

## Tema 5. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

### Ejercicios resueltos

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{x+5}{2} = \frac{2x+2}{3}; & \text{b) } x - \frac{x-1}{2} = 2 - \frac{x+3}{4}; & \text{c) } 2x - \frac{x-4}{6} = x - \frac{1+x}{4}; \\ \text{d) } \frac{3(x-1)}{4} - \frac{2(x+5)}{9} = \frac{1}{4}; & \text{e) } \frac{2}{3} \left[ x - \left( 1 - \frac{x-2}{3} \right) \right] + 1 = x; & \text{f) } 5 - \frac{x-2}{3} = 2x; \end{array}$$

*SOL:* a)  $3 \cdot (x+5) = 2 \cdot (2x+2)$ ;  $3x+15 = 4x+4$ ;  $x = 11$ .

b)  $4x - 2(x-1) = 4 \cdot 2 - 1(x+3)$ ;  $4x - 2x + 2 = 8 - x - 3$ ;  $3x = 3$ ;  $x = 1$ .

c)  $12 \cdot 2x - 2(x-4) = 12x - 3(1+x)$ ;  $24x - 2x + 8 = 12x - 3 - 3x$ ;  $13x = -11$ ;  $x = -\frac{11}{13}$ .

d)  $9 \cdot 3(x-1) - 4 \cdot 2(x+5) = 9 \cdot 1$ ;  $27x - 27 - 8x - 40 = 9$ ;  $19x = 76$ ;  $x = 4$ .

e)  $\frac{2}{3} \left( x - 1 + \frac{x-2}{3} \right) + 1 = x$ ;  $\frac{2x}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2(x-2)}{9} + 1 = x$ ;  $3 \cdot 2x - 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2(x-2) + 9 \cdot 1 = 9x$ ;  
 $6x - 6 + 2x - 4 + 9 = 9x$ ;  $-1 = x$ .

f)  $3 \cdot 5 - 1(x-2) = 3 \cdot 2x$ ;  $15 - x + 2 = 6x$ ;  $17 = 7x$ ;  $x = \frac{17}{7}$ .

2. Resolver las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 2x^2 + 3x - 2 = 0; & \text{b) } \frac{x^2 + 1}{10} - \frac{x^2 - 1}{12} = 1; & \text{c) } \frac{x^2 + 2}{2} - \frac{x^2 - 1}{3} = (x-2)^2; \\ \text{d) } x + 1 = (x+3)(x-2) - \frac{(x+1)^2}{2}; & \text{e) } 4x^2 - 13x + 9 = 0; & \text{f) } x^2 - 9 = 0; \quad \text{g) } 2x^2 + 4x = 0 \end{array}$$

*SOL:*

$$\text{a) } x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{-8}{4} = -2 \end{cases}$$

b)  $6(x^2 + 1) - 5(x^2 - 1) = 60 \cdot 1$ ;  $6x^2 + 6 - 5x^2 + 5 = 60$ ;  $x^2 = 49$ ;  $x = \pm\sqrt{49} = \pm 7$

$$c) 3(x^2 + 2) - 2(x^2 - 1) = 6(x^2 - 4x + 4); 3x^2 + 6 - 2x^2 + 2 = 6x^2 - 24x + 24; 0 = 5x^2 - 24x + 16;$$

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 320}}{10} = \frac{24 \pm 16}{10} = \begin{cases} \frac{40}{10} = 4 \\ \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$d) 2(x+1) = 2(x+3)(x-2) - 1(x+1)^2; 2x+2 = (2x+6)(x-2) - (x^2+2x+1);$$

$$2x+2 = 2x^2 - 4x + 6x - 12 - x^2 - 2x - 1; 0 = x^2 - 2x - 15 = 0; x = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{10}{2} = 5 \\ \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

$$e) x = \frac{3 \pm \sqrt{9+160}}{4} = \frac{3 \pm 13}{4} = \begin{cases} \frac{16}{4} = 4 \\ \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$f) x^2 - 9 = (x+3) \cdot (x-3); x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

