Fundamentos matemáticos para la Ingeniería

Grado en Arquitectura Técnica

Tema 6
Aplicaciones de la derivada. Cálculo de extremos y problemas de optimización

José Barrios García

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de La Laguna

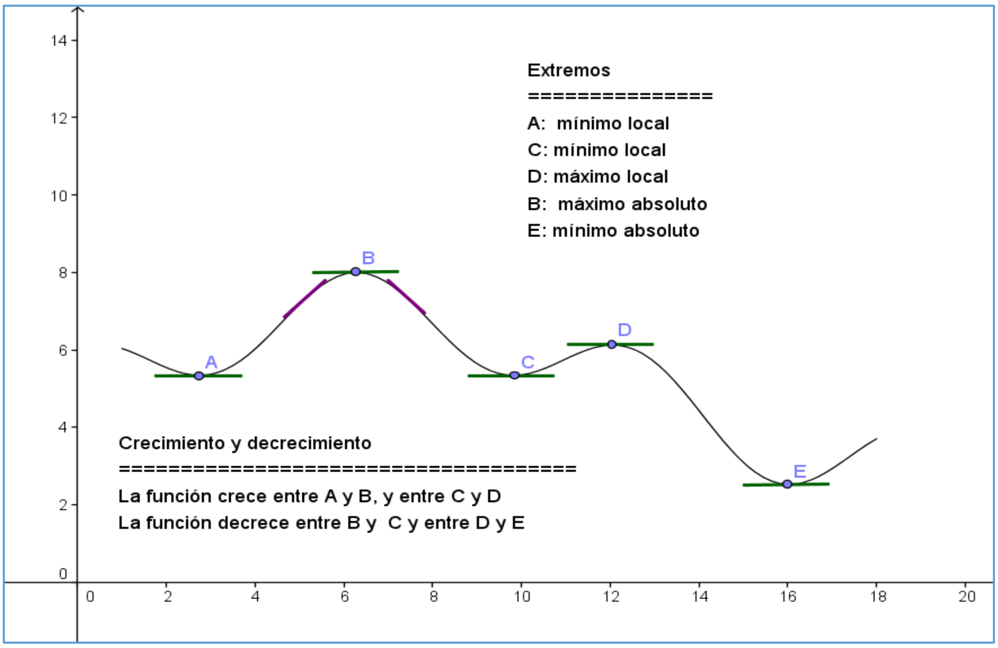
jbarrios@ull.es

Índice

Tema 6. Aplicaciones de la derivada

Introducción

En la primera parte del tema veremos los métodos básicos para estudiar el comportamiento de las funciones de una variable que estudiamos en este curso (ver tema 5). Nos interesa determinar los intervalos donde la función crece, los intervalos donde la función decrece, así como los puntos donde la función alcanza sus valores máximos y mínimos. La herramienta básica será la posición de la recta tangente, estudiada mediante de la derivada de la función.



Crecimiento y decrecimiento

Sea f una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, diremos que:

- f es creciente en el intervalo $\Leftrightarrow \forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- f es decreciente en el intervalo $\Leftrightarrow \forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- f es estrictamente creciente en el intervalo $\Leftrightarrow \forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- f es estrictamente decreciente en el intervalo $\Leftrightarrow \forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

Estudiar el *crecimiento* y el *decrecimiento* de la función consiste en determinar los intervalos en los que la función crece o decrece. Para ello se procede de la siguiente manera.

1. Se calculan los puntos del dominio en que f no es derivable.
2. Se calculan los puntos singulares de f (puntos del dominio que anulan la derivada primera).
3. Los puntos singulares y los puntos en que f no es derivable dividen el dominio de la función en varios subintervalos.
4. Se estudia el signo de f' en cada uno de dichos subintervalos.

- $f'(x) > 0$ en un subintervalo $\Rightarrow f$ estrictamente creciente en dicho subintervalo.
- $f'(x) < 0$ en un subintervalo $\Rightarrow f$ estrictamente decreciente en dicho subintervalo.

