# Fundamentos matemáticos para la Ingeniería

Grado en Arquitectura Técnica

# Tema 7
# Integración

**José Barrios García**

**Departamento de Análisis Matemático**

**Universidad de La Laguna**

**jbarrios@ull.es**

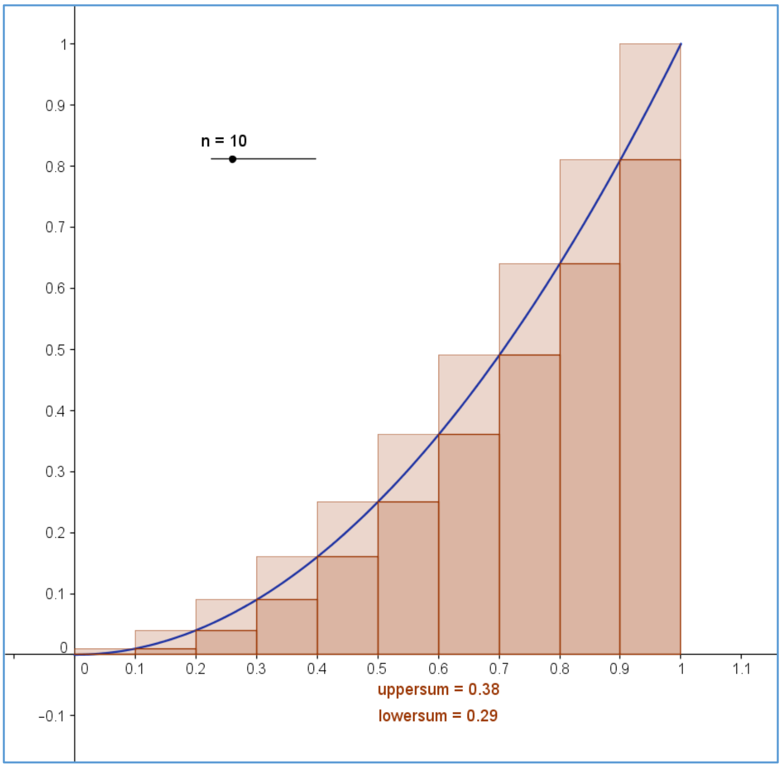
# Índice

# Tema 7. Integración

## Introducción

El cálculo de áreas es una de las aplicaciones básicas de las matemáticas. Todas las grandes civilizaciones antiguas desarrollaron métodos sencillos para calcular el área encerrada por líneas poligonales, pero el problema se encontró al tratar de medir el área encerrada por líneas curvas. Este problema no se resolvió hasta finales del siglo XVII con el descubrimiento del cálculo integral.

En la primera parte de este tema definiremos el concepto de área bajo una curva, aproximando el área por medio de rectángulos, seguido de un proceso de paso al límite. A continuación, veremos cómo el teorema fundamental del cálculo nos permite calcular el área bajo la curva mediante el cálculo de primitivas. Esto nos llevará a la segunda parte del tema, donde estudiaremos los métodos básicos de integración. En la tercera parte aplicaremos el cálculo integral a la resolución de los problemas básicos: cálculo de áreas, volúmenes, superficies y longitudes de curvas.




*Aproximación del área bajo la curva $y = x^2$ en el intervalo $[0,1]$.*

## Integral de Riemann

La integral de Riemann es el concepto matemático básico utilizado para el cálculo de áreas y volúmenes. Hay dos tipos de integrales de Riemann, la *integral definida* y la *integral indefinida.*

El proceso de calcular integrales se denomina *integración*, mientras que el cálculo aproximado de integrales se denomina integración *numérica*. En este tema abordaremos los métodos básicos de integración y sus aplicaciones geométricas básicas.

