# GRASP

## Greedy Randomized Adaptive Search Procedures

Christopher Expósito Izquierdo, J. Marcos Moreno Vega

cexposit@ull.es, jmmoreno@ull.es

Departamento de Ingeniería Informática y de Sistemas
Universidad de La Laguna

# GRASP

# GRASP

## Introducción

- **Método constructivo:** Añadir iterativamente elementos a una estructura, inicialmente vacía, hasta obtener una solución del problema.
- **Evaluación heurística:** mide la conveniencia de considerar este elemento como parte de la solución. La función heurística es dependiente del problema y expresa el conocimiento que sobre el mismo se tiene.
- **Adaptativo:** la evaluación de un elemento depende de los elementos previamente incluidos en la solución.
- **Estrategia greedy:** escoger el elemento que optimiza la función heurística.

## Métodos constructivos. Inconveniente

- En general, suministra soluciones de baja calidad.

## Métodos constructivos. Alternativa

- No escoger el mejor elemento, sino uno de los mejores al azar. Se llama **Lista restringida de candidatos** al conjunto de los mejores elementos.

## Métodos constructivos. Inconveniente

- En general, suministra soluciones de baja calidad.

## Métodos constructivos. Alternativa

- No escoger el mejor elemento, sino uno de los mejores al azar. Se llama **Lista restringida de candidatos** al conjunto de los mejores elementos.

## Descripción (i)

- **Fase constructiva:** se escoge iterativamente y al azar un elemento de la lista restringida de candidatos.
- **Fase de postprocesamiento:** se mejora la solución obtenida en la fase anterior.
- Los anteriores pasos se reiteran hasta que se cumpla el criterio de parada. La mejor solución obtenida es la propuesta por el algoritmo.

## Descripción (ii)

- **Fase de preprocesamiento:** en ocasiones, como paso previo a la fase constructiva, se construye parcialmente la solución incluyendo en ella aquellos elementos que, en base a algún criterio, *deben* estar en la solución. Así, pueden incluirse aquellos elementos que necesariamente pertenecen a la solución óptima del problema, o aquellos elementos que, en base a la experiencia del decisor o historia pasada de la búsqueda, pertenecen a soluciones de alta calidad.

# GRASP

## Lista restringida de candidatos

- **Por cardinalidad:** se forma con los $k$ (parámetro) elementos con mayor valor de la función heurística.
- **Por rango:** la lista está formada por los elementos cuya evaluación está a una distancia no superior a un umbral fijado por el usuario de la mayor evaluación. Esto es, dado un valor $\alpha \in (0, 1)$, la lista restringida de candidatos la forman los elementos cuya evaluación está en el intervalo $[(1 - \alpha)MAX, MAX]$, siendo MAX la evaluación del mejor elemento.
- **Por intersección de las dos anteriores:** en cada iteración del proceso constructivo, la lista se forma con los elementos que pertenecen simultáneamente a los dos conjuntos anteriores.

# GRASP

**Algorithm 1:** GRASP($X_{mej}$)

Preprocesamiento($X_{par}$);
$f_{mej} = \infty$;
**repeat**
  FaseConstructiva($X_{par}, X$);
  FasePostprocesamiento($X$, $X'$);
  **if** $f(X') < f_{mej}$ **then**
    $f_{mej} = f(X')$;
    $X_{mej} = X'$;
  **end**
**until** *Criterio de parada*;
**return** $X_{mej}$;

## Strip packing problem

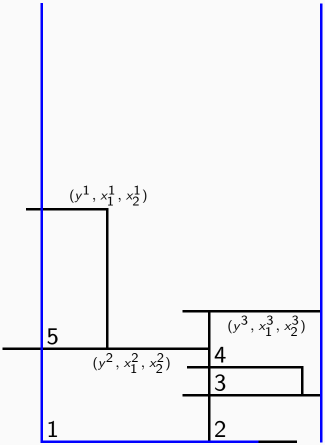
- Dado un objeto rectangular de amplitud fija $w$ y altura infinita, y un conjunto,

$$\mathcal{R} = \{R(w_1, h_1), \ldots, R(w_n, h_n)\}$$

de rectángulos con al menos uno de sus lados, $w_i$, $h_i$, menor que $w$, se desea empaquetar el conjunto $\mathcal{R}$ en el objeto rectangular utilizando el menor espacio posible (o lo que es lo mismo, se pretende minimizar la altura del empaquetado).

