Universidad de La Laguna

OPEN EDUCATION CONSORTIUM
The Global Network for Open Education

Fundamentos matemáticos para la Ingeniería

Grado en Arquitectura Técnica

Tema 5
Funciones reales de una variable
Derivación de funciones de una variable

José Barrios García

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de La Laguna

jbarrios@ull.es

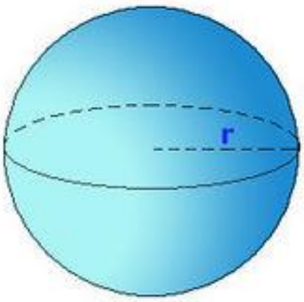
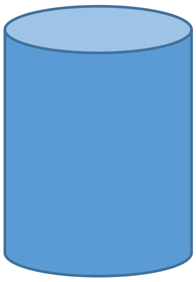
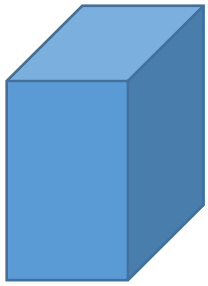
Índice

Tema 5. Funciones reales de una variable. Derivación

Introducción

Las matemáticas tratan de modelar la realidad. En muchas ocasiones necesitamos modelar situaciones en las que una magnitud depende de una o más variables. El concepto básico es el concepto de *función*.

Una *función* entre dos conjuntos de números reales puede entenderse como una regla que asigna a cada número del primer conjunto un número del segundo conjunto. A menudo la regla se define mediante una *fórmula*.

Función de una variable	Función de dos variables	Función de tres variables
$y = f(x)$	$z = f(x, y)$	$w = f(x, y, z)$
		
$V = f(r)$	$V = f(r, h)$	$V = f(x, y, z)$

Funciones de una variable

Dados dos conjuntos de números reales A y B, una *función* f de A en B es una regla que a cada elemento $x \in A$ le asigna un único elemento $y = f(x) \in B$.

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longrightarrow & y = f(x) \end{array}$$

La variable x es la *variable independiente.* La variable y es la *variable dependiente* (su valor depende de x). El conjunto A es el *dominio* de la función. El conjunto B es el *rango* de la función. El conjunto $f(A) = \{f(x) \in B \mid x \in A\} \subseteq B$ es la *imagen* o *recorrido* de la función.

Algunos ejemplos de funciones son

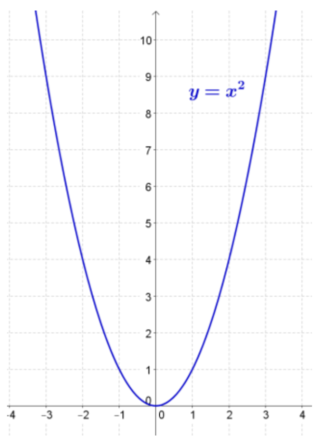
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & 1/x \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f: & [0, \infty) & \longrightarrow & [0, \infty) \\ & x & \longrightarrow & \sqrt{x} \end{array}$$

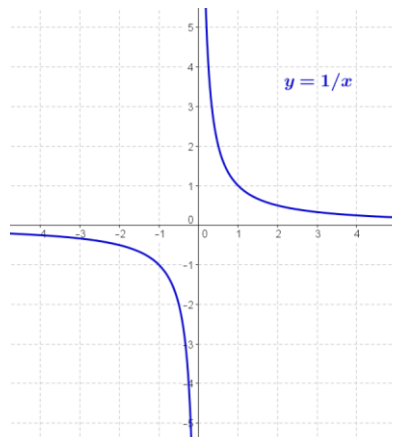
Las siguientes definiciones no representan funciones, ¿por qué?

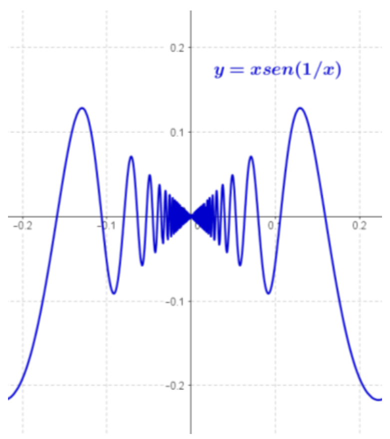
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \sqrt{x} \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} [0,\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \pm\sqrt{x} \end{array}$$

Representación gráfica

Las funciones se representan gráficamente en el plano coordenado asignándole a cada par de números $\big(x, f(x)\big)$ el punto del plano con esas mismas coordenadas.







$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & x^2 \end{array}$	$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}-\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & 1/x \end{array}$	$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}-\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & x\,\mathrm{sen}(1/x) \end{array}$

Otras formas de definir una función

A menudo las funciones se definen simplemente mediante una fórmula. Si no se especifica su dominio, se entiende que su dominio es el *dominio natural* de la función (todos los puntos donde la función está bien definida).

- Sea la función $f(x) = \sqrt{x-1}$. Su dominio natural es el intervalo $[1, \infty)$.
- Sea la función $f(x) = \frac{x-1}{x(x-2)}$. Su dominio natural es el conjunto $\mathbb{R} - \{0, 2\}$.

