Universidad de La Laguna

OPEN EDUCATION CONSORTIUM
The Global Network for Open Education

Fundamentos matemáticos para la Ingeniería

Grado en Arquitectura Técnica

Tema 4
Geometría elemental.
Geometría analítica del plano

José Barrios García

[Departamento de Análisis Matemático](#)

[Universidad de La Laguna](#)

jbarrios@ull.es

Índice

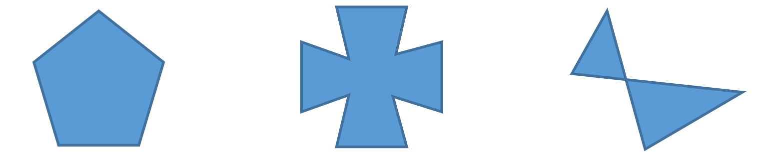
Tema 4. Geometría elemental

Figuras básicas en el plano

Polígonos

Polígono: región del plano limitada por una línea poligonal cerrada. Un polígono puede ser:

- *Convexo*: Ninguna de las rectas que pasan por sus lados divide al polígono en dos partes.
- *Cóncavo*: Alguna de las rectas que pasan por sus lados divide al polígono en dos partes.
- *Estrellado*: Tiene dos lados que se cortan en un punto distinto del vértice.



En lo que sigue nos limitaremos a estudiar los polígonos convexos.

Polígonos convexos

Ángulos *interiores*: Cada uno de los ángulos, medidos por el interior del polígono, que forman dos lados consecutivos unidos en un vértice.

- Suma de los ángulos interiores de un triángulo: $S = 180º$.
- Suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados: $S = 180(n-2)$.

Ángulos exteriores: Ángulos suplementarios de los ángulos interiores.

- Suma de los ángulos exteriores de un polígono de n lados: $S' = 180n - S = 180n - 180(n-2) = 360º$.

Polígono regular

Polígono (convexo) con todos sus lados y ángulos iguales. Sus ángulos interiores miden $\alpha = \frac{180(n-2)}{n}$. Sus ángulos exteriores miden $\alpha = \frac{360}{n}$.

Embaldosado con polígonos regulares

El plano solo se puede embaldosar con triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares. También puede embaldosarse con una combinación de cuadrados y octógonos regulares.

Área de las figuras básicas

Triángulo	Cuadrado	Rectángulo	Paralelogramo	Trapecio	Polígono regular	Círculo
$\frac{b \cdot a}{2}$	l^2	$b \cdot a$	$b \cdot a$	$\frac{(B+b) \cdot a}{2}$	$\frac{P \cdot Ap}{2}$	$A = \pi r^2$

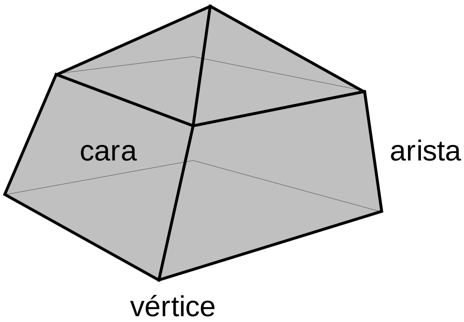
Área de un triángulo conociendo sus lados

- $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, siendo $s = \frac{a+b+c}{2}$ el semiperímetro del triángulo.

Figuras básicas en el espacio

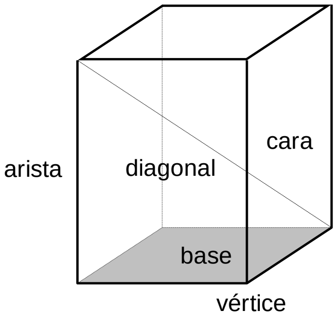
Poliedros

Poliedro: figura sólida cuya superficie esté formada por polígonos. Los poliedros pueden ser muy complicados, por ello limitaremos nuestro estudio a los tres tipos básicos: los *prismas*, las *pirámides* y los *poliedros regulares*.



Prismas

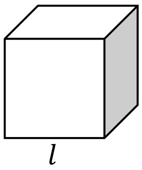
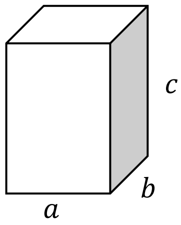
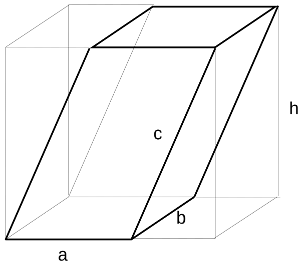
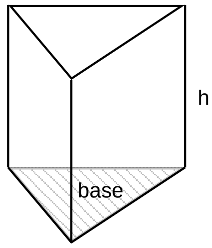
Prisma: poliedro cuyas *bases* son dos polígonos iguales, paralelos y dispuestos de la misma manera, y cuyas *caras laterales* son paralelogramos, dos de cuyos lados opuestos son los lados correspondientes de las bases. La distancia entre las bases se denomina *altura* del prisma. Las aristas que unen las dos bases se denominan *aristas laterales*.