- En este problema los rectángulos se pueden rotar y los cortes pueden ser de tipo no guillotina. Un corte es tipo guillotina si atraviesa el objeto desde un lado del mismo hasta el lado opuesto. En un corte no guillotina, lo anterior no es cierto.

## Contorno superior



## Lista restringida de candidatos (i)

- **Contorno:** El contorno, $C$, puede representarse por medio del conjunto de segmentos horizontales (tomados de izquierda a derecha) que lo forman. Es decir:

$$C = \{(y^1, x_1^1, x_2^1), (y^2, x_1^2, x_2^2), \ldots, (y^c, x_1^c, x_2^c)\}$$

con

$$\begin{array}{lcl} y^i & \equiv & \text{altura del } i\text{-ésimo segmento} \\ x_1^i & \equiv & \text{punto inicial del } i\text{-ésimo segmento} \\ x_2^i & \equiv & \text{punto final del } i\text{-ésimo segmento} \end{array}.$$

Además, $x_1^1 = 0$ y $x_2^c = w$.

- Intuitivamente es preferible un contorno formado por pocos niveles a otro con muchos niveles. Esto es así, ya que, en general, la posibilidad de obtener desperdicios aumenta con el número de niveles.

## Lista restringida de candidatos (ii)

- Sea $t$ la iteración actual del proceso constructivo y supongamos que

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$$

siendo $\mathcal{R}_1$ el conjunto de los rectángulos previamente incluidos en el objeto y $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_1$.

- Sea $C(t)$ el contorno determinado por los rectángulos de $\mathcal{R}_1$.
- Evaluaremos la conveniencia de incluir un rectángulo de $\mathcal{R}_2$ en el objeto por la forma que tendrá el contorno $C(t)$ tras su inclusión.
- Las diferentes evaluaciones que proponemos pretenden aprovechar mejor el espacio disponible y suavizar el contorno.

## Lista restringida de candidatos (iii)

- **Lista restringida de candidatos 1:** sea dado $\alpha_1 \in [0,1]$ y supongamos que $(y^i, x_1^i, x_2^i)$ es el segmento del contorno con menor altura. La lista restringida de candidatos se construye como sigue:

$$\begin{aligned} LRC^1 \quad = \quad & \{R(w_j, h_j) \in \mathcal{R}_2 : (0 \leq x_2^i - x_1^i - w_j \leq \alpha_1) \vee \\ & (0 \leq x_2^i - x_1^i - h_j \leq \alpha_1)\}. \end{aligned}$$

Es decir, la lista está formada por aquellos rectángulos que mejor se ajustan al ancho del segmento inferior del contorno. El ajuste viene determinado por el valor de $\alpha_1$.

## Lista restringida de candidatos (iii)

- **Lista restringida de candidatos 2:** sea dado $\alpha_2 \in [0,1]$, $(y^i, x_1^i, x_2^i)$ el segmento del contorno con menor altura y supongamos que los segmentos anterior y posterior a éste, respectivamente $(y^{i-1}, x_1^{i-1}, x_2^{i-1})$ y $(y^{i+1}, x_1^{i+1}, x_2^{i+1})$, son tales que $y^i < y^{i+1} < y^{i-1}$. La lista restringida de candidatos se construye como sigue:

$$\begin{aligned} LRC^2 \quad = \quad & \{R(w_j, h_j) \in LRC^1 : (0 \leq y^{i+1} - y^i - w_j \leq \alpha_2) \vee \\ & (0 \leq y^{i+1} - y^i - h_j \leq \alpha_2)\}. \end{aligned}$$

Esto es, la lista está constituida por los rectángulos que mejor se ajustan al hueco formado los puntos $(x_1^i, y^i)$, $(x_2^i, y^i)$, $(x_1^{i+1}, y^{i+1})$ y $(x_1^i, y^{i+1})$. El ajuste viene dado por los valores de $\alpha_1$ y $\alpha_2$.