Otras veces las funciones se definen mediante una tabla de valores o dando una gráfica. Por ejemplo, la función dada mediante la tabla de valores

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	3	0	-1	2	-5	0

Las *funciones definidas a trozos* son funciones que se definen de forma diferente en trozos o intervalos diferentes de la recta. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < -1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 \le x \le 1 \\ 1-x & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

La función valor absoluto se define a trozos como sigue

$$|x| = \begin{cases} x, x \ge 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

Función identidad

La función identidad sobre un conjunto A, es la función:

$$\begin{array}{llll} 1_A\colon & A & \longrightarrow & A \\ & x & \longrightarrow & x \end{array}$$

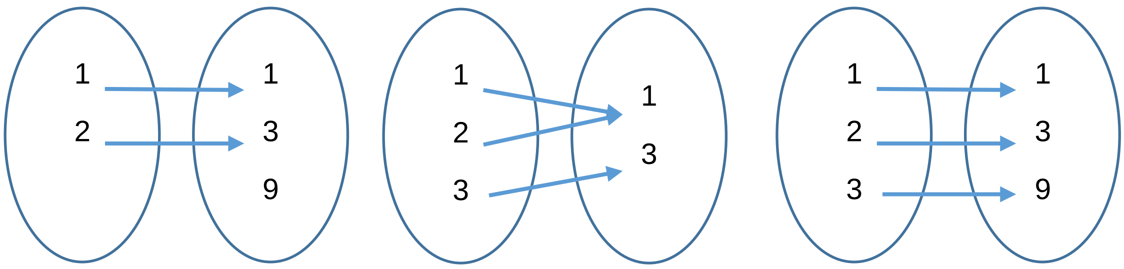
Algunos tipos de funciones

Sean A, B subconjuntos de $\mathbb{R}$, diremos que una función $f\colon A \longrightarrow B$ es

Correspondencia

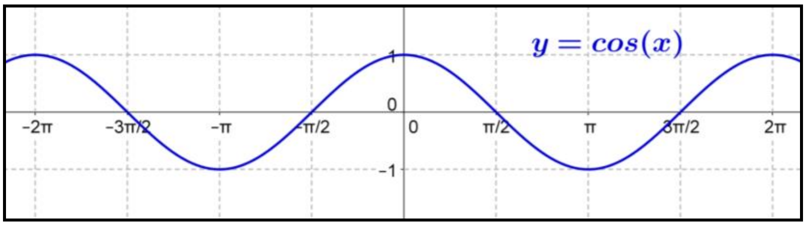
1. Inyectiva, si envía elementos distintos a imágenes distintas $\big(x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)\big)$.
2. Sobreyectiva, si todos los elementos de B tienen original $(f(A) = B)$.
3. Biyectiva, si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Ejercicio. Determinar qué tipo de correspondencia muestran las siguientes funciones.

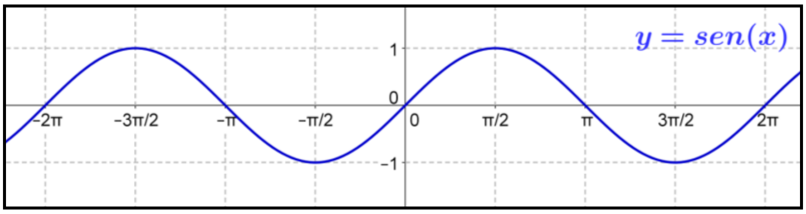


Simetría

4. Par, si $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in A$ (gráfica simétrica respecto al eje Y).



5. Impar, si $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in A$ (gráfica simétrica respecto al origen).



Operaciones con funciones

Dadas dos funciones f y g definidas sobre un mismo dominio, definimos las funciones:

- $f + g$ como $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
- $f - g$ como $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$.

- $f \cdot g$ como $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
- f/g como $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$, siempre que $g(x) \neq 0$.

Ejemplo. Sean $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = x^2 - 1$.

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (3x-2) + (x^2-1) = x^2 + 3x - 3$.
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (3x-2) - (x^2-1) = -x^2 + 3x - 1$.
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (3x-2) \cdot (x^2-1) = 3x^3 - 2x^2 - 3x + 2$.
- $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x-2}{x^2-1}$.

Composición de funciones

Dadas las funciones $f: A \longrightarrow B, g: B \longrightarrow C$, su *función compuesta* es la función $g \circ f: A \longrightarrow C$ definida por $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

$$g \circ f: \overbrace{\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & g(f(x)) \end{array}}^{g\circ f}$$

En general, la composición de funciones no es una operación conmutativa.

Ejemplo. Sean las funciones $f(x) = 1/x\,, g(x) = x + 1$.

- $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(1/x\,) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{x+1}{x}$.
- $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x+1) = \frac{1}{x+1}$.

Notación. Para la composición de funciones se emplea la siguiente notación:

$$f^2 = f \circ f \qquad f^3 = f \circ f \circ f \qquad f^n = f \circ f \circ \overset{\lfloor n}{\cdots} \circ f$$

Función inversa

Si $f: A \to B$ es una función biyectiva, su *función inversa* es la función $f^{-1}: B \to A$ que devuelve los elementos de B a sus originales en A.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{f^{-1}} & A \\ x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & x \end{array}$$

La inversa de f es la única función que compuesta con f a izquierda y derecha nos proporciona la identidad. Es decir, es la única función que verifica $f^{-1} \circ f = 1_A$ y $f \circ f^{-1} = 1_B$.

Cálculo de la función inversa

Para calcular la inversa de una función $f(x)$:

- Escribimos $y = f(x)$.
- Despejamos x en función de y (si es posible),
- Intercambiamos las variables x e y.

Ejemplo. Calcular la inversa de $f(x) = 3x - 2$ y comprobar que $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = 1_{\mathbb{R}}$.

- $y = 3x - 2 \Rightarrow x = \frac{y+2}{3}$.

- Intercambiando las variables, obtenemos la función inversa $y = \frac{x+2}{3}$, o bien, $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$.

Comprobación

- $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x-2) = \frac{(3x-2)+2}{3} = x$.
- $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+2}{3}\right) = 3\left(\frac{x+2}{3}\right) - 2 = x$.

Ejemplo. Hallar la inversa de la función $f(x) = x^2$.

- $y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$.

La inversa no está definida porque $f(x) = x^2$ no es una función biyectiva.