## Integral definida

Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $[a, b]$. La *integral definida* de $f(x)$ en el intervalo se escribe

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

y se define como el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \Delta x$$

Donde el intervalo $[a, b]$ se ha dividido en $n$ subintervalos iguales $[x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, \dots n$, de ancho $\Delta x$, y $x_k^*$ es un punto cualquiera del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

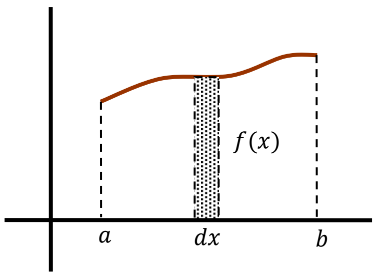
## Funciones integrables

Diremos que $f$ es *integrable* en el intervalo $[a, b]$ si existe $\int_a^b f\,(x)\, dx$. El siguiente teorema nos asegura que toda función continua es integrable.

$$f \text{ continua en } [a, b] \Rightarrow f \text{ integrable en } [a, b]$$

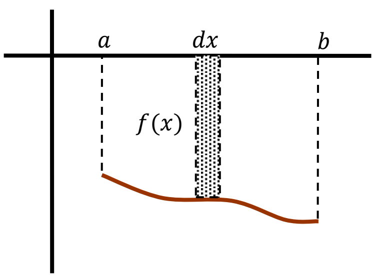
## Área bajo una curva

Sea $f(x)$ es una función continua no negativa en el intervalo $[a, b]$. El *área entre la curva y el eje* $X$ se define como la integral definida de la función en el intervalo.



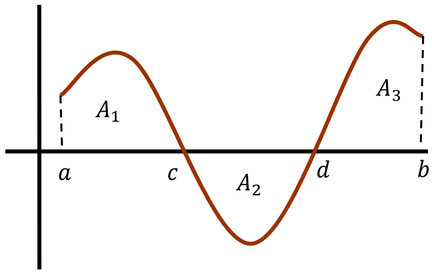

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

Si la función es no positiva, los rectángulos aproximantes tienen altura cero o negativa, la suma de sus áreas es negativa, y la integral da como resultado un número negativo. En este caso, definimos el *área entre la curva y el eje* como la integral cambiada de signo.




$$A = -\int_a^b f(x)\, dx$$

Si la función cambia de signo en el intervalo, la integral de la función a lo largo de todo el intervalo nos proporciona el *área neta* entre su gráfica y el eje $X$. Es decir, la dieferencia entre las áreas situadas por encima del eje y las áreas situadas por debajo del eje. Si queremos calcular el *área total* encerrada entre la curva y el eje debemos separar la integral por trozos, y cambiar de signo la integral en los trozos donde la función es negativa.



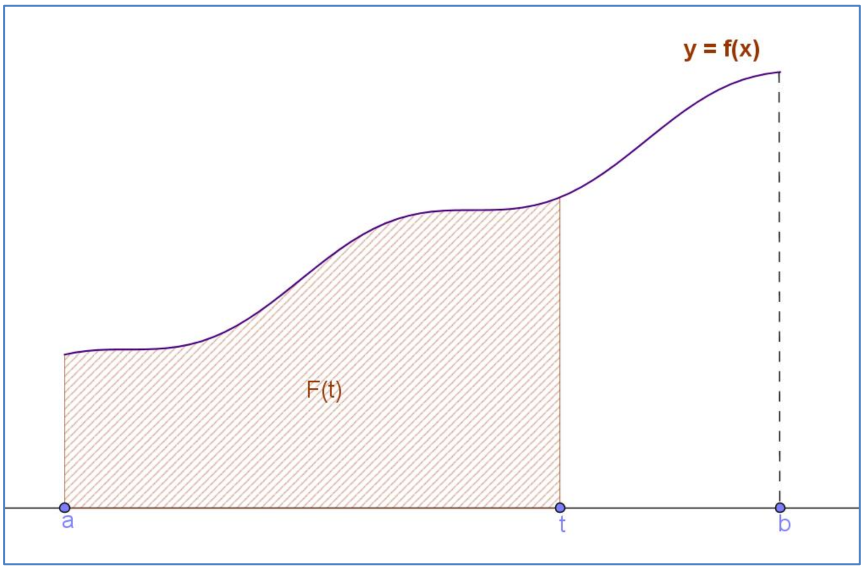

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_3$$

$$A = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)\,dx$$

No obstante, el cálculo del área por medio de límites suele ser complicado. ¿Hay alguna manera simplificar estos cálculos? La respuesta está en la función área y su derivada.