Si $LRC^1 \cap LRC^2 = \emptyset$, hacer $LRC^2 = LRC^1$.

## Lista restringida de candidatos (iv)

- **Lista restringida de candidatos 3:** en las condiciones anteriores, si $LRC^2 = \emptyset$, se construye la lista restringida de candidatos como sigue:

$$\begin{aligned} LRC^3 &= \{R(w_j, h_j) \in LRC^1 : (0 \leq y^{i-1} - y^i - w_j \leq \alpha_3) \vee \\ &\quad (0 \leq y^{i-1} - y^i - h_j \leq \alpha_3)\} \end{aligned}$$

Ahora, la lista está formada por los rectángulos que mejor se ajustan al hueco que determinan los puntos $(x_1^i, y^i)$, $(x_2^i, y^i)$, $(x_2^i, y^{i-1})$ y $(x_1^i, y^{i-1})$. El ajuste viene dado por los valores de $\alpha_1$ y $\alpha_3$.

Si $LRC^1 \cap LRC^3 = \emptyset$, hacer $LRC^3 = LRC^1$.

## Lista restringida de candidatos (v)

- Para que las definiciones anteriores tengan sentido, debe haber, al menos, un rectángulo de $\mathcal{R}_2$, digamos $R(w_r, h_r)$, tal que

$$(0 \leq x_2^i - x_1^i - w_r \leq \alpha_1) \vee (0 \leq x_2^i - x_1^i - h_r \leq \alpha_1).$$

- Si ningún elemento de $\mathcal{R}_2$ cumple la anterior condición, se ubica dentro del objeto el rectángulo que mejor se ajusta a $x_2^i - x_1^i$, y se reconstruye el contorno. Si no existe tal rectángulo, se reconstruye el contorno eliminando, convenientemente, el segmento $(y^i, x_1^i, x_2^i)$.

## Postprocesamiento (i)

- Extraer los últimos $k$ (parámetro) rectángulos de la solución. Supongamos, por simplicidad, que son $\{R_1, R_2, \ldots, R_k\}$.
- Para cada permutación, $(R_{i_1}, R_{i_2}, \ldots, R_{i_k})$, de los rectángulos:
  - Hacer $j = 1$. Colocar el rectángulo $R_{i_j}$ en la posición más profunda del objeto y con la orientación que suponga una menor altura relativa. Actualizar el contorno.
  - Hacer $j = j + 1$. Tomar el rectángulo $R_{i_j}$ de la permutación y empaquetarlo siguiendo el proceso anterior.
  - Si $j = k$, parar; en caso contrario repetir el paso anterior.
- Devolver la mejor de las soluciones obtenidas con el método anterior.

## Resultados computacionales

| $n$ | $w$ | $h_{opt}$ | $SA + BLF$ | $GRASP_1$ | $GRASP_2$ | $GRASP_3$ | $GRASP_4$ | $GRASP_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 20 | 20 | 20.8 | 22.6 | 22 | 22 | 21.66 | 21.66 |
| 17 | | | 0.7 | | | | 0.21 | 0.19 |
| 25 | 40 | 15 | 15.9 | 17 | 17 | 16.33 | 16.33 | 16.33 |
| | | | 2.4 | | | | 0.20 | 0.20 |
| 28 | 60 | 30 | 31.5 | 33.66 | 35.33 | 33.66 | 33.66 | 33.33 |
| 29 | | | 4 | | | | 0.31 | 0.34 |
| 49 | 60 | 60 | 61.8 | 62.66 | 64.33 | 63 | 63.33 | 63 |
| | | | 33 | | | | 0.49 | 0.35 |
| 72 | 60 | 90 | 92.7 | 94.33 | 94 | 93 | 92.66 | 92.33 |
| 73 | | | 115 | | | | 0.43 | 0.35 |
| 97 | 80 | 120 | 123.6 | 125.33 | 124.33 | 124 | 123 | 123.33 |
| | | | 382 | | | | 0.47 | 0.63 |
| 196 | 160 | 240 | 249.6 | 247 | 245 | 246 | 244.66 | 245 |
| 197 | | | 4181 | | | | 0.77 | 0.80 |