- Si restringimos su dominio al intervalo $[0, \infty)$, su inversa es $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
- Si restringimos su dominio al intervalo (-∞, $0]$, su inversa es $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

Gráfica de la función inversa

Las gráficas de dos funciones inversas son simétricas respecto de la recta $y = x$, porque si un punto (a, b) pertenece a una de las gráficas, el punto (b, a) pertenece a la otra.

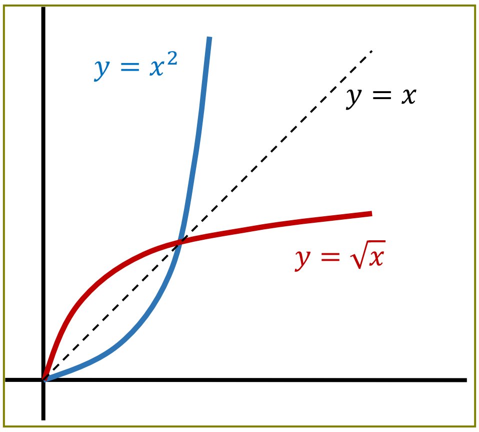


Figura 1. Gráfica de la función inversa.

Funciones algebraicas

En general, las funciones que utilizaremos a lo largo del curso serán las *funciones algebraicas,* las *funciones trascendentes* elementales y sus posibles combinaciones.

Una función algebraica es una función construida a partir de la variable independiente utilizando un número finito de operaciones elementales (suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación). Las funciones algebraicas se dividen en *polinomios*, *funciones racionales* (cociente de polinomios) y *funciones irracionales* (aparecen raíces de la variable).

$y = ax + b$	$y = 1/x$	$y = 1/x^2$	$y = \sqrt{x}$	$y = \lvert x \rvert$
$y = ax^2 + bx + c$	$y = \dfrac{1}{x-a}$	$y = \dfrac{1}{(x-a)^2}$	$y = \sqrt{x-a}$	$y = \lvert x - a \rvert$

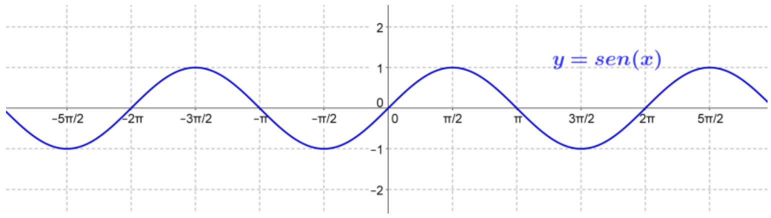
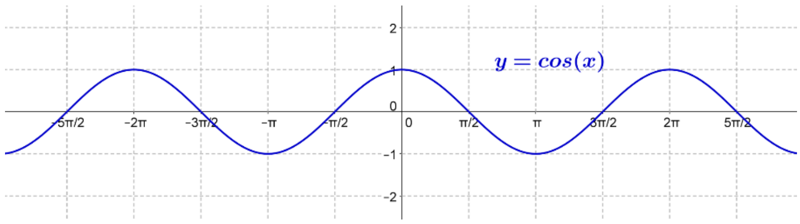
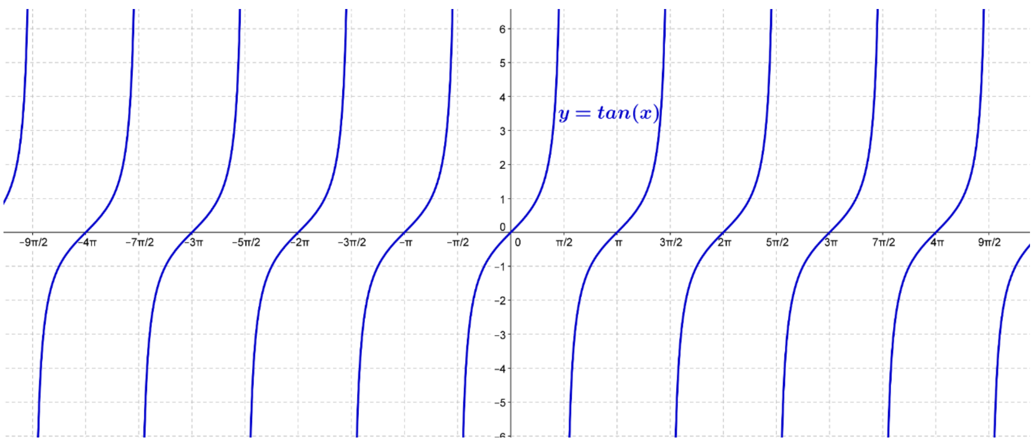
Tabla 1. Algunas funciones algebraicas elementales

Funciones trascendentes

Las funciones que no son algebraicas se denominan *trascendentes*. Las funciones trascendentes elementales son las funciones *trigonométricas*, las funciones *trigonométricas inversas*, las funciones *exponenciales* y las funciones *logarítmicas*.

Funciones trigonométricas

Funciones de ángulos (medidos en radianes) importantes para el estudio de los triángulos y el modelado de fenómenos periódicos. Se definen a partir de las razones de diversos segmentos rectilíneos en el círculo unidad.

<table>
<tr><td>$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longrightarrow & \operatorname{sen} x \end{array}$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longrightarrow & \cos x \end{array}$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}_{k\in\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \tan x \end{array}$$</td></tr>
</table>

Funciones derivadas de las anteriores

secante	cosecante	cotangente
$\sec x = 1/\cos x$	$\csc x = 1/\operatorname{sen} x$	$\cot x \; = 1/\tan x$

Funciones trigonométricas inversas

arcoseno	arcocoseno	arcotangente
$\begin{array}{llll} f: & [-1,1] & \longrightarrow & [-\pi/2,\pi/2] \\ & x & \longrightarrow & \operatorname{asen} x \end{array}$	$\begin{array}{llll} f: & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ & x & \longrightarrow & \operatorname{acos} x \end{array}$	$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & (-\pi/2,\pi/2) \\ & x & \longrightarrow & \operatorname{atan} x \end{array}$

Uso de la calculadora

Cuando usemos las funciones trigonométricas inversas para calcular un ángulo debemos tener en cuenta que siempre hay dos ángulos en la circunferencia con el mismo seno, el mismo coseno o la misma tangente. La calculadora solo nos proporciona uno de los dos ángulos posibles. Si es necesario el otro ángulo, debemos calcularlo en la circunferencia trigonométrica.