$$g) 2x^2 + 4x = 2x \cdot (x+4); x = \begin{cases} 0 \\ -4 \end{cases}$$

3. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a) \left. \begin{aligned} \frac{x}{2} &= 1 + \frac{y}{3} \\ x - 3 &= \frac{y+2}{2} \end{aligned} \right\};$$

$$b) \left. \begin{aligned} 4x - \frac{7y}{3} &= 13 \\ \frac{x-y}{2} &= 3 - \frac{x+y}{4} \end{aligned} \right\};$$

$$c) \left. \begin{aligned} \frac{y+3}{4} - \frac{x-2}{3} &= \frac{5}{3} \\ \frac{3x+2}{5} - \frac{2y+1}{10} &= \frac{1}{10} \end{aligned} \right\};$$

$$d) \left. \begin{aligned} \frac{2(x+3)}{5} - \frac{3y+1}{4} &= \frac{27}{20} \\ \frac{3y-2}{4} - \frac{2(2x-1)}{3} &= -\frac{7}{6} \end{aligned} \right\}.$$

$$SOL: a) \left. \begin{aligned} 3x &= 6 \cdot 1 + 2y \\ 2x - 6 &= 1(y+2) \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} 3x - 2y &= 6 \\ 2x - y &= 8 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} 3x - 2y &= 6 \\ -4x + 2y &= -16 \end{aligned} \right\} -x = -10; x = 10;$$

$$2 \cdot 10 - y = 8; 20 - 8 = y; y = 12. \quad \text{Esto es: } x = 10, y = 12.$$

$$b) \left. \begin{aligned} 3 \cdot 4x - 7y &= 3 \cdot 13 \\ 2(x-y) &= 4 \cdot 3 - 1 \cdot (x+y) \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} 12x - 7y &= 39 \\ 2x - 2y &= 12 - x - y \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} 12x - 7y &= 39 \\ 3x - y &= 12 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} 12x - 7y &= 39 \\ -12x + 4y &= -48 \end{aligned} \right\}$$

$$-3y = -9; y = 3; 3x - 3 = 12; 3x = 15; x = 5. \quad \text{Esto es: } x = 5, y = 3.$$

$$c) \left. \begin{array}{l} 3(y+3) - 4(x-2) = 4 \cdot 5 \\ 2(3x+2) - 1(2y+1) = 1 \cdot 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 3y+9-4x+8=20 \\ 6x+4-2y-1=1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 3y-4x=3 \\ 6x-2y=-2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 3y-4x=3 \\ 3x-y=-1 \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} 3y-4x=3 \\ 9x-3y=-3 \end{array} \right\} 5x=0; \quad x=0; \quad 3 \cdot 0 - y = -1; \quad y=1. \quad \text{Esto es: } x=0, y=1.$$

$$d) \left. \begin{array}{l} 4 \cdot 2(x+3) - 5(3y+1) = 1 \cdot 27 \\ 3(3y-2) - 4 \cdot 2(2x-1) = -2 \cdot 7 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 8x+24-15y-5=27 \\ 9y-6-16x+8=-14 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 8x-15y=8 \\ -16x+9y=-16 \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} 16x-30y=16 \\ -16x+9y=-16 \end{array} \right\} -21y=0; \quad y=\frac{0}{-21}=0; \quad 8x-15 \cdot 0=8; \quad 8x=8; \quad x=1. \\ \text{Esto es: } x=1, y=0.$$

4. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a) \left. \begin{array}{l} 5x - y - 2 = 0 \\ x^2 + 3x - y - 5 = 0 \end{array} \right\};$$

$$b) \left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 17 \\ x - y = 1 \end{array} \right\};$$

$$c) \left. \begin{array}{l} 2x + y = 4 \\ 2x^2 + y^2 - 2x + 3y = 10 \end{array} \right\};$$

$$d) \left. \begin{array}{l} x - 3y + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0 \end{array} \right\}.$$

*SOL:*

$$5x - 2 = y$$

$$a) x^2 + 3x - (5x - 2) - 5 = 0; \quad x^2 + 3x - 5x + 2 - 5 = 0; \quad x^2 - 2x - 3 = 0; \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm 4}{2} = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{6}{2} = 3; \quad y_1 = 5 \cdot 3 - 2 = 15 - 2 = 13 \\ x_2 = \frac{-2}{2} = -1; \quad y_2 = 5 \cdot (-1) - 2 = -5 - 2 = -7 \end{array} \right.$$

$$\text{Esto es: } x_1 = 3, y_1 = 13; \quad x_2 = -1, y_2 = -7.$$

$$b) (y+1)^2 - y^2 = 17; \quad y^2 + 2y + 1 - y^2 = 17; \quad 2y = 16; \quad y = 8; \quad x = 8 + 1 = 9 \\ x = y + 1$$

$$\text{Esto es: } x = 9, y = 8.$$

$$c) y = 4 - 2x \\ 2x^2 + (4 - 2x)^2 - 2x + 3(4 - 2x) = 10; \quad 2x^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2x + (2x)^2 - 2x + 12 - 6x = 10; \\ 2x^2 + 16 - 16x + 4x^2 - 2x + 12 - 6x = 10; \quad 6x^2 - 24x + 18 = 0; \quad x^2 - 4x + 3 = 0;$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{6}{2} = 3; \quad y_1 = 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2 \\ x_2 = \frac{2}{2} = 1; \quad y_2 = 4 - 2 \cdot 1 = 4 - 2 = 2 \end{array} \right.$$



Esto es:  $x_1 = 3, y_1 = -2; x_2 = 1, y_2 = 2$ .

$$d) \quad x = 3y - 5$$

$$(3y - 5)^2 + y^2 - 8(3y - 5) + 4y - 5 = 0; \quad (3y)^2 - 2 \cdot 3y \cdot 5 + 5^2 + y^2 - 24y + 40 + 4y - 5 = 0;$$

$$9y^2 - 30y + 25 + y^2 - 20y + 35 = 0; \quad 10y^2 - 50y + 60 = 0; \quad y^2 - 5y + 6 = 0;$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} y_1 = \frac{6}{2} = 3; & x_1 = 3 \cdot 3 - 5 = 9 - 5 = 4 \\ y_2 = \frac{4}{2} = 2; & x_2 = 3 \cdot 2 - 5 = 6 - 5 = 1 \end{cases}$$

Esto es:  $x_1 = 4, y_1 = 3; x_2 = 1, y_2 = 2$ .

5. La suma de tres números pares consecutivos es 24. Determinar dichos números.

*SOL:* Sea  $x$  el primero de los números pares:

$$x + (x + 2) + (x + 4) = 24; \quad 3x = 18; \quad x = 6. \text{ Por tanto, los tres números pares son el 6, 8 y 10.}$$

6. Una madre tiene 20 años más que su hija. Dentro de 12 años la madre tendrá el doble de edad que su hija. ¿Qué edad tienen actualmente la madre y la hija?

*SOL:* Sea  $x$  la edad de la hija, entonces la madre tendrá hoy  $20+x$ , y dentro de 12 años:

$$(20 + x) + 12 = 2 \cdot (x + 12); \quad x = 8 \text{ años la hija; } 20 + 8 = 28 \text{ años la madre.}$$

7. El tiempo que se tarda en resolver un problema matemático se distribuye de la siguiente forma:  $1/4$  del total en leerlo;  $3/10$  en plantearlo;  $1/5$  en resolverlo y  $5/4$  de minuto en comprobarlo. Hallar el tiempo total empleado para la resolución.