## La función área

Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, podemos definir la función $F(t)$ que nos proporciona el área bajo la curva entre el punto $a$ y un punto $t$ del intervalo.




$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

El resultado importante es que la función $F$ es derivable y su derivada es la propia función $f$. Es decir

$$F'(t) = f(t)$$

Este resultado nos permite calcular el área bajo la curva de la siguiente manera. Supongamos que $G(x)$ es una *primitiva* o *antiderivada* de $f$, es decir, una función cuya derivada es $f(x)$, como $F' = G'$, ambas funciones son iguales salvo una constante $c$, luego

$$F(t) = G(t) + \mathrm{c}$$

Como una región de ancho cero tiene área cero

$$F(a) = G(a) + c = 0$$

Y se tiene

$$F(t) = G(t) - G(a).$$

Este resultado se conoce como

## Teorema fundamental del cálculo integral (regla de Barrow)

Si $f$ es continua en $[a,b]$ y $F$ es una primitiva de $f$ en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

**Nota**. Por comodidad, a menudo se utiliza la notación $F(x)|_a^b$ para indicar $F(b) - F(a)$.

**Ejemplo**. Calcular el área bajo la curva $y = \cos x$ en el intervalo $[0,\pi/2]$.

La función es no negativa en el intervalo. $F(x) = \operatorname{sen} x$ es una primitiva de $f(x) = \cos x$. Por tanto

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \operatorname{sen} x|_0^{\pi/2} = \operatorname{sen}(\pi/2) - \operatorname{sen}(0) = 1\, u^2.$$

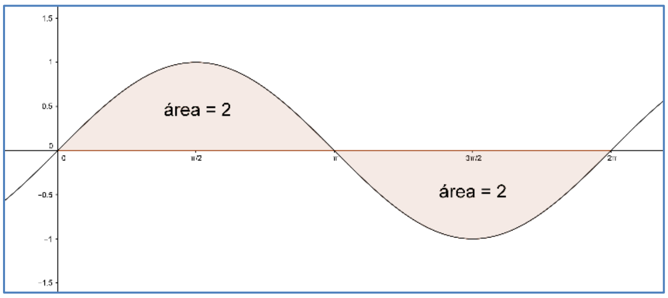
**Ejemplo**. Calcular el área bajo la curva $y = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0,\pi\,]$.

La función es no negativa en el intervalo. $F(x) = -\cos x$ es una primitiva de $f(x) = \operatorname{sen} x$. Por tanto

$$A = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x|_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos 0) = 2\, u^2.$$

**Ejemplo**. Calcular el área bajo la curva $y = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0,2\pi\,]$.

Si calculamos la integral a lo largo de todo el intervalo el resultado es un área neta cero.

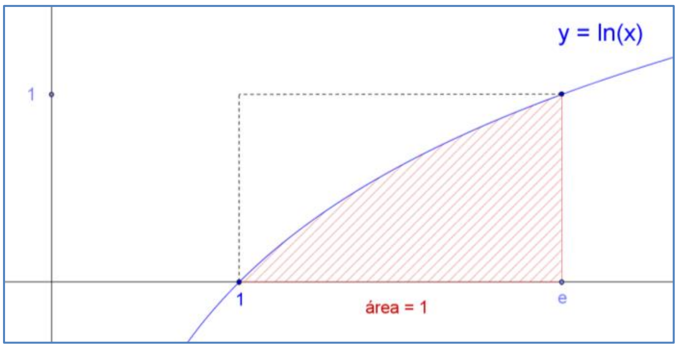



$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x|_0^{2\pi} = 0 \text{ !!!}$$

Para calcular correctamente el área total entre la curva y el eje debemos separar el intervalo

$$A = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx = 4\, u^2.$$

**Ejemplo**. Enseguida veremos que $F(x) = x(\ln x - 1)$ es una primitiva de $f(x) = \ln x$, por tanto,




$$\int_1^e \ln x \, dx = x(\ln x - 1)|_1^e = 1\, u^2.$$

## Propiedades de la integral definida

Si $f, g$ son funciones integrables en el intervalo $[a, b]$, y $k$ es un número real, entonces

1. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$
2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$
3. $\int_a^a f(x)dx = 0$ (por convenio).
4. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ (por convenio).
5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ para todo $c \in [a, b]$.

## Integral indefinida

Como podemos ver, el teorema fundamental del cálculo (TFC) es muy importante porque permite calcular la integral definida de una función (área) evaluando una primitiva de la función en los extremos del intervalo. La secuencia lógica es la siguiente

$$\text{Área} \overset{def.}{\cong} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} R_k \overset{not.}{\cong} \int_a^b f(x)dx \overset{TFC}{\cong} F(b) - F(a) \overset{not.}{\cong} F(x)|_a^b$$

Todo ello nos lleva de forma natural a las siguientes definiciones. Si $f$ es una función definida en el intervalo $[a, b]$, decimos que $F$ es una *función primitiva* o *antiderivada* de $f$ en el intervalo, si $F'(x) = f(x)$ en el intervalo. El conjunto de todas las funciones primitivas de $f$ en el intervalo se denomina *integral indefinida* de $f$ en el intervalo y se escribe

$$\int f(x)\,dx$$

Como todas las primitivas de $f$ son iguales salvo una constante, si $F$es una primitiva de $f$ solemos escribir

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c.$$

**Ejemplos**

1. $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c.$
2. $\int \cos x\;dx = \operatorname{sen} x + c.$
3. $\int \sec^2 x\;dx = \tan x + c.$

# Métodos de integración

En virtud del TFC, el cálculo de la integral definida de una función se reduce a calcular una primitiva de la función. Este problema a veces es fácil de resolver, y otras muy complicado.

- $f(x) = \cos x$ Función sencilla con integral sencilla.
- $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ Función sencilla con integral complicada.
- $f(x) = e^{-x^2}$ Función sencilla que no se puede integrar.

Por tanto, es necesario desarrollar métodos que nos permitan calcular primitivas. Los métodos básicos de integración que veremos en este tema son: *integrales inmediatas*, *linealidad*, *cambio de variable*, *integración por partes*, *integrales racionales elementales*, *integrales trigonométricas elementales* y, por último, *uso de la tabla de integrales*.

## Integrales inmediatas

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + c$$

Integración directa de funciones utilizando una tabla de derivadas, leída en sentido contrario.

**Ejemplos**

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1.$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c.$
- $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c.$
- $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c.$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{atan} x + c.$

## Linealidad

$$\int (af \pm bg)(x)\,dx = a\int f(x)\,dx \pm b\int g(x)\,dx$$

**Ejemplos**

- $\int (3x^2 - 2x + 1)dx = 3\int x^2 dx - 2\int x dx + \int dx = x^3 - x^2 + x + c.$
- $\int (x-1)(x+2)dx = \int (x^2 + x - 2)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + \text{c}.$
- $\int x^2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int (x^4 + 2x^2 + 1)dx = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c.$

## Sustitución o cambio de variable

$$\int g\big(f(x)\big)\,f'(x)\,dx = \int g(t)\,dt$$

Haciendo el cambio $f(x) = t \Rightarrow f'(x) = \frac{dt}{dx} \Rightarrow f'(x)\,dx = dt.$

**Ejemplos**

- $\int \cos(3x-1)\,dx = \frac{1}{3}\int \cos t\,dt = \frac{1}{3}\operatorname{sen} t + c = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x-1) + c.$

  Cambio $3x - 1 = t \Rightarrow 3\,dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}.$

- $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}2\sqrt{t} + c = -\sqrt{t} + c = -\sqrt{1-x^2} + c.$

  Cambio $1 - x^2 = t \Rightarrow -2x\,dx = dt \Rightarrow x\,dx = -\frac{dt}{2}.$

- $\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx = \int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{sen}^3 x} + c.$

  Cambio $\operatorname{sen} x = t \Rightarrow \cos x\,dx = dt.$

**Caso particular importante**

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| \ + c$$

**Ejemplos**

- $\int \frac{2}{x+3}dx = 2\int \frac{dx}{x+3} = 2\int \frac{dt}{t} = 2\ln|t| + c = 2\ln|x+3| + \mathrm{c} = \ln(x+3)^2 + c.$

  Cambio $x + 3 = t \Rightarrow \ dx = dt.$

- $\int \tan x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + c = -\ln|\cos x| + c.$

  Cambio $\cos x = t \Rightarrow -\operatorname{sen} x\, dx = dt.$

## Integral definida resuelta mediante cambio de variable

$$\int_a^b g\big(f(x)\big)\, f'(x)\, dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(t)\, dt$$

**Ejemplo**

- $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{3-x^2}} = -\frac{1}{2}\int_3^2 \frac{dt}{\sqrt{\mathrm{t}}} = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{dt}{\sqrt{\mathrm{t}}} = \sqrt{\mathrm{t}}\,\big|_2^3 = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$

  $3 - x^2 = t \Rightarrow -2x\, dx = dt \Rightarrow x\, dx = -dt/2$
  $\left.\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow t = 3 \\ x = 1 \Rightarrow t = 2 \end{array}\right\}$

- Debemos acordarnos de cambiar los límites de integración.
- No es necesario deshacer el cambio.

# Integración por partes

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

Se utiliza para integrar funciones que pueden escribirse como producto de dos factores, $u$ y $dv$, de forma que el cálculo de $\int dv$ y de $\int v\, du$ sea más sencillo que la integral de partida. Entre sus principales aplicaciones se encuentran:

- Integración de expresiones que contienen funciones logarítmicas o trigonométricas inversas.
- Integración de funciones del tipo $\int x^n \operatorname{sen}(ax)\, dx\,, \int x^n \cos(ax)\, dx\,, \int x^n e^{ax} dx$, con $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$.

**Ejemplos**

- $\int \ln x\, dx = \ x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c.$

  $\left.\begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = dx \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} du = dx/x \\ v = x \end{array}\right\}$

- $\int \operatorname{asen} x\, dx = x \operatorname{asen} x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \operatorname{asen} x + \sqrt{1-x^2} + c$

  $\left.\begin{array}{l} u = \operatorname{asen} x \\ dv = dx \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = x \end{array}\right\}.$

- $\int x\cos x\,dx = x\,\mathrm{sen}\,x - \int \mathrm{sen}\,x\,dx = x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x + c$

  $\left.\begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos x\,dx \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} du = dx \\ v = \mathrm{sen}\,x \end{array}\right\}$

### Integral definida resuelta por partes

Se puede calcular

$$\int_a^b u\,dv = uv|_a^b - \int_a^b v\,du$$

O bien, calcular por partes una primitiva $F(x)$ de la integral indefinida $\int u\,dv$, y utilizar la regla de Barrow (suele ser más cómodo).

$$\int_a^b u\,dv = F(x)|_a^b$$

**Ejemplo**

- $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx = x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x\,|_0^{\pi} = -2.$

## Integración de funciones racionales elementales

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

Donde

- $P(x), Q(x)$ son polinomios irreducibles (sin raíces comunes)
- $Q(x)$ tiene tantas raíces reales como indica su grado.
- Grado de $P(x)$ < grado de $Q(x)$.

Si grado de $P(x)$ ≥ grado de $Q(x)$, se divide la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ y se reduce al caso anterior.

### Resolución

Para integrarlas se factoriza el polinomio $Q(x) = (x-a)^n\,(x-b)^m \cdots$ y se descompone la fracción en suma de fracciones simples de la siguiente manera:

- Cada raíz real $x = a$ de multiplicidad $n$ proporciona $n$ fracciones simples de la forma

$$\frac{A_1}{(x-a)^1} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

- Los coeficientes indeterminados $A_i$ se calculan por reducción a común denominador e igualación de coeficientes.

**Ejemplos**

- $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c.$

  $\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(A+B)x+(A-B)}{x^2-1} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ A-B=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 1/2 \\ B = -1/2 \end{array}$

- $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx = 2\int \frac{dx}{x} - 2\int \frac{dx}{x+1} - 2\int \frac{dx}{(x+1)^2} + \int \frac{dx}{(x+1)^3} = 2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + \mathrm{c}.$

$$\frac{3x+2}{x(x+1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{(x+1)^3}\Rightarrow \begin{matrix} A=+2 & C=-2 \\ B=-2 & D=+1 \end{matrix}$$

- $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\int(x^2+x+4)dx+4\int\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+c.$ [Ejercicio].

## Integración de funciones trigonométricas elementales

**Caso 1.** $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$, $n$ impar positivo.

El cambio $\cos x = t \Rightarrow \left.\begin{matrix} -\operatorname{sen} x\, dx = dt \\ \operatorname{sen}^2 x = 1-t^2 \end{matrix}\right\}$ la convierte en la integral de un polinomio.

- $\int \operatorname{sen}^5 x\ dx = \int \operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} x\ dx = -\int (1-t^2)^2\, dt$. [Ejercicio].

**Caso 2.** $\int \cos^n x\, dx$, $n$ impar positivo.

El cambio $\operatorname{sen} x = t \Rightarrow \left.\begin{matrix} \cos x\, dx = dt \\ \cos^2 x = 1-t^2 \end{matrix}\right\}$ la convierte en la integral de un polinomio.

- $\int \cos^3 x\ dx = \int \cos^2 x \cos x\ dx = \int (1-t^2)\, dt$. [Ejercicio].

**Caso 3.** $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$, $\int \cos^n x\, dx$, $\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)\, dx$, con $m, n$ números pares positivos.

Se transforma el integrando utilizando las fórmulas del ángulo mitad.

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

- $\int \operatorname{sen}^2 x\ dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + c$.
- $\int \cos^4 x\ dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$
  $=\frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$
  $=\frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx$
  $=\frac{1}{8}\int (3+4\cos 2x+\cos 4x)\, dx$. [Ejercicio].

## Uso de la tabla de integrales

Las siguientes integrales pueden resolverse utilizando la tabla de integrales que acompaña al tema.

- $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$. Completar cuadrados y cambio de variable. Integrales 16, 17, 18.
- $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx$. Completar cuadrados y cambio de variable. Integrales 19, 20, 21.
- $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Completar cuadrados y cambio de variable. Integrales 22, 23, 24.

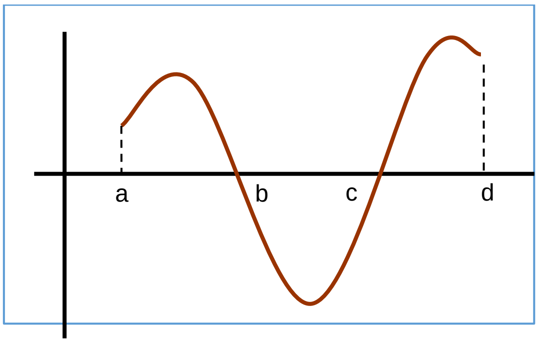
**Ejemplos**

- $\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{2}\operatorname{atan}\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{atan}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c.$
- $\int \sqrt{x^2+2x+5}\, dx = \int \sqrt{(x+1)^2+4}\, dx = \int \sqrt{t^2+2^2}\, dt$ [Ejercicio].
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+2^2}}$ [Ejercicio].

# Aplicaciones geométricas

## Área entre una curva y el eje $X$

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$, para hallar el área comprendida entre la curva, el eje $X$ y las rectas $x=a, x=b$ debemos estudiar el signo de la función, separando la integral en los intervalos correspondientes.




$$A=\int_a^b f(x)dx-\int_b^c f(x)dx+\int_c^d f(x)dx$$

**Ejemplo**. Hallar el área comprendida entre la curva $y=x^3-6x^2+8x$ y el eje $X$.

Calculando los puntos de corte con el eje X y estudiando la curva, resulta

$$f(x)=x(x-2)(x-4) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \text{ en } [0,2] \\ f(x) \leq 0 \text{ en } [2,4] \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} A= & \int_0^2 (x^3-6x^2+8x)dx-\int_2^4 (x^3-6x^2+8x)dx \\ & =\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right]_0^2-\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right]_2^4=4-(-4)=8\,u^2. \end{aligned}$$

Nótese que $\int_0^4 (x^3-6x^2+8x)dx=0$

**Ejemplo** Hallar el área limitada por la parábola $y=x^2$, el eje $X$ y las rectas $x=1$ y $x=3$. Dibujando la parábola y las rectas, resulta

$$A=\int_1^3 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3=\frac{26}{3}\,u^2.$$

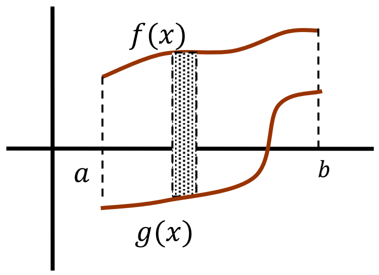
**Ejemplo** Hallar el área limitada por la parábola $y=4x-x^2$ y el eje $X$. Calculando los puntos de corte con el eje X y dibujando la curva, resulta

$$A=\int_0^4 (4x-x^2)dx=\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^4=\frac{32}{3}\,u^2$$

## Área entre curvas

Sean $f,g$ funciones continuas en el intervalo $[a,b]$, con $g(x)\leq f(x)$ en el intervalo. El área de la región comprendida entre sus gráficas y las rectas $x=a, x=b$ viene dada por

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$




$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

**Ejemplo**. Hallar el área limitada por las parábolas $y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 2x$.

Dibujando las parábolas y calculando sus puntos de corte, resulta

$$A = \int_0^4 (8x - 2x^2)dx = \left[4x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^4 = \frac{64}{3}\,u^2.$$

**Ejemplo** Hallar el área limitada por la parábola $4y = x^2$ y la recta $x - 2y + 4 = 0$.

Dibujando la parábola y la recta, resulta

$$A = \int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 2 - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^4 (-x^2 + 2x + 8)dx = \frac{1}{4}\left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 8x\right]_{-2}^4 = 9\,u^2.$$

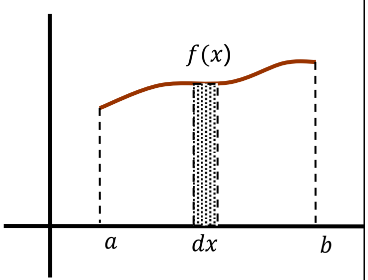
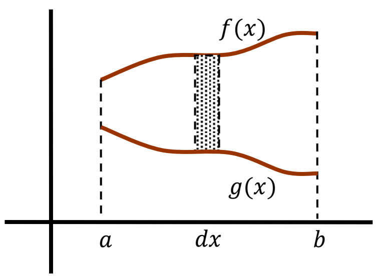
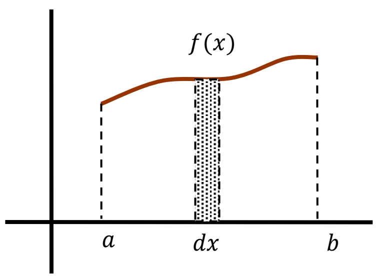
**Ejemplo** La recta $x = \sqrt{2}$ divide al círculo $x^2 + y^2 = 4$ en dos partes. Hallar sus áreas.

$A_1 = 2\int_{\sqrt{2}}^2 \sqrt{4 - x^2}dx = \left[x\sqrt{4 - x^2} + 4\,\mathrm{asen}\frac{x}{2}\right]_{\sqrt{2}}^2 = \pi - 2\,u^2$. Tabla de integrales nº 21.

