimo local bajo cualquier estructura de entorno.

## Óptimos locales. Variables de interés

---

- Número de óptimos locales de la función objetivo.
- Región de atracción de un óptimo local: conjunto de soluciones desde las que una búsqueda local acaba en dicho óptimo.
- Tamaño de la región de atracción de un óptimo local.
- Relación entre el valor objetivo de un óptimo local y el tamaño de su región de atracción.
- Distancia entre óptimos locales.
- Distribución de óptimos locales en la región factible.

## Óptimos locales. Variables de interés

---

- Número de óptimos locales de la función objetivo.
- Región de atracción de un óptimo local: conjunto de soluciones desde las que una búsqueda local acaba en dicho óptimo.
- Tamaño de la región de atracción de un óptimo local.
- Relación entre el valor objetivo de un óptimo local y el tamaño de su región de atracción.
- Distancia entre óptimos locales.
- Distribución de óptimos locales en la región factible.

## Óptimos locales. Variables de interés

---

- Número de óptimos locales de la función objetivo.
- Región de atracción de un óptimo local: conjunto de soluciones desde las que una búsqueda local acaba en dicho óptimo.
- Tamaño de la región de atracción de un óptimo local.
- Relación entre el valor objetivo de un óptimo local y el tamaño de su región de atracción.
- Distancia entre óptimos locales.
- Distribución de óptimos locales en la región factible.

## Óptimos locales. Variables de interés

---

- Número de óptimos locales de la función objetivo.
- Región de atracción de un óptimo local: conjunto de soluciones desde las que una búsqueda local acaba en dicho óptimo.
- Tamaño de la región de atracción de un óptimo local.
- Relación entre el valor objetivo de un óptimo local y el tamaño de su región de atracción.
- Distancia entre óptimos locales.
- Distribución de óptimos locales en la región factible.

## Óptimos locales. Variables de interés

---

- Número de óptimos locales de la función objetivo.
- Región de atracción de un óptimo local: conjunto de soluciones desde las que una búsqueda local acaba en dicho óptimo.
- Tamaño de la región de atracción de un óptimo local.
- Relación entre el valor objetivo de un óptimo local y el tamaño de su región de atracción.
- Distancia entre óptimos locales.
- Distribución de óptimos locales en la región factible.

## Óptimos locales. Variables de interés

---

- Número de óptimos locales de la función objetivo.
- Región de atracción de un óptimo local: conjunto de soluciones desde las que una búsqueda local acaba en dicho óptimo.
- Tamaño de la región de atracción de un óptimo local.
- Relación entre el valor objetivo de un óptimo local y el tamaño de su región de atracción.
- Distancia entre óptimos locales.
- Distribución de óptimos locales en la región factible.

## Óptimos locales. Variables de interés

---

- Número de óptimos locales de la función objetivo.
- Región de atracción de un óptimo local: conjunto de soluciones desde las que una búsqueda local acaba en dicho óptimo.
- Tamaño de la región de atracción de un óptimo local.
- Relación entre el valor objetivo de un óptimo local y el tamaño de su región de atracción.
- Distancia entre óptimos locales.
- Distribución de óptimos locales en la región factible.

## Evaluando los movimientos

---

- La aplicación de uno de los movimientos disponibles a una solución suministra una nueva solución que debe ser evaluada.
- En ocasiones, la evaluación de una solución es un proceso computacionalmente costoso, por lo que la eficiencia de una heurística se incrementa si dicha evaluación se realiza eficientemente.
- Para calcular eficientemente la evaluación de la nueva solución, puede evaluarse el incremento (o decremento) que se produce en la solución actual al aplicarle el movimiento particular que se esté considerando.

## $p$ -mediana discreta. Evaluación del 1-intercambio (i)

---

- Codificación:

$$X = (\underbrace{v_1, \dots, v_i, \dots, v_p}_{\text{medias}}, v_{p+1}, \dots, v_j, \dots, v_n)$$

- Valor objetivo de la solución  $X$ :

$$f(X) = \sum_{i=p+1}^n \min_{j=1, \dots, p} D[v_i, v_j]$$

## $p$ -mediana discreta. Evaluación del 1-intercambio (ii)

---

- 1-intercambio:

$$X_{ij} = X \setminus \{v_i\} \cup \{v_j\} = (v_1, \dots, v_j, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_i, \dots, v_n)$$

- Valor objetivo de la solución  $X_{ij}$ :

$$f(X_{ij}) = \min \left\{ D[v_i, v_j], \min_{\substack{l=1, \dots, p \\ l \neq i}} D[v_i, v_l] \right\} + \sum_{k=p+1}^n \min \left\{ D[v_k, v_j], \min_{\substack{l=1, \dots, p \\ l \neq i}} D[v_i, v_l] \right\}$$

- Complejidad:  $O(pn)$

## $p$ -mediana discreta. Evaluación eficiente del 1-intercambio (iii)

---

- **Mejor coste de asignación:**

$$C_1(v_i) = \min_{j=1, \dots, p} D[v_i, v_j] \quad \forall i = 1, \dots, n$$

- **Segundo mejor coste de asignación:**

$$C_2(v_i) = \min_{\substack{j=1, \dots, p \\ j \neq r(v_i)}} D[v_i, v_j]; \quad \forall i = 1, \dots, n$$

donde  $r(v_i)$  es tal que  $C_1(v_i) = D[v_i, v_{r(v_i)}]$

- **Complejidad:**  $O(pn_i + n)$ , donde  $n_i$  es el número de puntos asignados a  $v_i$ . Si  $p$  es grande,  $n_i$  debe ser pequeño, y la diferencia entre  $pn$  y  $pn_i + n$  sería importante.