Funciones exponenciales

Funciones importantes para modelar fenómenos que crecen/decrecen muy rápidamente. Si a es un número estrictamente positivo y distinto de la unidad, se define la *función exponencial de base* a como $\exp_a(x) = a^x$.

$$\begin{array}{llll} \exp_a: & \mathbb{R} & \to & (0,\infty) \\ & x & \mapsto & a^x \end{array}$$

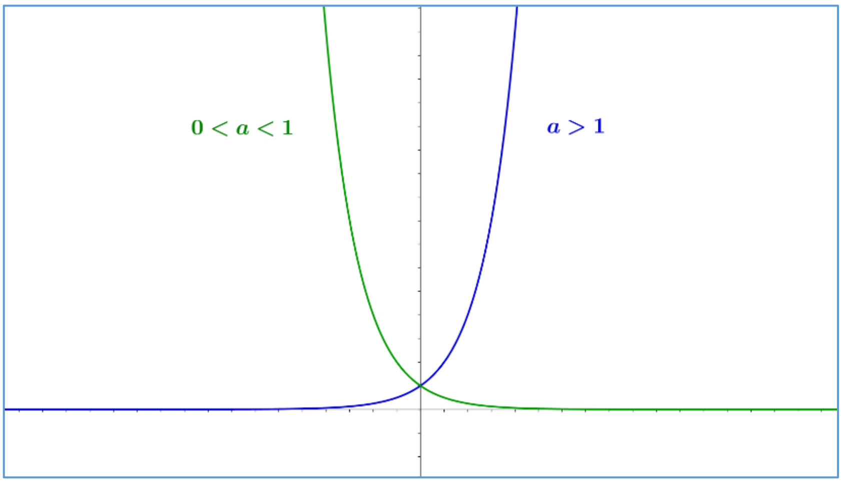


Figura 2. Gráfica de la función $y = a^x$.

Su gráfica difiere según la base sea mayor o menor que la unidad. La base más utilizada por sus importantes propiedades es el número e, de forma que cuando no se explicita la base se entiende $\exp(x) = e^x$. Entre sus propiedades (análogas para cualquier otra base) destacan:

- $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$.
- $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.
- $\exp(x - y) = \exp(x)/\exp(y)$.

Nota. Si a es negativo la función exponencial no está bien definida: $(-2)^{1/2} = \sqrt{-2}$.

Ejercicio. Calcular las distintas aproximaciones sucesivas de 2^π: $2^3 \longrightarrow 2^{3.1} \longrightarrow 2^{3.14} \longrightarrow 2^\pi$.

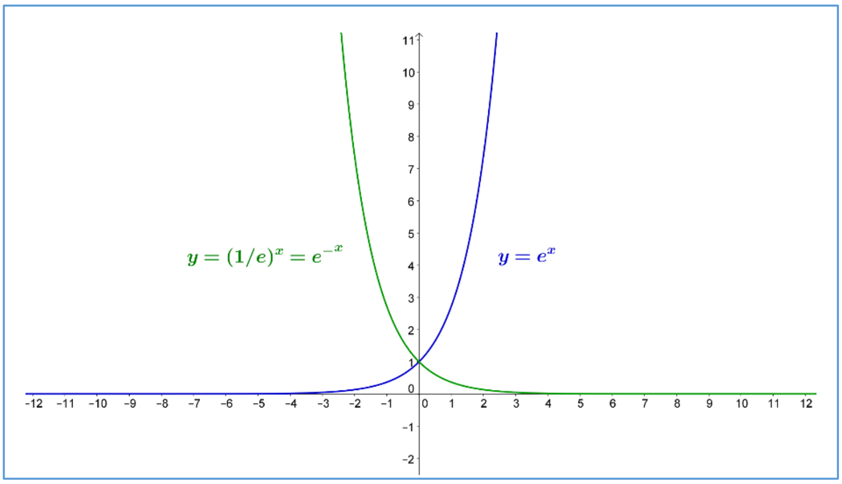


Figura 3. Gráfica de la función $y = e^x$.

Funciones logarítmicas

Funciones importantes para modelar fenómenos que crecen/decrecen muy lentamente. La función logarítmica de base a $(a > 0, a \neq 1)$ es la función inversa de la función exponencial con la misma base. Es decir $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$.

$$\begin{array}{rccc} \log_a: & (0,\infty) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \log_a x \end{array}$$

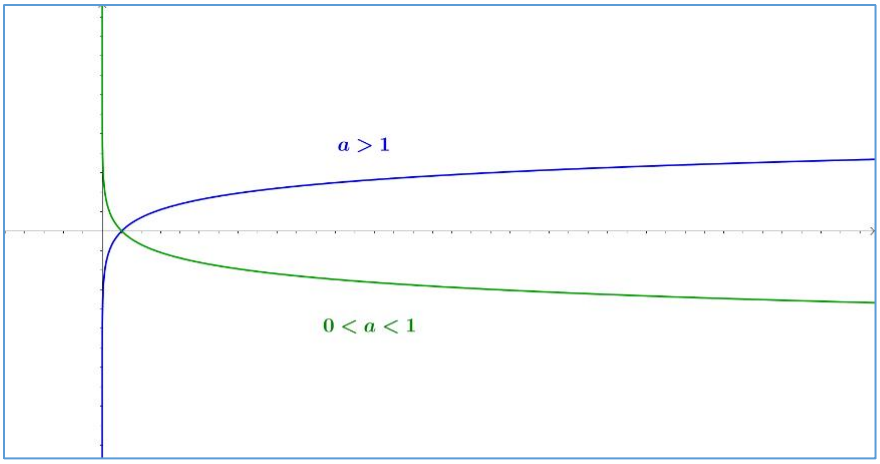


Figura 4. Gráfica de la función $y = log_a x$.

Su gráfica difiere según la base sea mayor o menor que la unidad. Las funciones logarítmicas más utilizadas son el *logaritmo decimal* $(\log x)$ y, muy especialmente, el *logaritmo neperiano* $(\ln x)$. Entre sus propiedades (análogas para cualquier otra base) destacan:

- $\ln(1) = 0, \ln(e) = 1$.
- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
- $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$.
- $\ln(x^y) = y \ln(x)$.
- $\ln(\sqrt[y]{x}) = \frac{1}{y}\ln(x)$.

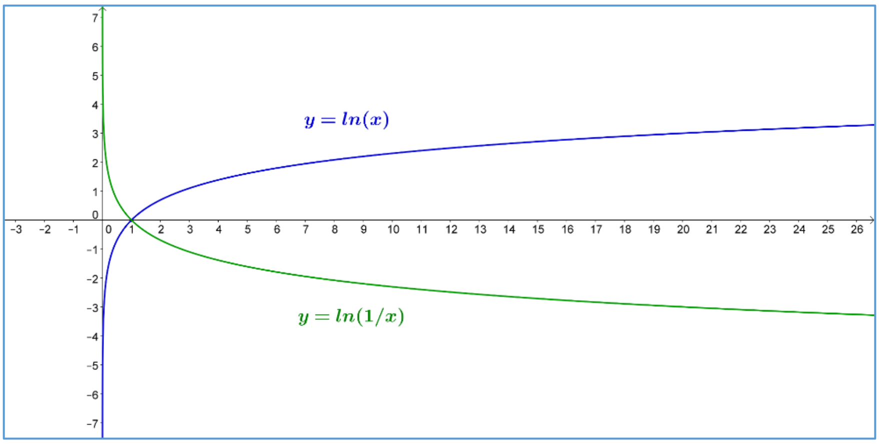


Figura 5. Gráfica de la función $y = ln(x)$.

Dado que las funciones logarítmicas y exponenciales son funciones inversas, se tiene:

- $e^{\ln x} = x$.
- $\ln(e^x) = x$.

Otras funciones trascendentes

- $f(x) = x^\pi = e^{\pi \ln x}$.
- $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$.
- $f(x) = x^{1/x} = e^{\frac{\ln x}{x}}$.

Funciones implícitas

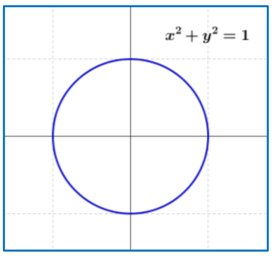
Hasta el momento hemos considerado únicamente funciones definidas mediante una fórmula explícita

$$y = f(x)$$

Sin embargo, muchas veces resulta conveniente definir las funciones de forma implícita, es decir, mediante una ecuación del tipo:

$$F(x, y) = 0$$

Donde y puede despejarse, al menos localmente, en función de x. En este caso, la gráfica de $f(x)$ coincide, al menos en parte, con la curva definida por la ecuación $F(x, y) = 0$.



Ejemplo. La gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ proporciona los puntos de la circunferencia de radio 1 centrada en el origen. Si despejamos y en función de x, obtenemos dos posibles funciones

- $y = +\sqrt{1 - x^2}$ (representación gráfica: semicircunferencia superior).
- $y = -\sqrt{1 - x^2}$ (representación gráfica: semicircunferencia inferior).

En este sentido, diremos que la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ es una función implícita de y, es decir, define implícitamente a cualquiera de las dos funciónes explícitas obtenidas.

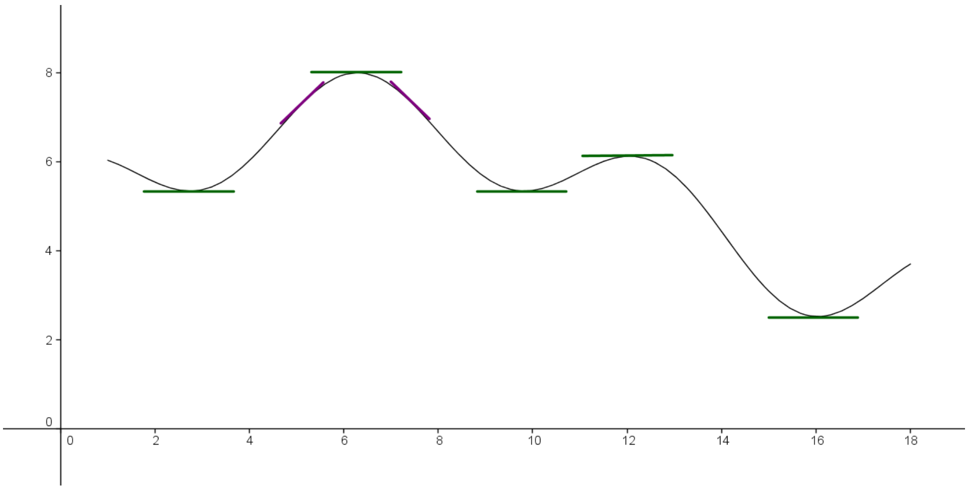
Nota. Toda función explícita puede escribirse de forma implícita. Por ejemplo, $y = x + 1$ puede escribirse como $x - y + 1 = 0$.

Por otra parte, cuando la función implícita es sencilla se puede despejar la variable dependiente y expresarla en forma explícita. Por ejemplo, la función implícita $x(y + 1) - 1 = 0$ puede escribirse de forma explícita como $y = \frac{1-x}{x}$.

Derivación de funciones de una variable

Introducción

De forma intuitiva, diremos que una función es *continua en un punto*, si la gráfica de la función no se rompe en dicho punto. De la misma forma, diremos que una función es *continua en un intervalo* si su gráfica no se rompe en ningún punto del intervalo. En este sentido, una forma efectiva de estudiar una función continua consiste en estudiar el comportamiento de la tangente a la curva.



En efecto:

- En los puntos donde la tangente tiene pendiente positiva, la función crece.
- En los puntos donde la tangente tiene pendiente negativa, la función decrece.
- En los puntos donde la tangente tiene pendiente cero (está horizontal), puede haber un extremo (máximo o mínimo)

Por otra parte, tal y como muestra el gráfico,

- la tangente es una buena aproximación de la curva en los alrededores del punto de tangencia, lo que nos permite simplificar mucho determinados cálculos.

Precisamente, buena parte de la potencia del Cálculo se debe a que calcular la tangente a una curva es un proceso bastante sencillo y debidamente automatizado. El proceso consiste básicamente en, dada una función $y = f(x)$, obtener o *derivar* de ella (de manera mecánica) una nueva función $f'(x)$, que nos indica en cada punto cuánto vale la pendiente de la recta tangente a la curva original $y = f(x)$ en ese punto. Tanto los puntos extremos de la función como los intervalos de crecimiento y decrecimiento, se obtienen estudiando el signo de la función derivada y los puntos donde se anula.

Nota

Debido a las limitaciones del tiempo de que disponemos, en lo que sigue de curso nos limitaremos a considerar funciones que se obtengan a partir de las funciones algebraicas y de las funciones trascendentes elementales utilizando las operaciones elementales y la composición de funciones. Una propiedad importante de todas estas funciones es que son funciones continuas en todo su dominio.

Salvo el caso de la función valor absoluto, descartaremos el estudio de funciones definidas a trozos, que, a fin de cuentas, se reduce en cada trozo al estudio de las funciones que proponemos, sin más que añadir al estudio los puntos donde *empatan* estas funciones.

Tangente a una curva

Para calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(x, y)$ necesitamos conocer la pendiente de la recta. Para ello, tomamos un punto cercano Q de abscisa $x + h$ y trazamos la recta secante $\overline{PQ}$. A medida que el punto Q se acerca al punto P la recta secante se convierte en la recta tangente. Como la pendiente de la recta secante $\overline{PQ}$ vale

$$\tan \alpha = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Se define la *recta tangente* en el punto como la recta que pasa por dicho punto y tiene pendiente

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

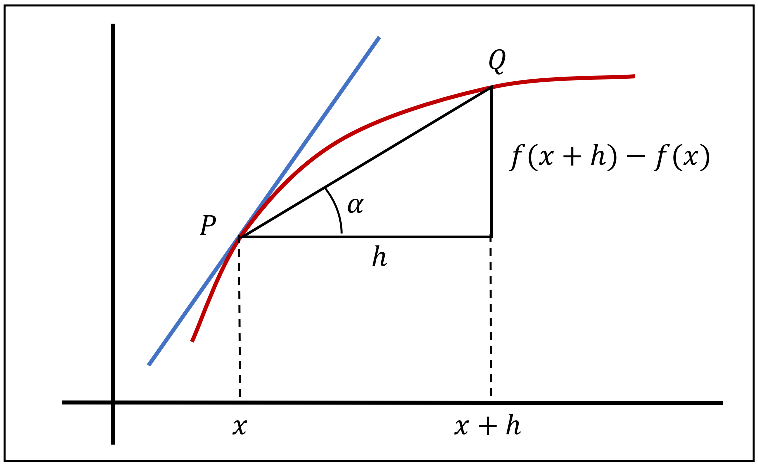


Figura 6. Cálculo de la tangente a una curva.

Ejemplo. Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$.

- $m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (4 + h) = 4.$
- La ecuación de la recta tangente es $y - 4 = 4(x - 2) \Longrightarrow y = 4x - 4.$

Ejemplo. Hallar la ecuación de la recta tangente a la recta $y = x$ en el punto de abscisa $x = 1$.

- $m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1+h-1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1.$
- La ecuación de la recta tangente es $y - 1 = 1(x - 1) \Longrightarrow y = x.$

Ejemplo. Hallar la ecuación de la recta tangente a la cúbica $f(x) = x^3$ en el punto de abscisa $x = 0$.

- $m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h^3 - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} h^2 = 0.$
- La ecuación de la recta tangente es $y - 0 = 0(x - 0) \Longrightarrow y = 0.$

Ejemplo. Hallar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

- $m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty.$
- Si observamos la gráfica de la función vemos que la recta tangente es $x = 0.$

Tal y como se desprende de estos ejemplos

- La tangente a una recta en un punto es la propia recta.
- La tangente a una curva puede cortar a la curva en uno, varios o infinitos puntos.
- La tangente puede atravesar la curva en el punto de tangencia.

Curvas sin tangente

Es fácil ver que, si una función no es continua en un punto, la función no tiene tangente en ese punto. No obstante, hay casos en que la función es continua en un punto y, sin embargo, no tiene tangente. Normalmente, esto sucede cuando la gráfica de la función forma un *pico* en el punto en cuestión (su gráfica no es suficientemente redondeada en los alrededores del punto). El ejemplo estándar lo proporciona la función valor absoluto en el origen de coordenadas.

Ejemplo. La gráfica de la función $y = |x|$ no tiene tangente en el punto $x = 0$.