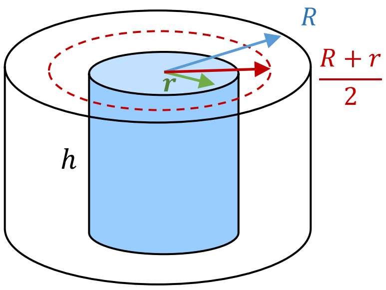
$A_2 = 4\pi - (\pi - 2) = 3\pi + 2\,u^2$.

## Volúmenes de sólidos de revolución

Un sólido de revolución se genera al girar un área plana en torno a una recta, llamada *eje de revolución* o *rotación*, en el plano. Para calcular su volumen tenemos tres métodos.

| Método de los discos (eje x) | Método de las arandelas (eje x) | Método de las capas (eje y) |
|---|---|---|
| El eje de rotación es parte del contorno del área plana | El eje de rotación no es parte del contorno del área plana | El eje de rotación es *perpendicular* a la curva que define el área |
|   $dV = \pi f^2(x)\,dx$ $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$ |   $V = V_f - V_g$ $V = \pi \int_a^b [f^2 - g^2](x)dx$ |   $dV = 2\pi x\,dx\,f(x)$ $V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$ |

**Nota**. Volumen de una capa cilíndrica.




$$\begin{aligned} \mathrm{V} &= \pi(R^2 - r^2)h \\ &= \pi(R+r)(R-r)h \\ &= \underbrace{2\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)}_{\substack{circunferencia\\ media}} \underbrace{(R-r)}_{espesor} \underbrace{h}_{altura} \end{aligned}$$

**Ejemplo (discos)**. Volumen engendrado por la rotación sobre el eje $X$ del área comprendida entre la curva $y = \operatorname{sen} x$ y el eje $X$ en el intervalo $[0, \pi]$.

$$V = \pi \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{\pi^2}{2}\, u^3.$$

**Ejemplo (arandelas)**. Volumen engendrado por la rotación sobre el eje $X$ del área comprendida entre las curvas $y = 2 \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, \pi]$.

$$V = \pi \int_0^\pi [(2 \operatorname{sen} x)^2 - (\operatorname{sen} x)^2] dx = 3\pi \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{3\pi^2}{2}\, u^3.$$

**Ejemplo (capas)**. Volumen engendrado por la rotación sobre el eje $Y$ del área comprendida entre la curva $y = \operatorname{sen} x$ y el eje $X$ en el intervalo $[0, \pi]$.

$$V = 2\pi \int_0^\pi x \operatorname{sen} x\, dx = 2\pi^2\, u^3.$$

## Longitud de un arco de curva

Sea $y = f(x)$ una función continua con derivada continua en el intervalo $[a, b]$. Entonces la longitud del arco de curva comprendida entre los puntos $A\big(a, f(a)\big)$ y $B\big(b, f(b)\big)$ viene dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

**Ejemplo**. Longitud del arco de parábola $y = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

$$\begin{aligned} L = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx \quad &= \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{1 + t^2} dt \\ &= \frac{1}{4} \left[ t\sqrt{t^2+1} + \ln \left| t + \sqrt{t^2+1} \right| \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{4} \big( 2\sqrt{5} + \ln\big(2 + \sqrt{5}\big) \big) \\ &\cong 1.48\, u \end{aligned}$$

## Área de una superficie de revolución

Sea $f$ una función continua con derivada continua en el intervalo $[a,b]$, y $f$ no cambia de signo en el intervalo. El área de la superficie generada al girar el arco de cuerda comprendida entre los puntos $A\big(a,f(a)\big)$ y $B\big(b,f(b)\big)$ alrededor del eje $X$, viene dada por

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

**Ejemplo**. Superficie generada por $y = x^3$ en el intervalo $[0,1]$, rotando sobre el eje $X$.

$$S = 2\pi \int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx = \frac{2\pi}{36}\int_1^{10}\sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{18}\cdot\frac{2}{3}\,\sqrt{t^3}\Big|_1^{10} = \frac{\pi}{27}\left(\sqrt{1000}-1\right) \cong 3.56\,u^2.$$