Fundamentos matemáticos para la Ingeniería

Grado en Arquitectura Técnica

Tema 3
Programación lineal

José Barrios García

[Departamento de Análisis Matemático](#)

[Universidad de La Laguna](#)

jbarrios@ull.es

Licencia Creative Commons 4.0 Internacional

Índice

Tema 3. Programación lineal

Introducción

Los ingenieros se enfrentan en numerosas ocasiones al problema de optimizar los elementos que intervienen en un determinado proceso para conseguir la mejor solución. En este tema abordaremos una de las técnicas básicas utilizadas: la programación lineal.

Ejemplo. Una empresa constructora dispone de $60{,}000\ m^2$ para urbanizar. Decide construir dos tipos de viviendas unifamiliares: unas en parcelas de $200\ m^2$ que albergarán a familias con una media de cinco miembros y cuyo precio de venta será de $180{,}000$ € y otras en parcelas de $300\ m^2$ donde vivirán familias de una media de cuatro miembros que costarán $240{,}000$ €. Las autoridades del municipio imponen dos condiciones: el número de casas no puede superar las 225 y el número de habitantes esperado no puede superar el millar. ¿Cuántas viviendas de cada tipo se han de construir para maximizar los ingresos?

Planteamiento

Llamemos x e y a las cantidades de viviendas del Tipo 1 y Tipo 2 que se van a fabricar. El ingreso que se obtiene por sus ventas viene dado por la función $I(x,y) = 180{,}000x + 240{,}000y$. Debemos encontrar los valores de x, y que maximizan los ingresos, sabiendo que estos valores están sujetos a las siguientes restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 225 \\ 0 \leq y \leq 225 \\ x + y \leq 225 \\ 200x + 300y \leq 60{,}000 \\ 5x + 4y \leq 1000 \end{array}\right\}$$

Ejemplo. Una empresa prepara el traslado de 400 trabajadores. La empresa de transporte tiene 10 guaguas de 50 plazas y 8 guaguas de 40 plazas, pero sólo dispone de 9 conductores. El alquiler de una guagua grande cuesta 48 euros y el de una pequeña, 36 euros. Calcular cuántas guaguas de cada tipo hay que utilizar para que el traslado le resulte lo más económico posible a la empresa.

Planteamiento

Llamemos x al número de guaguas grandes e y al número de guaguas pequeñas que se van a utilizar. El coste del traslado viene dado por la función $C(x,y) = 48x + 36y$. Debemos de encontrar los valores de x, y que minimizan el coste del traslado, sabiendo que estos valores están sujetos a las siguientes restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 8 \\ x + y \leq 9 \\ 50x + 40y \geq 400 \end{array}\right\}$$

Programación lineal

En ambos casos nos encontramos con el mismo problema: determinar los valores x, y que maximizan o minimizan una cierta función lineal de dos variables, $F(x,y) = Ax + By$, cuyo dominio está restringido por un cierto número de inecuaciones lineales. En este tema veremos cómo resolver este tipo de problemas mediante técnicas de programación lineal.

Inecuaciones lineales de dos variables

Una *inecuación lineal de dos variables* es una inecuación del tipo $ax + by \leq c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Gráficamente, la solución de la inecuación coincide con todos los puntos de alguno de los dos semiplanos en que la recta $ax + by = c$ divide al plano. En lo que sigue las llamaremos simplemente *inecuaciones lineales*.

Ejemplo. Resolver gráficamente la inecuación lineal $x - y > 3$.

Despejando y, la inecuación queda $y < x - 3$. Dibujamos la recta $y = x - 3$ y seleccionamos el semiplano inferior abierto.

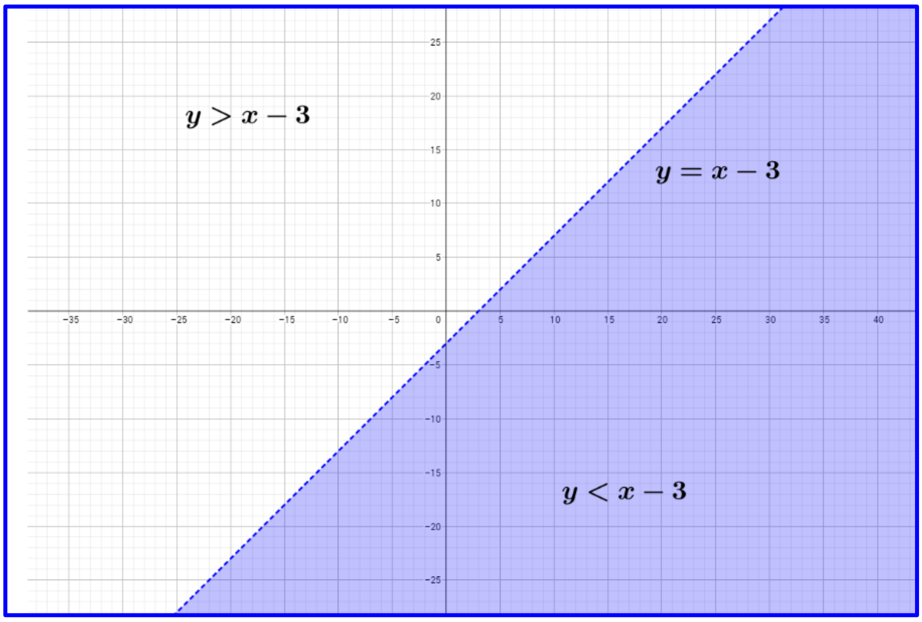

Figura 1. Resolución gráfica de una inecuación lineal.

Sistemas de inecuaciones lineales de dos variables

Un *sistema de inecuaciones lineales (de dos variables)* es un conjunto de n inecuaciones lineales (de dos variables). Gráficamente, la solución del sistema coincide con la intersección de todos los semiplanos que definen las inecuaciones del sistema. Esta intersección recibe el nombre de *región factible*. Cuando la intersección no es vacía, la región factible es una región del plano delimitada por segmentos de recta.

Ejemplo. Resolver gráficamente el siguiente sistema de inecuaciones lineales.

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y \geq -3 \\ 2x - y \leq 9 \\ 2x - 5y \geq 5 \end{array}\right\}$$

Haciendo los cálculos oportunos (Figura 2), vemos que la región factible es el triángulo cerrado de vértices $A(0, -1), B(3, -3), C(5, 1)$.

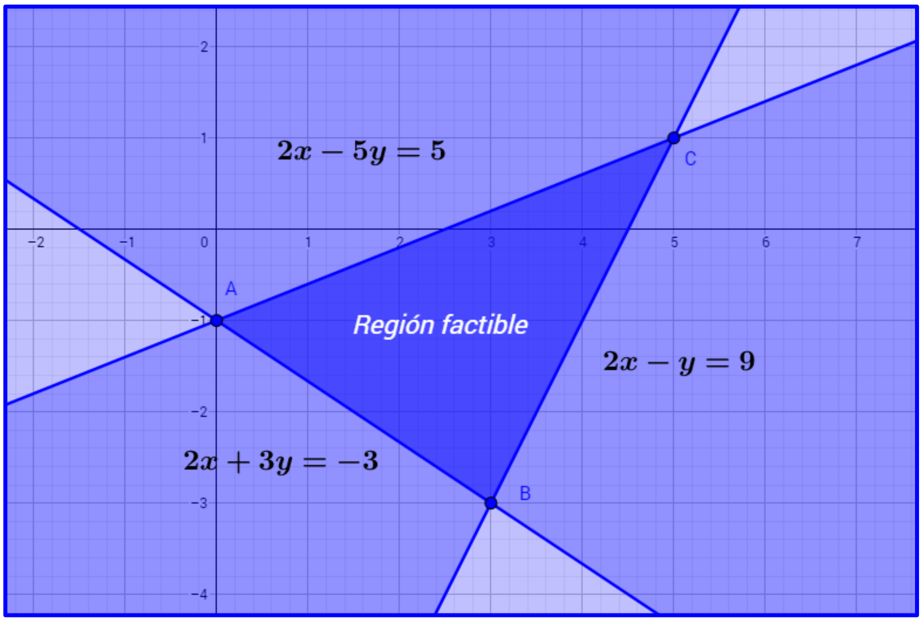

Figura 2. Resolución gráfica de un sistema de inecuaciones lineales.

Funciones lineales de dos variables

Una *función lineal (de dos variables x, y)* es una función del tipo $F(x, y) = Ax + By$, con $A, B \in \mathbb{R}$. En general, su dominio puede ser cualquier región del plano, pero en lo que sigue solo consideraremos funciones lineales cuyo dominio esté restringido por un cierto número de inecuaciones lineales. Es decir, funciones lineales definidas en una cierta región factible.

Programación lineal

La *programación lineal* trata de maximizar o minimizar una función lineal $F(x, y)$ definida sobre una cierta región factible. Es decir, trata de determinar el punto (o los puntos) de la región factible en los que la función alcanza su valor máximo o su valor mínimo. Los puntos de la región factible en los que la función alcanza su valor máximo o su valor mínimo se denominan *soluciones óptimas*.

En general, un problema de programación lineal puede tener una, ninguna o infinitas soluciones óptimas. Evidentemente, si la región factible es vacía, la función no tiene soluciones óptimas. El siguiente teorema nos permite localizar dichas soluciones cuando la región factible es no vacía.

Teorema 1. *Cuando solo existe una solución óptima, esta se encuentra en uno de los vértices de la región factible. Cuando existen infinitas soluciones óptimas, estas se encuentran sobre uno de los lados que delimitan la región factible.*

El proceso para determinar las soluciones puede hacerse analíticamente o gráficamente.

Método analítico

Calculamos los vértices de la región factible, evaluamos la función en cada uno de los vértices y elegimos el punto (o los puntos) donde la función alcanza su valor máximo o mínimo.

Ejemplo. Maximizar la función $F(x, y) = 2000x + 5000y$ en un dominio sujeto a las siguientes restricciones

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y\geq -3 \\ 2x-y\leq 9 \\ 2x-5y\geq 5 \end{array}\right\}$$

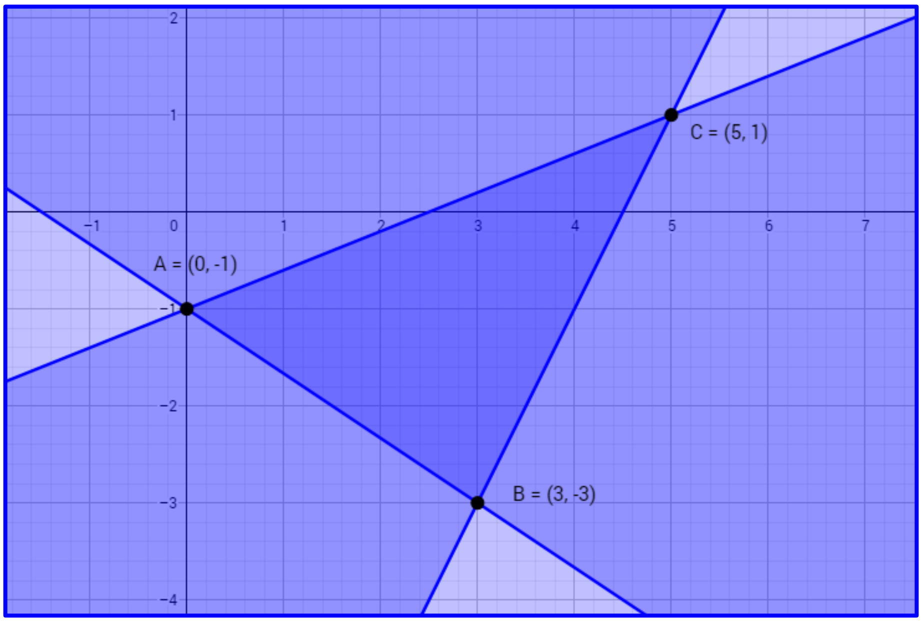

Figura 3. Vértices de la región factible.