Diremos que el prisma es *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal,* etc., según su base sea un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, etc.

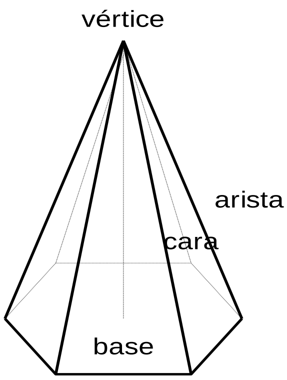
Principales tipos de prismas

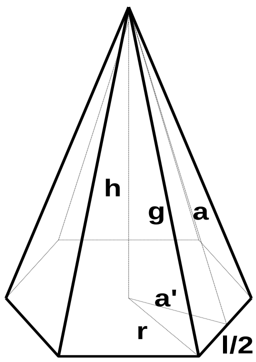
- Cubo: sus caras son seis cuadrados iguales y paralelos dos a dos.
- Paralelepípedo recto: sus caras son seis rectángulos iguales y paralelos dos a dos.
- Paralelepípedo oblicuo: sus caras son seis paralelogramos iguales y paralelos dos a dos.
- Prisma recto: sus caras laterales son rectángulos.
- Prisma oblicuo: sus caras laterales son paralelogramos.
- Prisma regular: sus bases son polígonos regulares.

Cubo	Paralelepípedo recto	Paralelepípedo oblicuo	prisma recto
			
$S_l = 4l^2$ $S_t = 6l^2$ $V = l^3$	$S_l = 2ac + 2bc$ $S_t = 2ab + 2ac + 2bc$ $V = abc$	$S_l = 2ah + 2bc$ $S_t = 2ah + 2bc + 2ab$ $V = abh$	$S_l = P_b h$ $S_t = S_l + 2S_b$ $V = S_b h$

Pirámides

Pirámide: poliedro limitado por un polígono (base de la pirámide) y diversos triángulos (caras de la pirámide). El punto donde se unen todos los triángulos se denomina *vértice* de la pirámide. La distancia del vértice a la base se denomina *altura* de la pirámide. Las aristas que unen el vértice de la pirámide con la base se denominan *aristas laterales*. Diremos que la pirámide es *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, etc., según su base sea un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, etc.





$$S_l = \frac{1}{2} P_b \cdot a$$

$$S_t = S_l + S_b$$

$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h$$

Pirámide regular

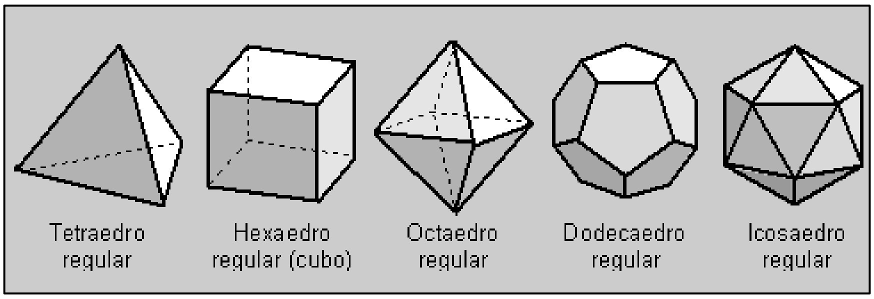
Tiene por base un polígono regular. La pirámide regular puede ser *recta* (su altura cae en el centro del polígono base) u *oblicua* (su altura no cae en el centro del polígono base).

Si la pirámide es regular y recta, todos sus triángulos laterales son isósceles, e iguales entre sí. En este caso, se denomina *apotema* de la pirámide a la altura de cada uno de ellos.

Nótense los distintos triángulos rectángulos que relacionan la apotema de la pirámide (a), la altura de la pirámide (h), la apotema de la base (a'), la mitad del lado de la base $(l/2)$, el radio de la base (r) y la arista lateral (g).

Poliedros regulares

Poliedros cuyas caras son polígonos regulares iguales y cuyos ángulos diédricos también son todos iguales. Sólo existen cinco poliedros regulares, llamados también *sólidos platónicos*.