En efecto, al calcular m, obtenemos $m = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} +1 & \text{cuando} \quad h \to 0^+ \\ -1 & \text{cuando} \quad h \to 0^- \end{cases}$

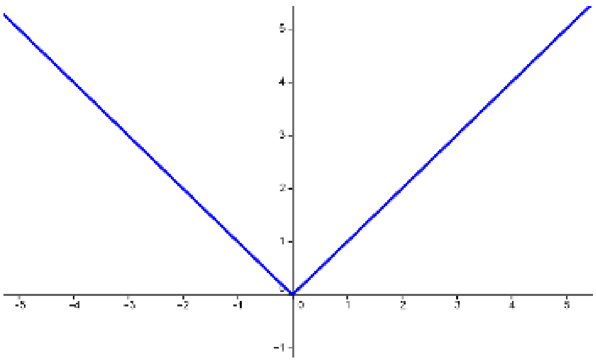


Figura 7. Gráfica de la función $y = |x|$.

Función derivada

Para poder construir una función que nos proporcione la pendiente de la recta tangente a la función original en cada punto debemos evitar dos tipos de puntos

- Puntos sin tangente (la pendiente no existe)
- Puntos con tangente vertical (la pendiente es infinita)

Por ello, diremos que una función es *derivable* en un punto si la pendiente de la recta tangente en ese punto existe y es finita. En este caso, la pendiente de la recta tangente en el punto se llamará *derivada* de la función en el punto y la escribiremos $f'(x)$.

Definición. Sea f una función derivable en un intervalo, su *función derivada primera* es la función f' que a cada punto del intervalo le asocia el valor

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si la función f' es derivable en el intervalo, se define la *función derivada segunda* de f como la función f''que a cada punto del intervalo le asocia el valor:

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Procediendo análogamente se definen las derivadas sucesivas de f de orden $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, denotadas por $f^{n)}$.

Teorema 1. *f derivable en un punto (o en un intervalo) $\Rightarrow f$ continua en el punto (o en el intervalo).*

Diferencial de una función

Como hemos señalado, la tangente a una curva en un punto es una buena aproximación a la función en los alrededores del punto.

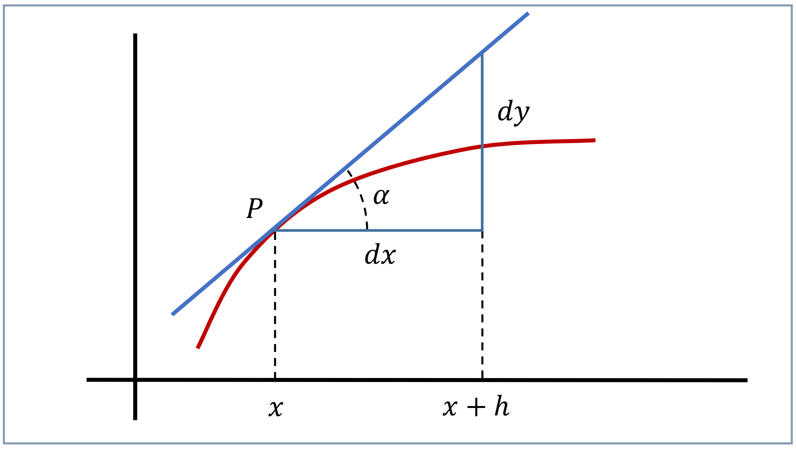


Figura 8. Diferencial de una función

De manera que, definiendo dx y dy como se indica en la figura, resulta $\frac{dy}{dx} = \tan\alpha = f'(x)$. O bien,

$$dy = f'(x)\,dx$$

La cantidad variable $dy = f'(x)\,dx$ se denomina *diferencial* de la función en el punto x, y resulta una buena aproximación al verdadero incremento de la función en los alrededores del punto. Es decir

$$dy \cong f(x+h) - f(x)$$

Notación diferencial

Este hecho está en el origen de la notación diferencial de la derivada, según la cual, la derivada de la función $y = f(x)$ podemos escribirla como dy/dx, o bien, como df/dx. Es importante destacar que la notación dy/dx tiene un carácter ambivalente.

- Por una parte, podemos entenderla como un símbolo único e inseparable que representa, simplemente, la derivada $y'(x)$ de la función. Por ejemplo, si $y = x^3$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2.$$

- Por otra parte, podemos entenderla como un cociente de dos cantidades distintas, *diferencial de x*, y *diferencial de y*, de forma que $\frac{dy}{dx} = y'(x)$. Lo que, en el caso anterior, nos permite escribir

$$dy = 3x^2\,dx$$

En los temas 7 y 8 interpretaremos dy/dx en ambos sentidos, según sea más conveniente.

Nota. El concepto de diferencial es extremadamente sutil y su elaboración completa desborda los límites de este curso. Una explicación detallada puede verse aquí

Derivada de las funciones elementales

A continuación, presentamos las funciones derivadas de las funciones elementales. Nótese que el dominio de la función derivada puede no coincidir con el dominio de la función primitiva.

$x^n \to n\, x^{n-1}$	$\sqrt[n]{x} \to \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\operatorname{sen} x \to \cos x$	$\operatorname{asen} x \to \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$e^x \to e^x$	$a^x \to a^x \ln a$	$\cos x \to -\operatorname{sen} x$	$\operatorname{acos} x \to \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x \to \dfrac{1}{x}$	$\log_a x \to \dfrac{1}{x \ln a}$	$\tan x \to \sec^2 x$	$\operatorname{atan} x \to \dfrac{1}{1+x^2}$

Tabla 2. Derivada de las funciones elementales.

Ejemplos

- $f(x) = x^4 \Longrightarrow f'(x) = 4x^3$.
- $f(x) = 3^x \Longrightarrow f'(x) = 3^x \ln 3$.
- $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{3}\, x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}\, x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Cálculo de la derivada

Sean f, g funciones derivables en los intervalos apropiados y k un número real. Entonces las siguientes funciones son derivables en los intervalos apropiados, y sus derivadas son:

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$.
- $(kf)' = kf'$.
- $(f \cdot g)' = f'g + fg'$.
- $(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, siempre que $g(x) \neq 0$.