## Ciclo mediano. Evaluación de la inserción (i)

---

- Codificación:

$$X = (\underbrace{v_1, \dots, v_i, \dots, v_p}_{\text{ciclo}}, v_{p+1}, \dots, v_j, \dots, v_n)$$

- Valor objetivo de la solución  $X$ :

$$f(X) = \underbrace{\sum_{i=2}^p L[v_{i-1}, v_i] + L[v_1, v_n]}_{\text{Len}(X)} + \underbrace{\sum_{j=p+1}^n \min_{i=1, \dots, p} D[v_i, v_j]}_{\text{Cos}(X)}$$

## Ciclo mediano. Evaluación de la inserción (ii)

---

- Inserción:

$$X_{ij} = (v_1, \dots, \underbrace{v_i, v_j, v_{i+1}, \dots, v_p}_{\text{ciclo}}, v_{p+1}, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n)$$

- Longitud de la solución  $X_{ij}$ :

- Si  $i = 1, \dots, p - 1$

$$\text{Len}(X_{ij}) = \text{Len}(X) + L[v_i, v_j] + L[v_j, v_{i+1}] - L[v_i, v_{i+1}]$$

- Si  $i = p$

$$\text{Len}(X_{ij}) = \text{Len}(X) + L[v_p, v_j] + L[v_j, v_1] - L[v_p, v_1]$$

## Ciclo mediano. Evaluación de la inserción (iii)

---

- La inserción del vértice  $v_j$  en el ciclo se hará en la posición  $i^*$  tal que:

$$\text{Len}(X_{i^*j}) = \min_{i=1, \dots, p} \text{Len}(X_{ij})$$

- **Complejidad:** La evaluación de la longitud del ciclo de la nueva solución tendrá una complejidad  $O(p)$ .

## Ciclo mediano. Evaluación de la inserción (iv)

---

- Coste de la solución  $X_{ij}$ :

$$\text{Cos}(X_{ij}) = \text{Cos}(X) - \sum_{i=p+1}^n \max \left\{ 0, \min_{h=1, \dots, p} D[v_i, v_h] - D[v_i, v_j] \right\}$$

- Nótese que el decremento en el coste depende solo del vértice  $v_j$  que se inserta en la solución y no del vértice  $v_i$  tras el que se inserta.
- **Complejidad:** La evaluación del coste de la nueva solución tendrá una complejidad  $O(pn)$ .

## Ciclo mediano. Evaluación eficiente de la inserción (v)

---

- Mejor coste de asignación:

$$C_1(v_i) = \min_{j=1, \dots, p} D[v_i, v_j] \quad \forall i = 1, \dots, n$$

- Coste de la solución  $X$ :

$$\text{Cos}(X) = \sum_{i=p+1}^n C_1(v_i)$$

## Ciclo mediano. Evaluación eficiente de la inserción (vi)

---

- Coste de la solución  $X_{ij}$ :

$$Cos(X_{ij}) = \sum_{i=p+1}^n \tilde{C}_1(v_i)$$

con

$$\tilde{C}_1(v_i) = \min\{C_1(v_i), D[v_i, v_j]\}$$

- **Complejidad:** La evaluación del coste de la nueva solución tendrá, por tanto, una complejidad  $O(n)$ .

## Ciclo mediano. Otros movimientos

---

- **Eliminación:** eliminar un vértice presente en el ciclo.
- **Intercambio:** intercambiar un vértice presente en el ciclo por otro no presente en el mismo.

## Ciclo mediano. Complejidad [MOR03]

---

	Evaluación del coste	
	Clásica	Eficiente
Inserción	$O(pn)$	$O(n)$
Eliminación	$O(pn)$	$O(n)$
Intercambio	$O(pn)$	$O(pn_i + n)$

$n_i$  es el número de vértices asignados al vértice que se elimina del ciclo

## Ciclo mediano. Otros movimientos

---

- **Eliminación:** eliminar un vértice presente en el ciclo.
- **Intercambio:** intercambiar un vértice presente en el ciclo por otro no presente en el mismo.

## Ciclo mediano. Complejidad [MOR03]

---

	Evaluación del coste	
	Clásica	Eficiente
Inserción	$O(pn)$	$O(n)$
Eliminación	$O(pn)$	$O(n)$
Intercambio	$O(pn)$	$O(pn_i + n)$

$n_i$  es el número de vértices asignados al vértice que se elimina del ciclo

**Variable neighborhood tabu search and its application to the median cycle problem.** José A. Moreno Pérez, J. Marcos Moreno-Vega, Inmaculada Rodríguez Martín, *European Journal of Operational Research*, 151 (2003) pp. 365-378



Este obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional.