Fundamentos matemáticos

Grado en Ingeniería agrícola y del medio rural

Tema 8
Ecuaciones diferenciales
(Ley del calentamiento de Newton)

José Barrios García

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de La Laguna

jbarrios@ull.es

2017

Índice

Tema 8. Ecuaciones diferenciales

Ley del calentamiento de Newton

La velocidad con que se calienta (o enfría) un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura T y la temperatura ambiente T_a.

Formulación de la ecuación diferencial

Si $T(t)$ es la función que nos da la temperatura del cuerpo en cada segundo de tiempo t, esta ley puede expresarse mediante una ecuación diferencial de variables separables.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_\alpha)$$

Donde T_α es la temperatura ambiente y k es una constante de proporcionalidad que depende en cada caso concreto de las características físicas del objeto.

Problema

Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es de 20°C, se deja caer en un recipiente con agua hirviendo. Sabiendo que su temperatura aumentó 2°C en un segundo:

1. Calcular la función que nos proporciona la temperatura del cuerpo en cada instante t.
2. Calcular el tiempo que tarda la barra en alcanzar 90°C.
3. Calcular el tiempo que tarda la barra en alcanzar 98°C.

Solución

Cuando un objeto absorbe calor del medio que lo rodea sigue la *ley del calentamiento de Newton*. En este caso debemos resolver la ecuación

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_\alpha)$$

Sabiendo que

$$\begin{aligned} T_\alpha &= 100º \\ T(0) &= 20º \\ T(1) &= 22º \end{aligned}$$

Resolución

Para resolver la ecuación

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 100)$$

Separamos las variables

$$\frac{dT}{T - 100} = k\, dt$$

Integramos

$$\int \frac{dT}{T-100} = \int k\, dt$$

Y obtenemos

$$\ln|T-100| = kt + c_1$$

$$|T-100| = e^{c_1} \cdot e^{kt}$$

$$T-100 = \pm\, e^{c_1} \cdot e^{kt}$$

$$T-100 = c\, e^{kt}\,, c \neq 0$$

Como $c = 0 \Longrightarrow T = 100$ también es solución de la ecuación diferencial, podemos escribir

$$T-100 = c\, e^{kt}, c \in \mathbb{R}$$

Y la solución general de la ecuación diferencial queda

$$T(t) = 100 + c\, e^{kt}.$$

En este caso concreto, podemos calcular los valores de las constantes c, k sabiendo que

$$\left.\begin{array}{l} T(0) = 100 + c\, e^{0} = 20º \\ T(1) = 100 + c\, e^{k} = 22º \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} c = -80 \\ k = \ln(39/40) \end{array}$$

Por tanto, la función que nos proporciona la temperatura del cuerpo en cada instante es

$$T(t) = 100 - 80\, e^{\ln(39/40)t} = 100 - 80\left(\frac{39}{40}\right)^{t}.$$

Es decir

$$T(t) = 100 - 80\left(\frac{39}{40}\right)^{t}.$$

El tiempo que tarda la barra en alcanzar 90º debe verificar

$$90 = 100 - 80\left(\frac{39}{40}\right)^{t} \Longrightarrow t = \frac{\ln(1/8)}{\ln(39/40)} = 82.1 \text{ s.}$$

El tiempo que tarda la barra en alcanzar 98º debe verificar

$$98 = 100 - 80\left(\frac{39}{40}\right)^{t} \Longrightarrow t = \frac{\ln(1/40)}{\ln(39/40)} = 145.7 \text{ s.}$$

Nota

Como puede comprobarse fácilmente, en el caso general de un cuerpo con temperatura ambiente T_α, la función (solución de la ecuación diferencial) que nos proporciona la temperatura del cuerpo en cada instante t es

$$T(t) = T_\alpha + c\, e^{kt}$$