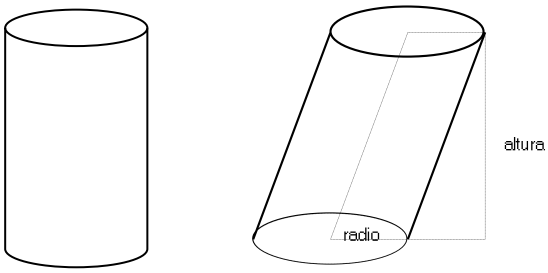
Nombre	caras	vértices	aristas
Tetraedro	4 triángulos	4	6
Hexaedro	6 cuadrados	8	12
Octaedro	8 triángulos	6	12
Dodecaedro	12 pentágonos	20	30
Icosaedro	20 triángulos	12	30

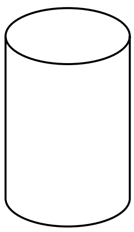
Relación de Euler

Las caras, vértices y aristas de los poliedros regulares cumplen la relación $c + v = a + 2$.

Cilindros

Limitaremos nuestro estudio a los *cilindros de base circular*, que dividiremos en dos tipos: *cilindros rectos* y *cilindros oblicuos*. El cilindro recto se obtiene girando un rectángulo 360º alrededor de uno de sus lados. Sus bases superior e inferior son dos círculos iguales y su superficie lateral es un rectángulo.





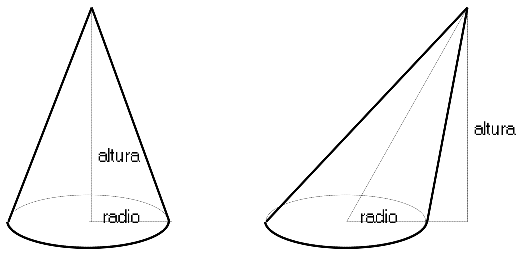
$$S_l = 2\pi r h$$

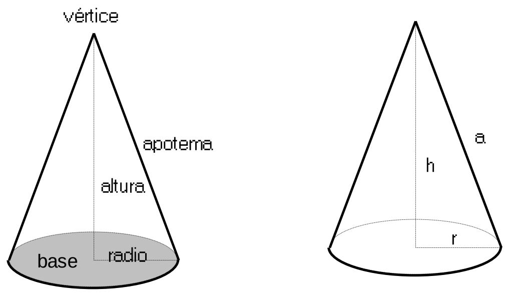
$$S_t = S_l + 2S_b = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

$$V = S_b h = \pi r^2 h$$

Conos

Nos limitaremos a estudiar los *conos de base circular*, que dividiremos en dos tipos: *conos rectos* y *conos oblicuos*. El cono recto se obtiene girando un triángulo rectángulo 360º alrededor de uno de sus catetos. Su base es un círculo y su superficie lateral es un sector circular.





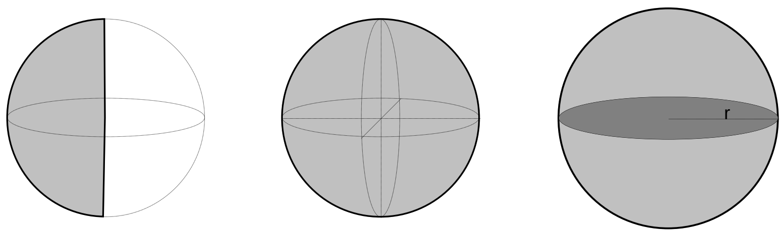
$$S_l = \pi r a$$

$$S_t = S_l + S_b = \pi r a + \pi r^2$$

$$V = \frac{1}{3} S_b h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Esfera

Se obtiene haciendo girar un semicírculo 360º alrededor de su diámetro. Todos los puntos de la *superficie esférica* están a una misma distancia *r* del *centro* de la esfera.



$$S = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

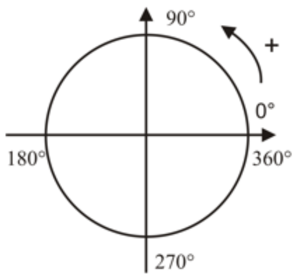
Trigonometría

Medida de ángulos

Un ángulo viene determinado por dos semirrectas que parten del mismo origen. Las semirrectas son los *lados* del ángulo y el punto de partida común es el *vértice* del ángulo. La amplitud del ángulo se mide con varios sistemas. Los más usuales son el *sistema sexagesimal* y el *sistema circular*. Ambos sistemas miden el ángulo utilizando una circunferencia centrada en el vértice del ángulo.

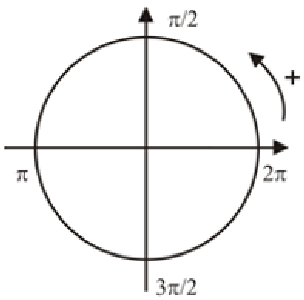
Sistema sexagesimal

La unidad de medida es el *grado* (º). Un grado es el ángulo que resulta al dividir la circunferencia en 360 partes iguales.



Sistema circular

La unidad de medida es el *radián* (*rad*). Un radián es el ángulo que resulta al dividir la circunferencia en 2π partes iguales. Dicho de otra manera, un radián es el ángulo que subtiende un arco de longitud igual al radio de la circunferencia.