Extremos de una función

Sea f una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y sea x_0 un punto del intervalo I, diremos que:

- f tiene un máximo absoluto en $x_0 \Leftrightarrow f(x_0) \geq f(x)$ para todo x perteneciente a I.
- f tiene un mínimo absoluto en $x_0 \Leftrightarrow f(x_0) \leq f(x)$ para todo x perteneciente a I.
- f tiene un máximo relativo en $x_0 \Leftrightarrow f(x_0) \geq f(x)$ para todo x en algún un entorno abierto de x_0 contenido en I.
- f tiene un mínimo relativo en $x_0 \Leftrightarrow f(x_0) \leq f(x)$ para todo x en algún un entorno abierto de x_0 contenido en I.

Calcular los *extremos* (*absolutos o relativos*) de una función consiste en determinar los puntos en los que la función alcanza sus valores máximos y mínimos (absolutos o relativos).

Cálculo de los extremos relativos

Los extremos relativos de la función se encuentran entre los siguientes puntos:

- Puntos singulares de f.
- Puntos en que f no es derivable.
- Puntos extremos del intervalo I (si pertenecen al dominio de la función).

Los puntos en que f no es derivable y los puntos extremos del intervalo deben estudiarse de forma individual, comprobando, uno a uno, si son, o no, extremos.

Los puntos singulares pueden estudiarse con la derivada primera o con la derivada segunda. Utilizaremos una u otra en función de cada caso concreto.

Método de la derivada primera

Se estudia el signo de $f'(x)$ a la izquierda y a la derecha de cada punto singular.

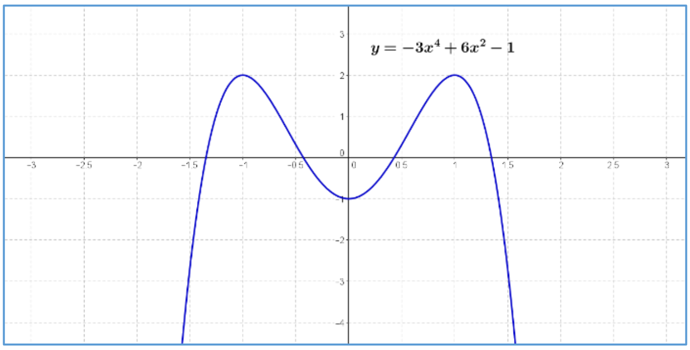
- Si la derivada es positiva a la izquierda y negativa a la derecha, el punto es un máximo.
- Si la derivada es negativa a la izquierda y positiva a la derecha, el punto es un mínimo.
- Si no hay cambio de signo, el punto no es un extremo.

Método de la derivada segunda

Se calcula la derivada segunda de f en cada punto singular x_i.

- $f''(x_i) > 0 \Rightarrow x_i$ es un mínimo.
- $f''(x_i) < 0 \Rightarrow x_i$ es un máximo.
- $f''(x_i) = 0 \Rightarrow$ se calculan las derivadas sucesivas de f en x_i. Si la primera derivada no nula es de orden par, el punto es un extremo (un máximo si la derivada es negativa, y un mínimo si la derivada es negativa). Si la primera derivada no nula es de orden impar, el punto no es un extremo.

Ejercicio. Estudiar el comportamiento de la función $f(x) = -3x^4 + 6x^2 - 1$ en todo su dominio.



Cálculo de los extremos absolutos

Una vez obtenidos los extremos relativos de la función, podemos proceder a determinar los posibles extremos absolutos. Debemos hacerlo con cuidado pues pueden darse diversas circunstancias. Por ejemplo, es fácil ver que una función puede tener extremos relativos y no tener extremos absolutos. En general, los métodos a utilizar varían según las funciones y sus dominios.

Extremos absolutos en un dominio cerrado y acotado

Si estamos trabajando con una función continua definida en un dominio cerrado y acotado, la situación es particularmente sencilla, porque en este caso la función alcanza con toda seguridad sus extremos absolutos (máximo y mínimo) en dicho dominio (teorema de Weierstrass). Por tanto, para identificar sus extremos absolutos:

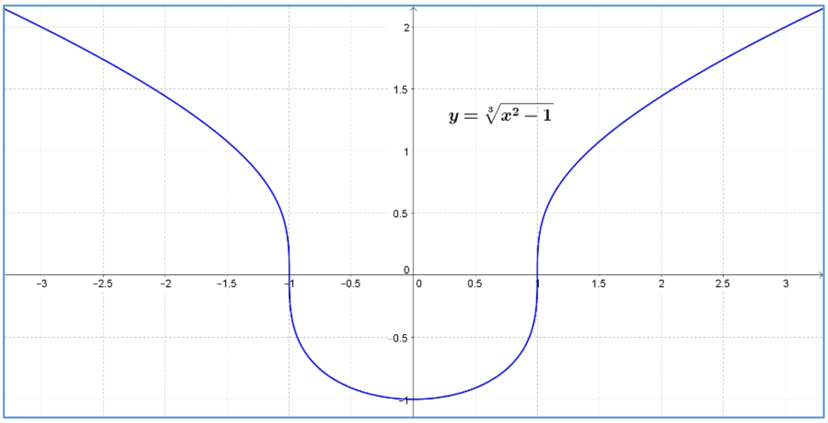
1. Localizamos todos los candidatos a extremos
   a) puntos singulares en el interior del dominio.
   b) puntos en que la función no es derivable.
   c) puntos situados en la frontera del dominio.
2. Evaluamos la función en cada uno de esos puntos.
3. Seleccionamos los puntos donde la función alcanza sus extremos absolutos.

Extremos absolutos en un dominio que no es cerrado y acotado

Si el dominio no está cerrado y acotado, la situación es más complicada. En general, procederemos de la siguiente manera.

1. Localizamos todos los candidatos a extremos
   a) puntos singulares en el interior del dominio.
   b) puntos en que la función no es derivable.
   c) puntos situados en la frontera del dominio.
2. Estudiamos la función en cada uno de los puntos obtenidos, tratando de determinar si es o no un extremo absoluto.
   a) En algunos casos bastará estudiar el crecimiento y el decrecimiento de la función.
   b) En otras ocasiones podremos utilizar argumentos físicos o intuitivos.
   c) En otras situaciones deberemos estudiar el comportamiento de la función mediante límites. Los casos más complicados quedan fuera del alcance de este curso.

Ejercicio. Estudiar el comportamiento de la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ en el intervalo $[-3, 3]$.

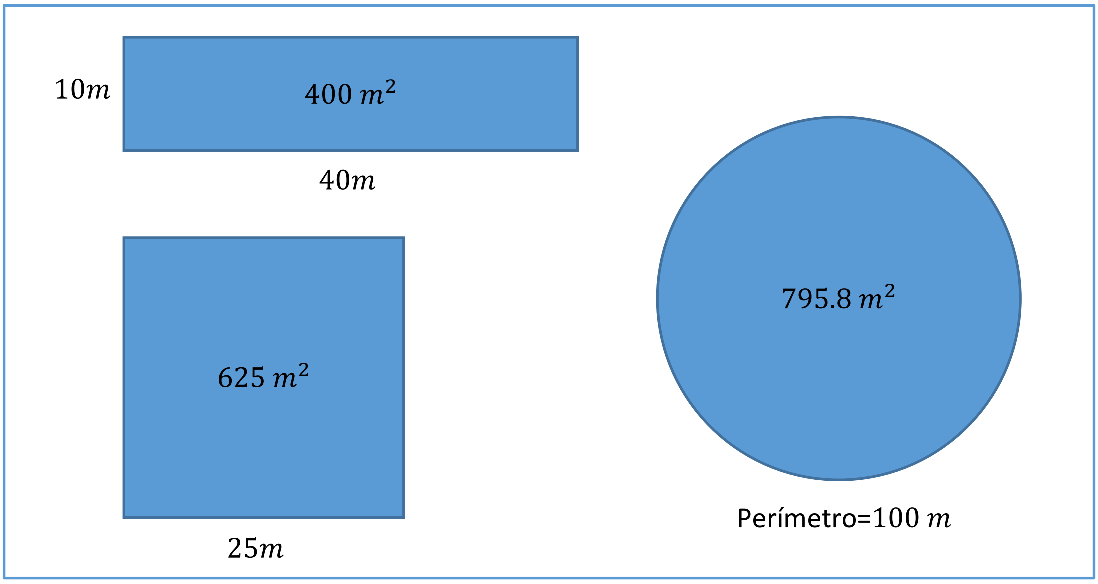


Problemas de optimización

Problema. Deseamos acotar un terreno utilizando 100 metros de valla ¿Qué forma debemos darle al terreno para que el área encerrada sea máxima (optimizar el uso de la valla)?

Veamos algunas posibilidades

- Un rectángulo de 40 y $10\ m$ de lado encierra un área de $400\ m^2$.
- Un cuadrado de $25\ m$ de lado encierra un área de $625\ \mathrm{m}^2$.
- Un círculo de $100/2\pi\ m$ de radio encierra un área de $795.8\ m^2$.



Como vemos las diferencias son notables y lo cierto es que, de todas las figuras planas con un mismo perímetro, el círculo es la que encierra área máxima. Análogamente, de todas las figuras espaciales con la misma superficie, la esfera es la que encierra volumen máximo. Resolver el problema general es complicado, pero podemos plantearnos un caso más sencillo.

Problema. Consideremos todos los rectángulos con un perímetro de 100 metros ¿Cuál de ellos encierra área máxima?

En general, los problemas de optimización plantean una situación en la que debemos optimizar (maximizar o minimizar) alguno de los parámetros del problema. Para resolverlo debemos establecer la función que queremos optimizar (*función objetivo*), sujeta a las restricciones que indique el problema (*restricciones*). A continuación, calculamos los valores donde la función alcanza su valor máximo o mínimo absoluto. En este caso:

- Función objetivo (área de un rectángulo): $f(x,y) = xy$.
- Restricción: $2x + 2y = 100 \Longrightarrow y = 50 - x$.
- Función a maximizar: $f(x) = x(50 - x)$.

Estudiamos la función y su derivada.

- $f(x) = 50x - x^2$. Dominio $(0, 50)$.
- $f'(x) = 50 - 2x$. Dominio $(0, 50)$.

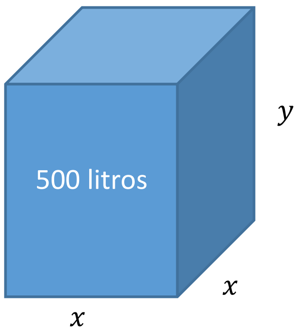
Obtenemos los candidatos a extremos.

- Puntos singulares: $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 25$.
- Puntos donde la función no es derivable: no tiene.
- Puntos extremos del dominio: no tiene.

Estudiamos el único candidato utilizando el método de la derivada primera.

- $f'(x) = 50 - 2x > 0$ en $(0, 25) \Longrightarrow$ la función es estrictamente creciente en $(0, 25)$
- $f'(x) = 50 - 2x < 0$ en $(25, 50) \Longrightarrow$ la función es estrictamente decreciente en $(25, 50)$.
- Por tanto, la función tiene un máximo absoluto en $x = 25$.
- El cuadrado de lado 25 m encierra un área máxima de 625 m^2.

Ejemplo. Se desea fabricar un depósito de hojalata de 500 litros de capacidad, con forma de paralelepípedo abierto y fondo cuadrado. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que la cantidad de hojalata empleada sea mínima?



- Función objetivo (superficie del depósito): $f(x,y) = x^2 + 4xy$.
- Restricción: $x^2 y = 500 \Longrightarrow y = 500/x^2$.
- Función a minimizar: $f(x) = x^2 + 4x\frac{500}{x^2} = x^2 + \frac{2000}{x}$.

Estudiamos la función y su derivada.

- $f(x) = x^2 + \frac{2000}{x}$. Dominio $= (0, \infty)$.
- $f'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2}$. Dominio $= (0, \infty)$.

Obtenemos los candidatos a extremos

- Puntos singulares: $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 10$.
- Puntos donde la función no es derivable: no tiene.

- Puntos extremos del dominio: no tiene.

Estudiamos el único candidato utilizando el método de la derivada segunda.

- $f''(x) = 2 + \frac{4000}{x^3} \Rightarrow f''(10) = 6 > 0 \Rightarrow x = 10$ es un mínimo relativo.
- Estudiando el crecimiento y decrecimiento de la función en todo su dominio vemos que se trata de un mínimo absoluto.
- Las dimensiones deben ser $x = 10 \text{ dm}, y = \frac{500}{10^2} = 5 \text{ dm}.$

Ejercicio. Un jardín tiene forma semicircular y su radio mide 20 m. En su interior se quiere instalar un parterre rectangular, uno de cuyos lados está sobre el diámetro mientras que el lado opuesto tiene sus vértices en la semicircunferencia. El parterre se plantará de camelias, cada una de las cuales ocupa $0.25\ m^2$. ¿Cuál es el número máximo de camelias que pueden plantarse? (Se recomienda utilizar el método de la derivada primera).