Como vimos anteriormente (Figura 3), la región factible que resulta es el triángulo de vértices $A(0,-1), B(3,-3), C(5,1)$. Evaluando la función en cada vértice, obtenemos:

- $F(0,-1)=2000\cdot 0+5000\cdot(-1)=-5000.$
- $F(3,-3)=2000\cdot 3+5000\cdot(-3)=-9000.$
- $F(5,+1)=2000\cdot 5+5000\cdot 1=15{,}000.$

Por tanto, el punto donde la función alcanza su valor máximo (solución óptima) es el punto $C(5,1)$.

Método gráfico

En cada vértice de la región factible trazamos rectas paralelas a la recta $Ax+By=0$, es decir, trazamos rectas con vector director $\vec{v}=(B,-A)$. Estas rectas cortan al eje Y en una cierta ordenada. Los valores máximos o mínimos de la función sobre la región factible se encuentran en los vértices que hacen máxima o mínima dicha ordenada.

Ejemplo. Maximizar gráficamente la función $G(x,y)=60x+40y$ sometida a las siguientes restricciones

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ x+3y\leq 90 \\ 2x+y\leq 80 \end{array}\right\}$$

Haciendo los cálculos oportunos, obtenemos la región factible que muestra la Figura 4, cuyos vértices son los puntos $A(0,0), B(0,30), C(30,20), D(40,0)$.

Figura 4. Vértices de la región factible.

Situando en cada vértice de la región factible el vector $\vec{v} = (-40, 60)$, vemos que el valor máximo de la función se obtiene en el punto $C(30, 20)$ pues su vector corta al eje Y en el punto con la ordenada más grande. Por tanto, el valor máximo que alcanza la función en la región factible es su valor en dicho punto: $F(20, 30) = 60 \cdot 20 + 40 \cdot 30 = 2400$.

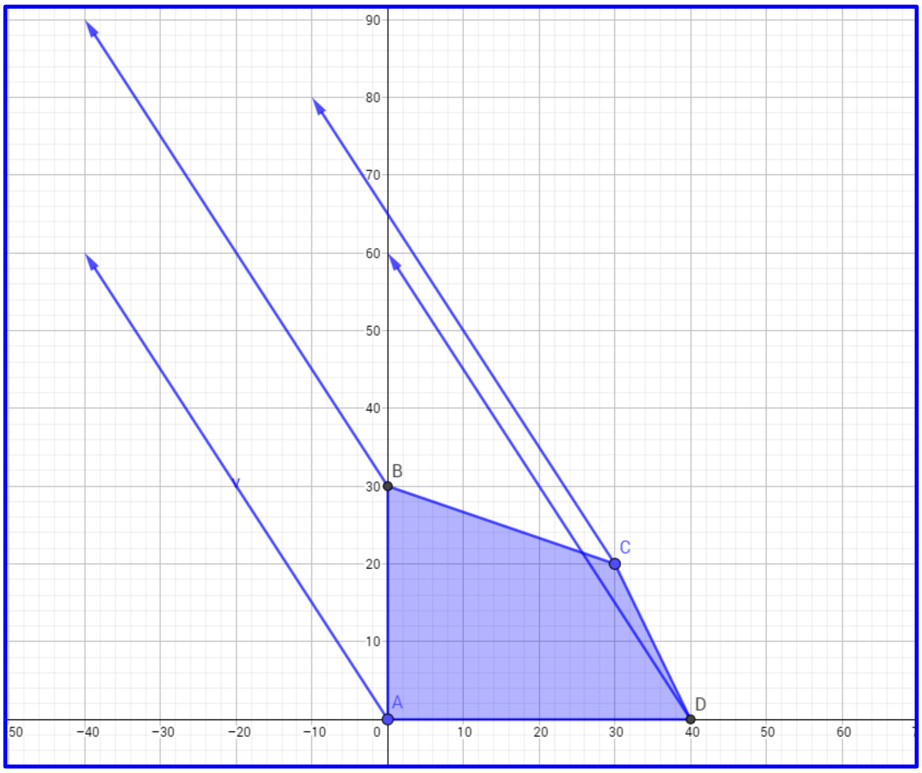

Figura 5. Resolución gráfica.