El cambio de unidades puede realizarse utilizando una simple regla de tres

$$\begin{array}{rcl} 180^{\circ} & \leftrightarrow & \pi \text{ rad} \\ x^{\circ} & \leftrightarrow & y \text{ rad} \end{array}$$

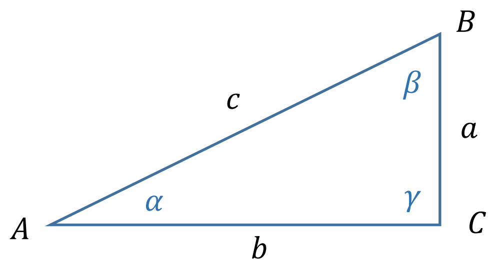
- ¿Cuántos grados mide un radián?
- ¿Cuántos radianes mide un ángulo de 120º?

Ángulos notables

Grados	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
Radianes	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$3\pi/2$	2π

Razones trigonométricas

Las razones trigonométricas establecen una relación entre los lados (a, b, c) y los ángulos (α, β, γ) de un triángulo rectángulo.



Las razones trigonométricas principales son el *seno*, el *coseno* y la *tangente*. Debido a la semejanza de triángulos, estas razones son independientes del triángulo en el que se miden.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}.$$

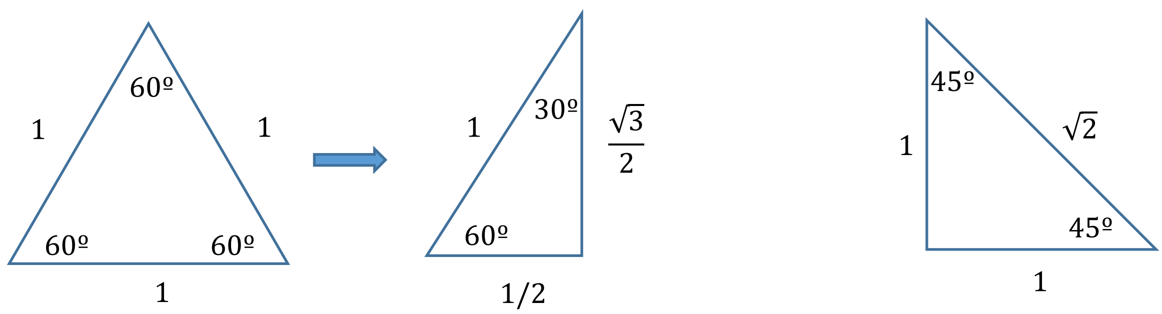
$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}.$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

Nota

- $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta = \cos(\pi/2 - \alpha)$.
- $\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha)$.

Cálculo de las razones de 30º, 60º y 45º



	30º	60º	45º
Seno	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$
Coseno	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$
Tangente	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	1

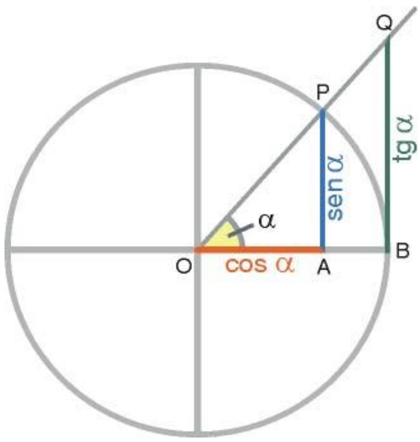
Razones secundarias

A partir de las razones trigonométricas principales de definen las razones trigonométricas secundarias: *secante*, *cosecante* y *cotangente*.

- $\sec\alpha = 1/\cos\alpha$.
- $\csc\alpha = 1/\operatorname{sen}\alpha$.
- $\cot\alpha = 1/\tan\alpha$.

La circunferencia trigonométrica

El uso de un triángulo rectángulo nos permite definir las razones trigonométricas de un ángulo α, mayor que cero y menor que 90º. Para definir las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera, se utiliza la circunferencia trigonométrica.



$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Grados	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Radianes	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
Sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
Cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
Tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	No está definida	$-\sqrt{3}$	1	$-\sqrt{3}/3$	0

Nota. En la circunferencia siempre existen dos ángulos principales que tienen el mismo seno, el mismo coseno o la misma tangente. Medidos en radianes, estos ángulos son:

- $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\pi - \alpha)$.
- $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$.
- $\tan\alpha = \tan(\alpha + \pi)$.

Formulario trigonométrico

Teorema fundamental

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$	$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$	$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

Suma de ángulos

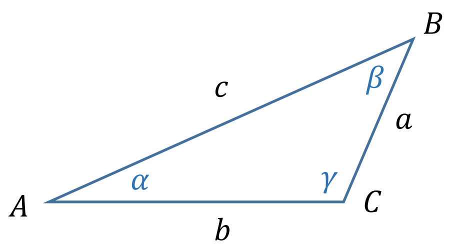
$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$	$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$	$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$	$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

Ángulo doble / Ángulo mitad

Ángulo doble	Ángulo mitad
$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$	$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$
$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$	$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$	$\tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$

Resolución de triángulos

Los siguientes teoremas nos permiten determinar los lados y los ángulos de un triángulo, conociendo algunos de sus elementos.