*SOL:* Sea  $x$  el tiempo total (minutos) empleado para la resolución de un problema. Entonces el tiempo se distribuye de la siguiente forma: Leerlo:  $\frac{1}{4}x = \frac{x}{4}$  minutos; Plantearlo:  $\frac{3}{10}x = \frac{3x}{10}$

minutos; Resolverlo:  $\frac{1}{5}x = \frac{x}{5}$  minutos; y en Comprobarlo:  $\frac{5}{4} \cdot 1 = \frac{5}{4}$  minutos. Luego:

$$\frac{x}{4} + \frac{3x}{10} + \frac{x}{5} + \frac{5}{4} = x;$$

$$5x + 2 \cdot 3x + 4x + 5 \cdot 5 = 20x; \quad 5x + 6x + 4x + 25 = 20x; \quad 25 = 5x; \quad x = \frac{25}{5} = 5$$

8. En un tonel de vino, se saca primero la tercera parte del total, luego la quinta parte de lo que queda, y aún restan 16 litros. ¿Cuántos litros había en el tonel?

*SOL:* Cantidad de litros que había en el tonel:  $x$ . Primero se sacan  $\frac{1}{3}x = \frac{x}{3}$  litros. Luego se

sacan:  $\frac{1}{5}\left(x - \frac{x}{3}\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3x - x}{3} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2x}{3} = \frac{2x}{15}$  litros. Por lo tanto:  $\frac{x}{3} + \frac{2x}{15} + 16 = x$ ;

$5x + 1 \cdot 2x + 15 \cdot 16 = 15x$ ;  $5x + 2x + 240 = 15x$ ;  $240 = 8x$ ;  $x = \frac{240}{8} = 30$ ; esto es: 30.

9. En un oposición se hacen 15 preguntas en total; cada respuesta correcta se puntúa con 2,5 puntos, y cada fallida se penaliza con 1 punto. Una persona recibe 20 puntos después de haber contestado las 15 preguntas. ¿Cuántas acertó?

*SOL:* Sea  $x$  el número de respuestas correctas.

$2,5x - 1(15 - x) = 20$ ;  $3,5x = 35$ ;  $x = 10$ ; Por tanto, acertó 10 preguntas.

10. Sumando mi edad y la de mi hermano resultan 26 años. Dentro de 10 años, mi hermano tendrá el doble de la edad que yo tengo ahora. ¿Cuáles son ahora nuestras edades?

*SOL:* Sean  $h$  y  $m$  los años que tenemos actualmente mi hermano y yo, respectivamente.

$$\left. \begin{array}{l} m + h = 26 \\ h + 10 = 2m \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} m + h = 26 \\ 2m - h = 10 \end{array} \right\} 3m = 36; \quad m = 12; \quad 12 + h = 26; \quad h = 26 - 12 = 14;$$

Mi hermano tiene 14 años y yo 12.

11. La suma de las edades de dos hermanos es 62 años. Hace 10 años la edad de un hermano era  $\frac{3}{4}$  de la edad del otro hermano. ¿Qué edad tienen actualmente los dos hermanos?

*SOL:* Sea  $x$  e  $y$  las edades de los dos hermanos respectivamente.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 62 \\ x - 10 = \frac{3}{4}(y - 10) \end{array} \right\} x = 62 - y \Rightarrow 4(62 - y) - 40 = 3y - 30 \quad \text{Por tanto, } y = 34 \text{ y } x = 28.$$

12. En un granja donde hay cerdos y palomas, se cuentan 278 patas y 120 cabezas. Se sabe que antes de efectuar este recuento, habían dos palomas que habían perdido una pata. ¿Cuántos cerdos y palomas hay?

*SOL:* Sean  $x$  el número de cerdos e  $y$  el número de palomas.

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 2y = 278 + 2 \\ x + y = 120 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2x + y = 140 \\ y = 120 - x \end{array} \right\} x = 20; \quad y = 120 - 20 = 100;$$

Hay 20 cerdos y 100 palomas.