Prontuario

Integrales múltiples: simetría y paridad

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Introducción

Bajo determinadas condiciones de simetría en el recinto de integración y paridad del integrando, una integral doble o triple es nula o bien se puede calcular en un recinto menor, lo que frecuentemente redunda en un cómputo más simple del valor de la integral bajo estudio.

Es importante observar en lo que sigue que para inferir la conclusión expresada deben satisfacerse los dos criterios requeridos (simetría del recinto y paridad/imparidad de la función). **No basta con que se verifique solamente uno de ellos**.

2. Integrales dobles

Se considera $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

(i) Si f es par en x: $f(x,y) = f(-x,y)$ $((x,y) \in D)$, y D es simétrico respecto del eje OY: $x = 0$, entonces

$$\iint_D f = 2\iint_{D^*} f,$$

donde

$$D^* = \{(x,y) \in D : x \geq 0\}.$$

(ii) Si f es par en y: $f(x,y) = f(x,-y)$ $((x,y) \in D)$, y D es simétrico respecto del eje OX: $y = 0$, entonces

$$\iint_D f = 2\iint_{D^*} f,$$

donde

$$D^* = \{(x,y) \in D : y \geq 0\}.$$

(iii) Si f es par en x y en y: $f(x,y) = f(-x,y) = f(x,-y)$ $((x,y) \in D)$, y D es simétrico respecto de ambos ejes coordenados: $x = y = 0$, entonces

$$\iint_D f = 4\iint_{D^*} f,$$

donde

$$D^* = \{(x,y) \in D : x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

(iv) Si f es impar en x: $f(-x,y) = -f(x,y)$ $((x,y) \in D)$, y D es simétrico respecto del eje OY: $x = 0$, entonces

$$\iint_D f = 0.$$

(v) Si f es impar en y: $f(x,-y) = -f(x,y)$ $((x,y) \in D)$, y D es simétrico respecto del eje OX: $y = 0$, entonces

$$\iint_D f = 0.$$

3. Integrales dobles: ejemplo

Hallar:

(i) $\iint_D x^2\, dx\, dy$, siendo D el recinto limitado por las rectas $y = x$, $y = -x$, $x = 1$.

(ii) $\iint_D \frac{x^3 \operatorname{sen}^2 y}{x^2 + 1 + \operatorname{tg}^2 y}\, dx\, dy$, donde

$$D = \{(x,y) : |x| \le 1,\ |y| \le 1\}.$$

Solución: (a) $1/2$; (b) 0.

RESOLUCIÓN.

(i) El integrando es par en y, y el recinto simétrico respecto al eje OX $(y = 0)$; véase la Figura 1. Tomando

$$D^* = \{(x,y) \in D : y \ge 0\},$$

encontramos que

$$\iint_D x^2\, dx\, dy = 2\iint_{D^*} x^2\, dx\, dy = 2\int_0^1 dy \int_y^1 x^2\, dx = \frac{2}{3}\int_0^1 \left(1 - y^3\right)\, dy = \frac{1}{2}.$$

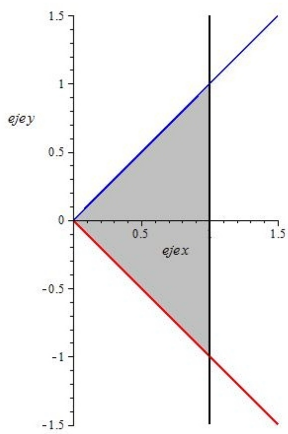

Figura 1.

(ii) El integrando es impar en x, y el recinto de integración simétrico respecto al eje OY $(x = 0)$; véase la Figura 2. Por consiguiente, la integral es nula.

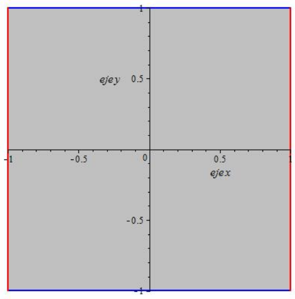

Figura 2.

$\square$

4. Integrales triples

Se considera $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

(i) Si f es par en x: $f(x,y,z) = f(-x,y,z)$ $((x,y,z) \in D)$, y D es simétrico respecto del plano $x = 0$, entonces

$$\iiint_D f = 2\iiint_{D^*} f,$$

donde

$$D^* = \{(x,y,z) \in D : x \geq 0\}.$$

(ii) Si f es par en y: $f(x,y,z) = f(x,-y,z)$ $((x,y,z) \in D)$, y D es simétrico respecto del plano $y = 0$, entonces

$$\iiint_D f = 2\iiint_{D^*} f,$$

donde

$$D^* = \{(x,y,z) \in D : y \geq 0\}.$$

(iii) Si f es par en z: $f(x,y,z) = f(x,y,-z)$ $((x,y,z) \in D)$, y D es simétrico respecto del plano $z = 0$, entonces

$$\iiint_D f = 2\iiint_{D^*} f,$$

donde

$$D^* = \{(x,y,z) \in D : z \geq 0\}.$$

(iv) Si f es par en x, en y y en z: $f(x,y,z) = f(-x,y,z) = f(x,-y,z) = f(x,y,-z)$ $((x,y,z) \in D)$, y D es simétrico respecto de los tres planos coordenados, entonces

$$\iiint_D f = 8\iiint_{D^*} f,$$

donde

$$D^* = \{(x,y,z) \in D : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

(v) Si f es impar en x: $f(-x,y,z) = -f(x,y,z)$ $((x,y,z) \in D)$, y D es simétrico respecto del plano $x = 0$, entonces

$$\iiint_D f = 0.$$

(vi) Si f es impar en y: $f(x,-y,z) = -f(x,y,z)$ $((x,y,z) \in D)$, y D es simétrico respecto del plano $y = 0$, entonces

$$\iiint_D f = 0.$$

(vii) Si f es impar en z: $f(x,y,-z) = -f(x,y,z)$ $((x,y,z) \in D)$, y D es simétrico respecto del plano $z = 0$, entonces

$$\iiint_D f = 0.$$

□

5. Integrales triples: ejemplo

(i) Hallar el volumen encerrado por el tronco de paraboloide elíptico

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}.$$

(ii) Sea D el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ delimitado por las superficies $y^2 = 1 - z$, $x = 0$, $x = 4$ y $z = 0$. Calcular

$$\iiint_D y^3 \operatorname{sen}^2(x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Solución: (a) 3π; (b) 0.

RESOLUCIÓN.

(i) En vista de la simetría del recinto (Figura 3) y la paridad del integrando, sustituimos D por el primer octante

$$D^* = \{(x,y,z) \in D : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$$

y multiplicamos por 4 la integral extendida a D^* para obtener:

$$\begin{aligned}
\iiint_D dx\, dy\, dz &= 4 \iiint_{D^*} dx\, dy\, dz \\
&= 4 \int_0^2 dx \int_0^{3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dy \int_0^{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}} dz \\
&= 4 \int_0^2 dx \int_0^{3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \right) dy \\
&= 4 \int_0^2 \left(1 + \frac{x^2}{2} \right) \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\, dx \\
&= 3\pi.
\end{aligned}$$

La última integral se puede resolver aplicando el cambio de variable $x = 2 \operatorname{sen} t$.

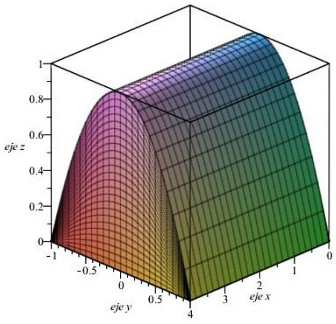

Figura 3.

(ii) El integrando es impar en y, y el recinto de integración simétrico respecto al plano $y = 0$; véase la Figura 4. Por consiguiente, la integral es nula.

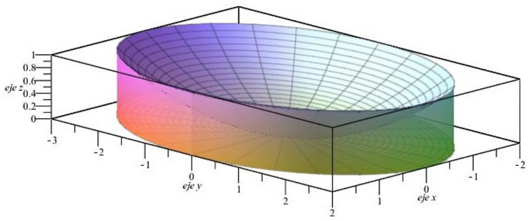

Figura 4.

□