Suma de los ángulos de un triángulo

$$\alpha + \beta + \gamma = 180º$$

Teorema del triángulo rectángulo (teorema de Pitágoras)

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Teorema del seno

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Teorema del coseno

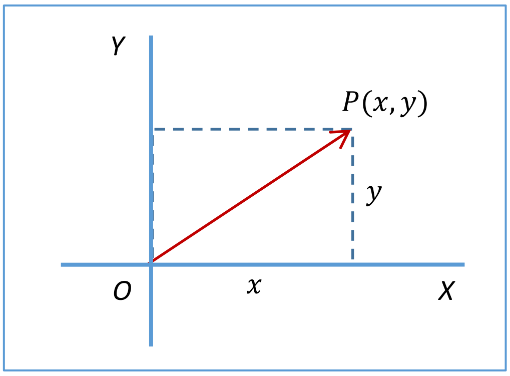
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Geometría analítica del plano

El plano real



Sistema de coordenadas cartesianas

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) |\ x, y \ \in \mathbb{R}\}$$

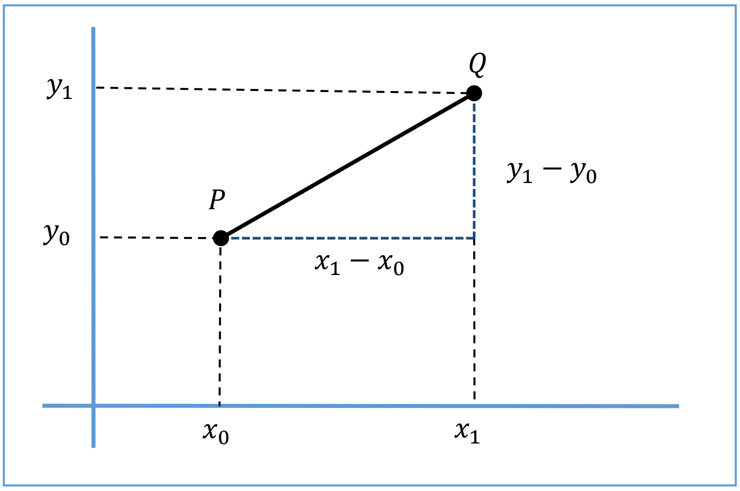
Distancia entre dos puntos

Distancia de un punto $P(x, y)$ al origen de coordenadas $O(0, 0)$:

$$d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Distancia entre dos puntos $P(x_0, y_0), Q(x_1, y_1)$:

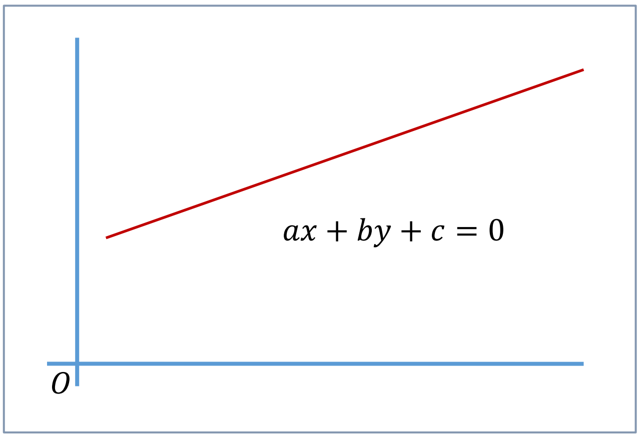
$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_0)^{\,2} + (y_1 - y_0)^2}$$



Ejercicio

- Determinar la distancia del punto $P(3, 4)$ al origen de coordenadas.
- Determinar la distancia entre los puntos $P(1, 2)$ y $Q(-3, 5)$.

Ecuaciones de la recta



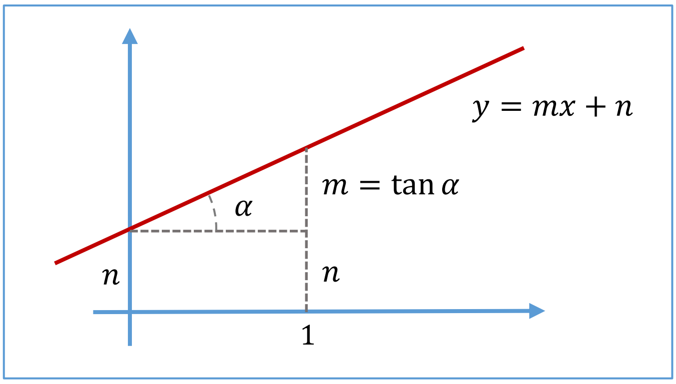
La *ecuación general* de la recta es:

$$ax + by + c = 0$$

Si $b \neq 0$, se tiene que $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, y renombrando los coeficientes obtenemos la *ecuación explícita*:

$$y = mx + n$$

Siendo $m = -a/b$ la *pendiente* de la recta (tangente del ángulo α que forma la recta con el eje X).