Mejores valores objetivos y tiempo requerido (valores promedios por categoría)

## Reglas de parada específicas para el SPP (i)

- Es relativamente sencillo para un experto, determinar si una solución del problema del empaquetado rectangular bidimensional no guillotina puede mejorarse o no de forma eficiente.
- Esto es así, ya que, además de la altura del empaquetado, analiza otras características de la solución como: área de los desperdicios, forma del contorno superior o distribución de los items en el objeto.
- En general, las soluciones con contornos superiores suaves y desperdicios pequeños son difícilmente mejorables.

## Reglas de parada específicas para el SPP (ii)

- Sea $f(X)$ el valor objetivo de $X$ y denotemos por $Desperdicio(X)$, al área total de los desperdicios de esta solución. Nótese que

$$f(X) = \max_{i=1,\ldots,c} \{y^i\}.$$

- Para medir la suavidad del contorno superior usamos dos valores: la altura media de los niveles del contorno, y el área delimitada por este contorno y la línea imaginaria horizontal de altura $f(X)$.

$$AlturaMedia(X) = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{c} (f(X) - y^i)$$

$$\acute{A}reaSuperior(X) = \sum_{i=1}^{c} (x_2^i - x_1^i) \times (f(X) - y^i)$$

- Valores próximos a cero se correponden con contornos suaves.

## Reglas de parada específicas para el SPP (iii)

- **Primer criterio de parada.** Finalizar la búsqueda cuando

$$\mathit{Desperdicio}(X) \leq \alpha_1 \wedge \mathit{\acute{A}reaSuperior}(X) \leq \alpha_2$$

- **Segundo criterio de parada.** Finalizar la búsqueda cuando

$$\mathit{Desperdicio}(X) \leq \alpha_1 \wedge \mathit{AlturaMedia}(X) \leq \alpha_3$$

## Resultados computacionales

| | | | Regla de parada 1 | | | | Regla de parada 2 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $w$ | $h_{opt}$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | *Obj* | *Iter* | $\alpha_1$ | $\alpha_3$ | *Obj* | *Iter* |
| 500 | 100 | 200 | 0.1 | 2 | 202.6 | 1.8 | 0.1 | 3 | 202.6 | 1 |
| | | | | 1.5 | 203 | 1.6 | | 1.5 | 203 | 1.6 |
| | | | | 1 | 202.2 | 6.8 | | 1 | 203 | 14.2 |
| 500 | 150 | 200 | 0.1 | 2 | 202.8 | 1.2 | 0.1 | 3 | 203 | 1 |
| | | | | 1.5 | 202.2 | 3.8 | | 1.5 | 202.2 | 3.4 |
| | | | | 1 | 202 | 23.4 | | 1 | 202 | 9 |
| 700 | 250 | 320 | 0.1 | 2 | 322.8 | 2.4 | 0.1 | 3 | 323 | 1 |
| | | | | 1.5 | 322 | 22.8 | | 1.5 | 322 | 10.2 |
| | | | | 1 | 322.4 | 734.4 | | 1 | 322 | 68.2 |
| 700 | 250 | 400 | 0.1 | 2 | 402.4 | 2.4 | 0.1 | 3 | 403 | 1 |
| | | | | 1.5 | 402 | 47.2 | | 1.5 | 402.4 | 433 |
| | | | | 1 | 402.4 | $747.4^*$ | | 1 | 402 | 387.4 |

# Licencia