Ejemplos

- $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 2x - 1 \Longrightarrow f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 10x + 2$.
- $f(x) = \frac{x^2-2}{x+1} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2x\cdot(x+1)-(x^2-2)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$.

Regla de la cadena

- $(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$. Como aplicación, se obtiene la siguiente tabla.

$u^n \to n\,u^{n-1}\,u'$	$\sqrt[n]{u} \to \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$\operatorname{sen}(u) \to \cos(u)\ u'$	$\operatorname{asen} u \to \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$e^u \to e^u\,u'$	$a^u \to a^u \ln a\ u'$	$\cos(u) \to -\operatorname{sen}(u)\,u'$	$\operatorname{acos} u \to \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\ln(u) \to \dfrac{u'}{u}$	$\log_a u \to \dfrac{u'}{u \ln a}$	$\tan(u) \to \sec^2(u)\ u'$	$\operatorname{atan} u \to \dfrac{u'}{1+u^2}$

Tabla 3. Derivada de las funciones elementales, siendo $u = u(x)$.

Ejemplos

- $f(x) = \operatorname{sen}^2(x) \to$ Se deriva como una función de la forma: u^n.
- $f(x) = \operatorname{sen}(x^2) \to$ Se deriva como una función de la forma: $\operatorname{sen}(u)$.

Derivada de la función inversa

Como consecuencia de la regla de la cadena, si f posee inversa y $f'(x) \neq 0$ en un intervalo, entonces f^{-1} es derivable en el intervalo y $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Demostración

$$(f{\circ}f^{-1})'(x) = (x)' \Rightarrow f'\big(f^{-1}(x)\big) \cdot (f^{-1})'(x) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}.$$

Ejemplo. Calcular la derivada de la función $\operatorname{asen}(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \operatorname{sen} x \\ f^{-1}(x) = \operatorname{asen} x \end{array}\right\} \Longrightarrow \operatorname{asen}'(x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{asen} x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\operatorname{asen} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Interpretación de la derivada

La derivada de una función puede interpretarse de formas diferentes, según el contexto en que estemos trabajando. Entre las más importantes, cabe señalar que la derivada de una función en un punto nos proporciona:

- La pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.
- La velocidad instantánea del móvil en ese punto.
- En general, la tasa de cambio instantáneo de la función en ese punto.

Interpretación geométrica

La derivada de una función en un punto nos proporciona la pendiente de la recta tangente en ese punto. Ello nos permite calcular fácilmente la ecuación de la *recta normal* a la función en el punto (recta perpendicular a la tangente en el punto) y el *ángulo que forman dos curvas al cortarse* (ángulo que forman sus tangentes en dicho punto).

- Ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto (x_0, y_0),

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

- Ecuación de la recta normal a la curva $y = f(x)$ en el punto (x_0, y_0),

$$\left.\begin{array}{ll} y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) & f'(x_0) \neq 0 \\ x = x_0 & f'(x_0) = 0 \end{array}\right\}$$

- Ángulo θ que forman dos curvas f y g en el punto de corte (x_0, y_0).

$$\tan\theta = \left|\frac{m - m'}{1 + m \cdot m'}\right| = \left|\frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)}\right|$$

Naturalmente, si $1 + f'(x_0)g'(x_0) = 0$ las rectas tangentes son perpendiculares en el punto de corte, y las curvas se dicen *ortogonales* en ese punto (se cortan perpendicularmente).

Ejercicio. Calcular las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la parábola $f(x) = x^2 - 1$ en sus puntos de corte con el eje X.

Ejercicio. Calcular los ángulos que forman las curvas $f(x) = x^2 - x + 1$ y $g(x) = 4 - x^2$ en sus puntos de corte.

Derivación de funciones implícitas

Si la función viene dada forma implícita mediante una expresión $F(x, y) = 0$, podemos obtener su derivada en forma implícita. Para ello, derivamos término a término la expresión con respecto a x, teniendo en cuenta que y es una función de x (regla de la cadena).

En general, la derivada implícita calcula la pendiente de la recta tangente en función de las dos coordenadas (x, y) del punto. Por el contrario, la derivada explícita calcula la pendiente en función de la abscisa x del punto.

Ejemplo. La ecuación de la circunferencia unidad es $x^2 + y^2 = 1$. Derivando implícitamente obtenemos

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -x/y$$

De forma que las pendientes, m y m', de las rectas tangente y normal en cada punto de la circunferencia vienen dadas por

$$\begin{array}{c} m = -x/y \\ m' = y/x \end{array}$$

Así, por ejemplo

a) Pendiente de la recta tangente en el punto $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$: $m = -\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = -1$.
b) Pendiente de la recta normal en el mismo punto: $m' = -1/m = 1$.
c) Puntos con tangente horizontal:

$$m = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow \; P(0,1), P(0,-1).$$

d) Puntos con tangente vertical: puntos donde la recta normal está horizontal.

$$m' = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow P(1,0), P(-1,0).$$

Ejemplo. Derivar la ecuación de la hipérbola $xy = 1$, de forma implícita y de forma explícita.

e) De forma implícita, $xy = 1 \Rightarrow y + xy' = 0 \Rightarrow y' = -y/x$.

f) De forma explícita, $y = 1/x \Rightarrow y' = -1/x^2$.

Ejemplo. Derivar implícitamente la función $3x^2y - 6xy^3 + 7 = 0$.

$$6xy + 3x^2y' - 6y^3 - 18xy^2y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{2y^3 - 2xy}{x^2 - 6xy^2}$$

Ejercicio. Calcular las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $x^2 + 3xy + y^2 + 1 = 0$ en el punto $P(-1, 2)$.

Ejercicio. Demostrar que la elipse $4x^2 + 9y^2 = 45$ y la hipérbola $x^2 - 4y^2 = 5$ son ortogonales.