Otras ecuaciones

Ecuación de la recta que pasa por el punto P_0 y tiene pendiente m.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Ecuación de la recta que pasa por los puntos P_0, P_1.

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Si $x_0 = x_1$, los dos puntos están alineados verticalmente y la ecuación de la recta es $x = x_0$.

Ejemplo. Ecuación general de la recta que pasa por los puntos $A(-1,2), B(3,4)$.

$$y - 2 = \frac{4-2}{3+1}(x+1) \Longrightarrow x - 2y + 5 = 0.$$

Ángulo entre dos rectas

El ángulo entre dos rectas es el ángulo más pequeño que se forma en su intersección. Si las rectas son paralelas su ángulo es 0. En ambos casos $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Si las rectas tienen pendientes m, m', podemos calcular el ángulo utilizando

$$\tan\theta = \left|\frac{m - m'}{1 + m \cdot m'}\right|$$

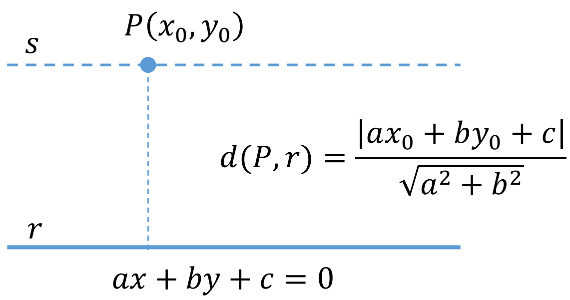
Las rectas son paralelas cuando $m = m'$ y son perpendiculares cuando $mm' = -1$.

Ejercicio. Calcular el ángulo que forma:

a) la recta $y = 0$ con la recta $y = x$.
b) la recta $x = 0$ con la recta $y = x + 1$.

Distancia de un punto a una recta

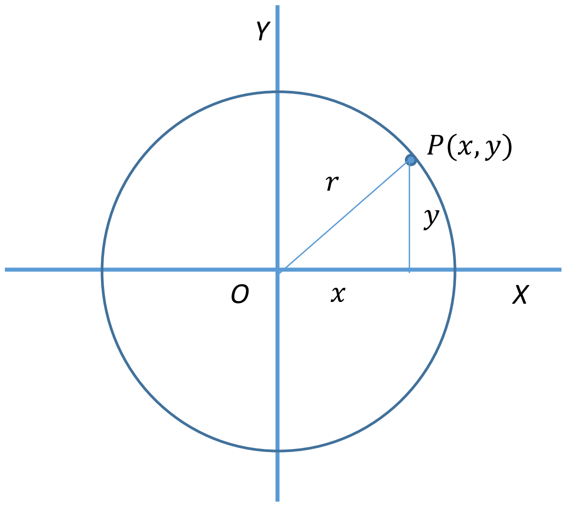
La *distancia de un punto a una recta* es la distancia del punto al pie de la perpendicular trazada por el punto a la recta. La *distancia entre dos rectas paralelas* es la distancia de un punto cualquiera de una de las rectas a la otra recta.



Ejemplo. Calcular la distancia entre las rectas $\left.\begin{array}{l} r:\ 2x - y - 3 = 0 \\ s:\ 2x - y + 1 = 0 \end{array}\right\}$

- Las dos rectas son paralelas porque tienen la misma pendiente.
- El punto $P(0, 1) \in s$.
- $d(r, s) \equiv d(P, r) = \frac{|2\cdot 0 - 1\cdot 1 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}\ u.$

Ecuación de la circunferencia



Circunferencia centrada en el origen y radio r: $x^2 + y^2 = r^2$.

Circunferencia centrada en el punto (a, b) y radio r: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Ejemplos

Ecuación de la circunferencia centrada en el origen y radio 1: $x^2 + y^2 = 1$.

Ecuación de la circunferencia centrada en el origen y radio $\sqrt{3}$: $x^2 + y^2 = 3$.

Ecuación de la circunferencia centrada en el punto $C(0,1)$ y radio 2: $x^2 + (y-1)^2 = 4$.

Ecuación de la circunferencia centrada en el punto $C(-3,3)$ y radio 5: $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 25$.

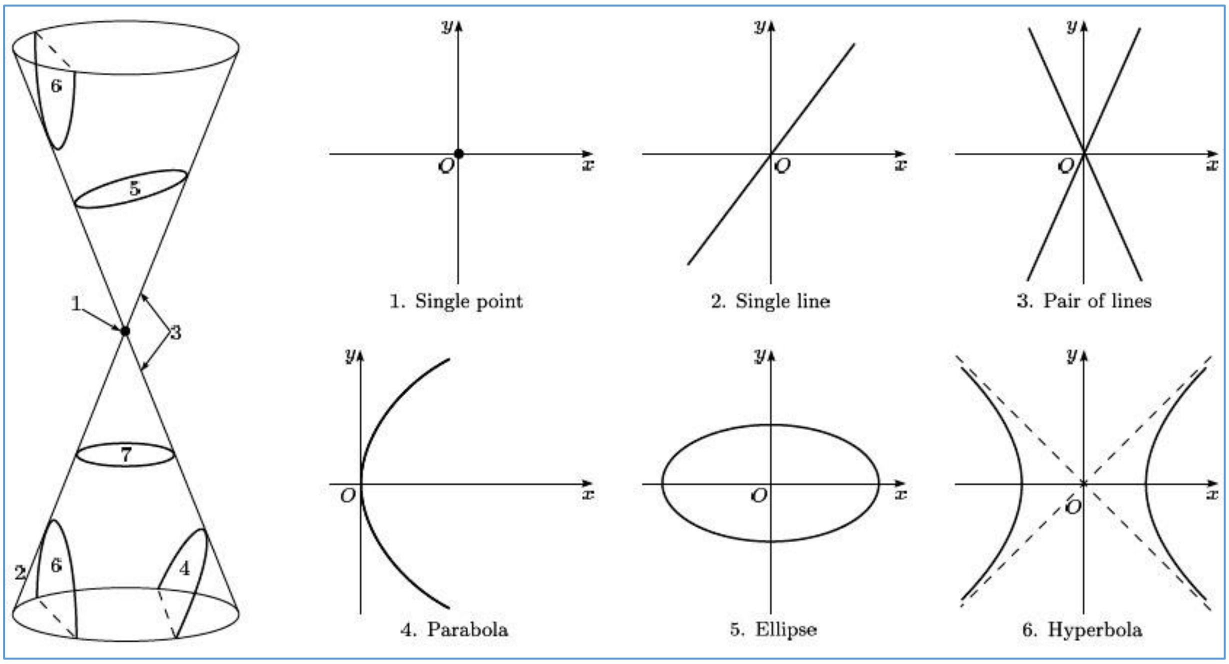
Secciones cónicas

Una ecuación del tipo $F(x, y) = 0$ se representa gráficamente en el plano asignándole a cada par de números (x, y) que verifica la ecuación, el punto del plano con esas mismas coordenadas. La gráfica resultante es una *curva.*

Las curvas más sencillas se obtienen al representar ecuaciones lineales o ecuaciones cuadráticas en dos variables.

- Si representamos una ecuación lineal $ax + by + c = 0$ obtendremos una recta.
- Si representamos una ecuación cuadrática $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ obtendremos una sección cónica.

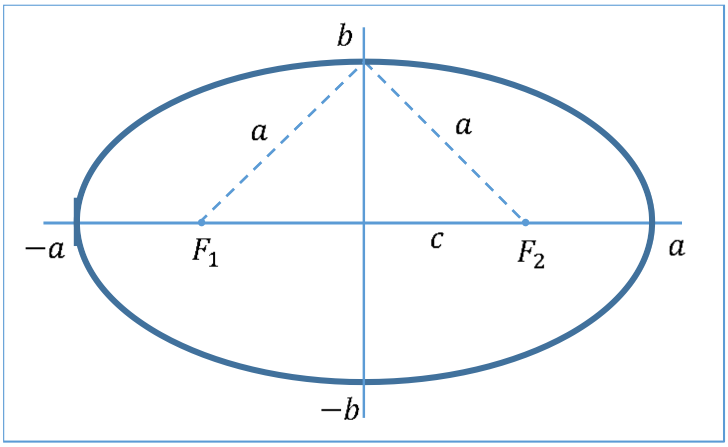
Las *secciones cónicas*, o *cónicas* a secas, son las curvas que se obtienen al intersectar un doble cono con un plano. Los tres tipos principales son la *elipse*, la *hipérbola* y la *parábola*.



Las secciones cónicas

Elipse

Lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos F_1, F_2, llamados *focos*, es una constante $2a$ (mayor que la distancia $2c$ entre los focos).



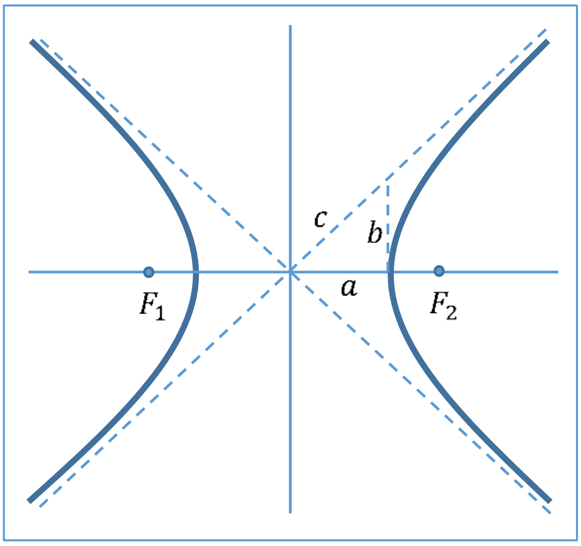
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Semiejes: a, b.
- Excentricidad: $\epsilon = c/a < 1$.
- $c^2 = a^2 - b^2$.
- Cuando los focos coinciden en el origen, $a = b$ y la elipse se reduce a una *circunferencia* de radio a, cuya ecuación es $x^2 + y^2 = a^2$.

Nota. Si situamos los focos en el eje Y, resulta la ecuación $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Hipérbola

Lugar geométrico de los puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos F_1, F_2, llamados *focos*, es una constante $2a$ (menor que la distancia $2c$ entre los focos).



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

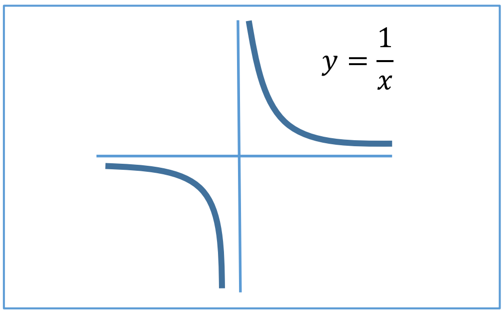
- $c^2 = a^2 + b^2$.
- Excentricidad: $\epsilon = c/a > 1$.
- Asíntotas: $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Nota. Si situamos los focos en el eje Y, resulta la ecuación $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

Hipérbola rectangular

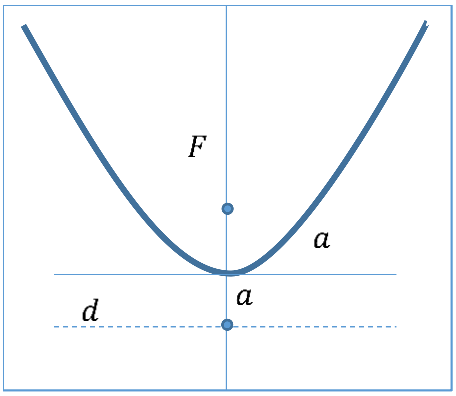
Una hipérbola es *rectangular* cuando sus asíntotas forman un ángulo recto. Cuando $a = b$, la hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$ es rectangular porque sus asíntotas son las rectas perpendiculares $y = \pm x$.

La ecuación de la hipérbola rectangular centrada en el origen y cuyas asíntotas son los ejes coordenados es $xy = a$. En particular, la gráfica de la función $y = 1/x$ es una hipérbola rectangular, cuyas asíntotas son los ejes coordenados.



Parábola

Lugar geométrico de los puntos del plano que están a la misma distancia de una recta fija, llamada *directriz*, y de un punto fijo exterior a la recta, llamado *foco*, situado a una distancia $2a$ de la recta.



$$y = \frac{1}{4a}x^2$$

- *Excentricidad*: siempre 1.
- El *vértice* es el punto más cercano a la directriz.
- El *eje* es la recta perpendicular a la directriz pasando por el foco.
- El *parámetro* es la distancia del foco a la directriz ($p = 2a$).

Nota. Si situamos el foco en el eje X y la directriz paralela al eje Y, la ecuación es $x = \frac{1}{4a}y^2$.

Clasificación de cónicas

Si la ecuación de una cónica carece de términos en xy, podemos eliminar los términos lineales, reducir la ecuación a su forma canónica y averiguar de qué tipo es. El procedimiento se lleva a cabo completando cuadrados.

Ejemplo. Clasificar la cónica $x^2 + 9y^2 + 2x - 36y + 1 = 0$.

1. Reordenamos la ecuación: $x^2 + 2x + 9(y^2 - 4y) = -1$.
2. Completamos cuadrados: $x^2 + 2x + 1 + 9(y^2 - 4y + 4) = -1 + 1 + 36$.
3. Agrupamos los cuadrados: $(x+1)^2 + 9(y-2)^2 = 36$.
4. Nos queda la elipse $\frac{(x+1)^2}{6^2} + \frac{(y-2)^2}{2^2} = 1$.

	Centrada en el origen	Centrada en el punto (x_0, y_0)
Circunferencia	$x^2 + y^2 = r^2$	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
Elipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$
Hipérbola	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$